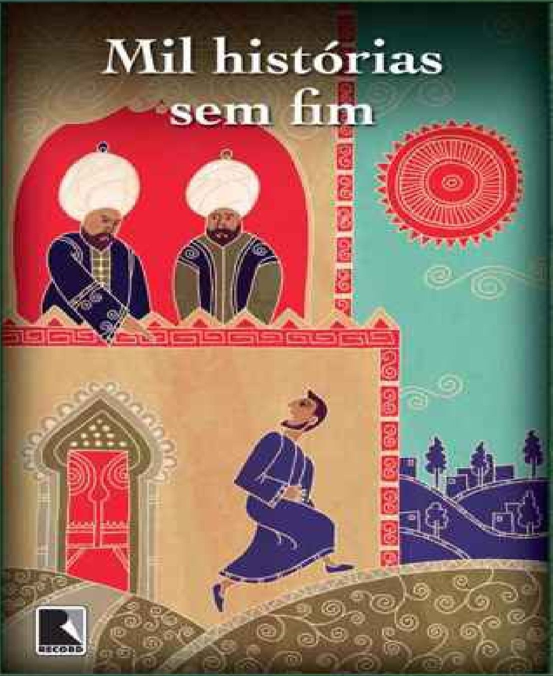
Malba Tahan

Mil histórias sem fim



vol. 1

Obras do autor

Aventuras do rei Baribê
A caixa do futuro
Céu de Alá
O Homem que Calculava
Lendas do céu e da terra
Lendas do deserto
Lendas do oásis
Lendas do bom rabi
O livro de Aladim
Maktub!
Matemática divertida e curiosa
Os melhores contos
Meu anel de sete pedras
Mil histórias sem fim (2 volumes)
Minha vida querida
Novas lendas orientais
Salim, o mágico

Malba Tahan

Mil histórias sem fim

Ilustrações de Rafael Nobre

2011

CIP-BRASIL. CATALOGAÇÃO NA FONTE
SINDICATO NACIONAL DOS EDITORES DE LIVROS, RJ

Tahan, Malba, 1895- 1974
T136m Mil história sem fim, volume 2 [recurso eletrônico] / Malba Tahan. - [1. ed.]. - Rio de Janeiro : Record, 2013.
recurso digital

Formato: ePub
Requisitos do sistema: Adobe Digital Editions
Modo de acesso: World Wide Web
ISBN 978-85-01-10187-7 (recurso eletrônico)

1. Conto brasileiro. 2. Livros eletrônicos. I. Título.

13-07802
CDD: 869.93
CDU: 821.134.3(81)-3

Projetos de miolo e capa elaborados a partir de projeto original de Ana Sofia Mariz.

Texto revisado segundo o novo Acordo Ortográfico da Língua Portuguesa.

Produzido no Brasil

ISBN 978-85-01-10187-7

Sumário

As mil histórias sem fim

HUMBERTO DE CAMPOS

I

Os povos, como os indivíduos, têm na infância predileções pelas histórias imaginosas e movimentadas. Por isso mesmo, essa predileção constitui o alicerce de todas as literaturas. Homero é a pedra angular da literatura grega. As literaturas modernas assentam, todas, em poemas épicos e ingênuos de fundo medieval. Enquanto, porém, no Ocidente, esse gênero literário assinala apenas um ponto de partida, um povo, as gentes de língua e raça árabe, levantaram com ele o mais alto e vistoso dos seus monumentos. Debalde poetas como El-Antari e Ibn-Fared; historiadores como Tabari e Abul-Feda; geógrafos como Ibn-Djobeir e Bekri; eruditos como Kalil e Ibn-Doraid meditaram, estudaram e escreveram, produzindo poemas e tratados de largo fôlego, expressão de um alto mérito intelectual; o que ficou, espantando o mundo e vencendo os séculos pela opulência da imaginação e pela harmonia da feitura, foi uma obra anônima, uma coletânea folclórica de riqueza incomparável, captada diretamente na memória laboriosa do povo. O Homero desta "Odisseia" tem o nome que Ulisses deu a Polifemo na sua furna das vizinhanças do Etna. Chama-se "Ninguém".

Poder-se-ia, talvez, atribuir esse fato a um fenômeno de ordem política, à paralisação, ou interrupção, da evolução do povo árabe em hora matutina da sua história após a Héjira. Preenchendo o intervalo da civilização entre a queda do mundo romano e a Renascença, mas começando tarde e terminando cedo, o gênio árabe descrevia — poder-se-ia dizer — a mesma trajetória que haviam realizado o gênio grego e o gênio latino, e realizariam mais tarde os povos ocidentais, quando o desmoronamento do seu Império o deteve em plena ascensão. A verdade, porém, é que a obra que ele deixou corresponde, integralmente, às aspirações da alma nacional.

A característica principal da alma asiática está, em verdade, na sua capacidade de renúncia à realidade, na sua tendência permanente para o sonho, no predomínio, em suma, da imaginação. E nenhum povo no Oriente, exceção do chinês, que vai até a eliminação da personalidade, é mais meditativo que o árabe. Isso, mais do que as circunstâncias históricas, contribuiu para que ele fizesse do conto fantástico a sua fórmula literária preferida. E como os contos são leves, e as viagens eram longas, adotaram eles as histórias infindáveis como as travessias surpreendentes como o deserto, as narrativas, compondo assim coletâneas opulentas, equivalentes pela novidade e frescura das criações às grandes obras da literatura do Ocidente.

Não obstante o esforço tenaz de Mustafá-Kemal, na Turquia, e de alguns prepostos europeus, simuladamente nacionalistas, que exercem a ditadura nos países de gênio ou de língua árabe, para isolar da velha Ásia tradicional a região que vai da fronteira oriental da Pérsia aos Dardanelos e ao canal de Suez, o narrador de histórias sobrevive, e é ainda uma das manifestações mais resistentes e características de uma civilização amável que se procura destruir. Antes da revolução que vem sublevando a Ásia e que subdividiu o antigo império otomano, não havia aldeia que não possuísse o seu contador de lendas, que correspondia aos nossos cantadores sertanejos, com a diferença, apenas, de ter aquele um campo mais vasto, consubstanciado numa tradição mais rica, de gosto mais puro. Cidades havia em que esses rapsodos se reuniam, formando associações de classe, nas quais eram contratados para festas e estabelecimentos de diversões. Cairo, Damasco, Ismirna, Constantinopla possuíam corporações desse gênero, dirigidas por um deles, de maior autoridade, o qual tinha o título de xeque-elmedah, que significa "chefe dos contadores de histórias". É um espetáculo curioso — escrevia Hammer, há oitenta anos —, é um espetáculo curioso acompanhar as impressões que as histórias produzem na alma ardente e apaixonada dos árabes... Conforme a palavra credenciada do narrador, os ouvintes se agitam ou se acalmam. À cólera violenta sucedem os sentimentos mais ternos; os risos estridentes são seguidos, não raro, de prantos e lamentações. Se o herói de um conto é ameaçado de perigo iminente, os ouvintes exclamam em coro: "La, la, la. estagfer Allah!" ("Não, não, não, Deus não consentirá!") Quando um bandido dissimulado ou um amigo desleal prepara uma das suas ciladas, surgem logo, de todos os lados, as imprecações: "Que Cheitã (o Demônio) castigue o traidor!" Se o herói do conto é um bravo e tomba em combate, seguem-se as expressões com que são homenageados os mortos: "Que Deus o receba na Sua misericórdia! Que Deus o tenha em paz!" E se o narrador fala de uma mulher formosa, o auditório exalta-se, como se a tivesse diante dos olhos: "Glória a Deus que criou a Mulher! Exaltado seja o Altíssimo que criou a Beleza e a Mulher!"

Já no século XX, Mardrus, francês de Constantinopla, que se criara entre árabes, externava essa mesma impressão: "Todo artista que viajou o Oriente", escreveu este, no seu estilo das *Mil e uma Noites*, "todo artista que viajou o Oriente e tomou lugar nos bancos calados dos adoráveis cafés populares das verdadeiras cidades muçulmanas e árabes: no velho Cairo, de ruas cheias de sombras e permanentemente frescas, em Damasco, em Sana do Iêmen, em Bagdá ou Mascate; todo aquele que dormiu na esteira imaculada do beduíno da Palmira, ou partiu o pão e saboreou o sal fraternalmente na solidão gloriosa do deserto, com Ibn-Rachid, o suntuoso, tipo inconfundível do árabe autêntico ou, ainda, se deteve a estudar uma palestra de simplicidade antiga do puro descendente do Profeta, o xerife Hussein-Ali-ben-Aun, emir de Meca, pôde notar, com certeza, a expressão das pitorescas fisionomias reunidas. Um sentimento único domina toda a assistência; uma hilaridade louca. Ela flameja com vitais estalidos ante as descrições do narrador público que no centro do café ou da praça gesticula, move-se, passeia ou brinca, para dar maior expressão à narrativa no meio dos espectadores risonhos... E apodera-se de vós outros a geral embriaguez suscitada pelas palavras ou pelos sons imitativos, e vos sentis como se fôsseis navegantes aéreos na frescura da noite..." E Mardrus concluiu: "O árabe não é mais do que um instintivo apurado, esquisito. Ama a linha pura e a adivinha com a sua imaginação, quando irreal. E sonha..."

O árabe vive, assim, a vida da sua imaginação. Para ele, os heróis das suas narrativas são reais e palpáveis. E essa facilidade em confundir a realidade com a concepção dos sentidos é que explica o surto prodigioso do islamismo no dia em que um homem, aproveitando o poder sincrético dessas imaginações ardentes, as pôs em ação para levar a efeito uma formidável obra religiosa e política.

II

As histórias em séries, isto é, os contos que terminam com a "deixa" para outro e que formam, assim, uma interessante cadeia de narrativas variadas e unidas, constituem o mais rico e duradouro patrimônio das literaturas orientais. *As Mil e uma Noites*, que se intitulam no original *Kitab elf leila wa leila*, não são mais do que uma vaga de um oceano largo, a folha de uma árvore que os ventos da Arábia lançaram às terras do Ocidente. Investigações feitas no século XIX deixaram evidente que essa coletânea, revelada à Europa, inicialmente, em 1708, por Antoine Galland, secundado, em diversas épocas, por Petit de Le Croix Caussin de Perseval, Edouard Gaultier e

Mardrus, na França; por Payne, Burton e Lane, na Inglaterra; e por Habiche, Fleischer e Zotemberg, na Alemanha, não é mais do que um pequeno ramalhete de histórias trazidas pelas caravanas árabes da China, da Índia e da Pérsia, no século X, e que foi avolumado com as criações da imaginação nativa e com os episódios históricos desfigurados e enfeitados pelo tempo. Muitas dessas histórias provieram, todavia, já de outras coleções, assim como outras coleções se abasteceram, mais tarde, nas *Kitab elf leila wa leila*.

A liberdade de compilações e o acolhimento que tinham os povos em todo o Oriente, especialmente entre os povos de língua e origem "arábica, eram motivos para multiplicação e desenvolvimento dessas coletâneas. Na opinião de Massudi, que viveu no século XI e foi um dos escritores mais viajados do seu tempo, *As Mil e uma Noites* foram tiradas das *Hezar Afsaneh* (Mil Histórias). Esta última obra, segundo se afere de uma referência que a ela faz Ferduzzi no prefácio do *Schanameh* (Livro dos Reis), é atribuída a um poeta persa, Rasti, que teria vivido na segunda metade do século X. Massudi tem realmente razão. Scherazade e Dinazade estão com os seus nomes persas nas *Hezar Afsaneh*. Mas a Pérsia já as recebeu da Índia, segundo concluiu Huart. A convicção a que se chega é, pois, a da origem indiana das *Mil e uma Noites* e o seu enriquecimento gradual, na Pérsia e na Arábia. É sabido que, ainda no século XVIII, os árabes incorporavam contos novos, de assunto contemporâneo, à sua famosa coletânea. As circunstâncias de serem encontradas narrativas iguais em obras do mesmo gênero publicadas um século antes não demonstravam senão a origem comum dessas mesmas histórias, e que os colecionadores se haviam abastecido na mesma fonte, que é a imaginação ou a memória do povo.

Obedecem a esse mesmo espírito formando conjuntos de histórias seriadas, o "Tutinameh" ("Contos de um Papagaio"), o "Dsa-Kaumara-Tcharita" ("Trinta e Dois Contos de Trono"), os "Contos de Nang-tantrai" e as "Fábulas de Kalliba e Dinna", coligidas umas na Índia, outras na Pérsia, mas tendo, todas, repercussão na Arábia. Convém citar, entretanto, mais particularmente, as "Fábulas de Bidpai", "Panchatantra" e as "Fábulas de Locman", em que se acham algumas que são simples modalidades de contos das *Mil e uma Noites*. Outras dessas fábulas já se encontram em Esopo e serão encontradas, mais tarde, em La Fontaine.

Merecem referência, ainda, o "Katha-Sacrit-Sagara" ("Oceano Infindável dos Contos") e a coleção mais conhecida por "Mil e um Dias" ("Hearick-Rouz"). A primeira destas obras data, segundo se supõe, da primeira metade do século XI, entre os anos de 1059 e 1071. O autor dessa compilação, o brâmane Samodeva, confessa que a fez para distrair a avó de Acha-Dina, rei da Caxemira. Servida de coração piedoso, mansa de maneiras, amiga dos brâmanes, devota de Siva e dedicada esposa, essa veneranda senhora precisava de distrações honestas e tranquilas. Daí o trabalho que ele, Samodeva, realizou naquele longínquo século XI, e que chegou vitoriosamente ao nosso. Os "Mil e um Dias" datam, porém, do século XVIII. São atribuídos a um dervixe de Ispahan. A divisão a que hoje obedece é, no entanto, obra de ocidentais. Há, ainda, a assinalar a "Hipopadexa" ("Instrução Útil"), coleção de fábulas, apóstolos e contos morais da Índia, que se acredita organizada no século XII, mas que já é, por seu turno, uma imitação ou, antes, um resumo do "Panchatantra" de Bidpai. O "Panchatantra é, aliás, o mais opulento manancial de fábulas e apólogos da antiguidade, II ou III século da nossa era, sendo que alguns desses apólogos — acentua Georges Frilley — serviram de modelo aos fabulistas de todos os tempos e de todos os países.

As Mil e uma Noites foram literariamente conhecidas no Ocidente, dissemo-lo, já no primeiro decênio do século XVIII. Mas a sua influência, ou a das coleções do seu gênero, já se havia feito sentir muito antes. Que são, na verdade, o "Decameron", de Boccacio, as "Trecento Novelle", de Franco Sacchetti, o "Peccorone", de Giovanni Fiorentino, e o "Heptameron", de Margarida de Navarra, senão contos concatenados, como os das coletâneas do Oriente? A Itália, com os seus navegantes genoveses e venezianos, foi a primeira, naturalmente, a conhecer na Europa esse tesouro da imaginação asiática. Pode-se, ainda, encontrar aquela influência em épocas mais recentes em Hurtado de Mendoza, em Lesage e mesmo em Dickens e em alguns escritores ingleses que lhe foram contemporâneos. Estes, como se sabe, costumavam intercalar nos seus romances pequenos contos decorativos mais ou menos ligados ao assunto central, conforme se vê, por exemplo, no "Pickwick". Quanto às imitações, ou melhor, às mistificações, estas proliferam, conforme o gosto e os costumes do tempo. Enquanto Barthelémy inventava a "Viagem do Jovem Anacharsis na Grécia" (1797), Macpherson caluniava Ossian com os "Contos Gaélicos" (1760) e o abade Desfontaines contrafazia Swift, escrevendo o "Novo Guliver" (1741), Guilette publicava os "Mil e um Quartos de Hora", contos tártaros; as "Aventuras Maravilhosas do Mandarim Fum-Hoan", contos chineses; e "As Sultanas de Guzarat", contos mongóis, aproveitando para isso os assuntos das "Noites Alegres", de Straparola de Caravage, novelista italiano do século XV. Datam, também, da mesma época, os "Novos Contos Orientais", de Cylus, e "As Aventuras de Abdalah, Filho de Hanif", do abade Bignon.

O gênero literário que fez a glória das letras árabes, e que foi o melhor instrumento da divulgação do gênio da raça, é, assim, uma árvore que tem o seu tronco no Oriente, mas cujas folhas são lançadas, hoje, a todos os ventos da terra.

Ao Sr. Malba Tahan — cujo nome é, atualmente, um dos mais vulgarizados e discutidos das nossas letras, e cujos contos, espalhados por todo o Brasil e admirados em todo ele, são transcritos literalmente em toda a imprensa de língua portuguesa e traduzidos em outras deste continente e da Europa — cabe a glória de haver sido, entre nós e, creio mesmo, na América do Sul, o primeiro escritor de gênio árabe. A sua obra, iniciada em 1925, com a publicação dos *Contos*, conquistou, de pronto, a mais vasta popularidade. *Céu de Alá*, *Amor de Beduíno* e *Lendas do Deserto* completaram a sua personalidade de prosador oriental, definindo-a e incorporando-a, com relevo notável, ao que se podia chamar a "Legião Estrangeira" dos narradores árabes espalhados hoje pelo mundo.

A formação oriental do espírito geograficamente brasileiro do Sr. Malba Tahan podia ser objeto, evidentemente, de uma pesquisa de Freud. Trata-se, civilmente, de um homem que nasceu no Brasil, de um engenheiro com o seu título científico brilhantemente conquistado em nossa Escola Politécnica, membro de antiga e ilustre família brasileira. Entretanto, o Sr. Malba Tahan tem uma figura de árabe; surgiu para as letras tendo no pensamento os desertos, as tamareiras, as tendas estremecendo ao vento, sacudidas pelas tempestades de areia. E quando abandona as terras bárbaras e familiares do seu sonho, é para consagrar-se na vida prática ao estudo e ao ensino das matemáticas, que constituem, como se sabe, uma ciência árabe, ou, pelo menos, que o árabe tomou como sua. Quantos séculos terão dormido no sangue deste legítimo descendente de portugueses os hormônios da sua longínqua procedência semita? Por que só agora, ao fim de tantas gerações brasileiras do mesmo ramo lusitano, surgiu, para a atividade da inteligência, este mouro que os árabes deixaram na península Ibérica, e que de repente acorda como a princesa adormecida no bosque, ou como aquele monge que escutava o pássaro encantado, com as mesmas tendências de espírito, como se tivesse chegado ontem de Basra ou de Bagdá?

A esse árabe do Brasil estava destinada, todavia, a realização de um dos maiores empreendimentos das literaturas orientais porventura tentados fora do Oriente. É propósito seu dotar as nossas letras brasileiras e, ao mesmo tempo, as letras árabes, com uma coletânea no gênero das "Mil Histórias", e que terá a denominação de *Mil histórias sem fim*. Serão contos de inspiração oriental, ligados entre si, mas constituindo, como naquelas grandes coleções do Oriente, narrações isoladas pelo assunto. Serão, diria um árabe, como um soberbo colar de mil pérolas, mas usadas cada uma separadamente. Serão, finalmente, uma grande joia formada por um milheiro de joias miúdas.

Esse pensamento contém o programa para toda uma vida, inicia-se agora o autor, com a polimorfia do seu talento, e o gosto, e a altura, e a febre de espírito, e o entusiasmo festivo, e a imaginação viva, com os atributos, em suma, que se requerem para empresa tão pesada e tão longa. Levá-la-á ele a termo? Não esmorecerá em caminho? Descerá este peregrino do seu camelo antes de divisar no horizonte os santos minaretes de Meca?

Ninguém pergunta à caravana qual será o seu roteiro no areal. O deserto, como o oceano, tem rumo mas não tem estradas. E eu, vendo partir este beduíno atrevido e cheio de fé, e sabendo que já não estarei vivo quando ele voltar, mas certo de que fará vitoriosamente a travessia — eu, pondo as mãos trêmulas sobre a sua cabeça turbilhonante de sonho, limito-me a como um xeque quase cego que já não vê o fogo diante da própria tenda dar-lhe a voz de partida, lançando-lhe a bênção patriarcal em nome da nossa tribo:

— Alá te conduza, filho do deserto! E que as fontes dos oásis deem água límpida para a tua sede e, à tua chegada, abram no alto, para o teu repouso, um verde teto de folha e estendam, no chão, para o teu sono, um fresco tapete de sombras.

Avatar

OLAVO BILAC

Numa vida anterior, fui um “xeque” macilento
E pobre... Eu galopava, o albornoz solto ao vento.
Na soalheira candente; e, herói da vida obscura,
Possuía tudo: o espaço, um cavalo e a bravura.

Entre o deserto hostil e o ingrato firmamento,
Sem abrigo, sem paz no coração violento.
Eu namorava, em minha altiva desventura,
As areias na terra e as estrelas na altura.

Às vezes, triste e só, cheio do meu desgosto,
Eu castigava a mão contra o meu próprio rosto,
E contra a minha sombra erguia a lança em riste.

Mas o simum do orgulho esfumava o meu peito
E eu galopava, livre, e voava, satisfeito
Da força de ser só, da glória de ser triste!

Em nome de Alá, Clemente e Misericordioso

Na página seguinte (se Alá quiser!) vão ter início as prodigiosas lendas que constituem o livro das *Mil Histórias sem Fim*.

Recordai, irmão dos árabes!, antes de ser iniciada a leitura da primeira linha, recordai, inspirado pela vossa cativante generosidade, os versos famosos do poeta:

> *A pérola, que é uma das coisas mais preciosas deste mundo, nada perde em seu valor por causa da condição vil do pescador.*

E mais:

> *Tudo, exceto Deus, é perecível e efêmero; a verdadeira perfeição só existe em Deus!*

Lembrai-vos, portanto, meu amigo, que eu nada sou, nada tenho, nada posso e nada pretendo.

Allah badick, ya sidi! (Alá vos conduza, senhor!)

MALBA TAHAN
Bagdá, 5 da Lua de Moharrã de 1309.

1ª Narrativa

História singular de dois reis amigos e das tristes consequências de uma aposta extravagante entre eles firmada.
Das Mil histórias sem fim *é esta a primeira! Lida a primeira restam, apenas, novecentas e noventa e nove...*

Estava escrito que o generoso Soleiman, rei de Bássora, e o grande Ismail, rei de Kabul, seriam amigos inseparáveis apesar da diversidade completa de gênio e caráter que os deveria desunir.

Soleiman, apelidado pelos árabes *Al-Adl* (o Justo), era um dos monarcas mais bondosos e tolerantes que hão reinado. Preocupava-se exclusivamente em socorrer os infelizes e distribuir justiça entre os seus súditos. Incapaz de praticar violência ou ato de tirania, o rei Soleiman chegava muitas vezes a adoecer quando, pela força das circunstâncias, era obrigado a assinar uma sentença de morte.

Exatamente o contrário era o rei Ismail, que sempre se mostrava impiedoso e perverso. Sua preocupação constante era inventar castigos, perseguir os humildes e guerrear as tribos fracas e inofensivas. O rei Ismail (Alá se compadeça dele!) jamais praticou um ato de clemência ou generosidade!

Não impedia o antagonismo de gênios que esses dois monarcas se ligassem pelos laços da mais pura amizade. Frequentemente o rei Ismail deixava o seu palácio de Kabul e vinha com grande caravana, através da Pérsia, em visita ao seu amigo dileto

Soleiman, ao lado de quem se deixava ficar muitos meses esquecido de seu povo e de seu trono.

Um dia achavam-se os dois em amistosa palestra quando o rei Soleiman — que não perdia oportunidade para exaltar as boas qualidades de seu povo — contou ao rei Ismail que os árabes eram muito imaginosos para engendrar histórias. Qualquer pessoa — do mais sórdido mendigo ao mais rico vizir — sabia narrar lendas e contos maravilhosos que prendiam a atenção dos espíritos mais avessos a este gênero de devaneio.

— Não acredito — contraveio o rei Ismail. — Há de perdoar, mas não creio que os seus súditos possuam imaginação tão fecunda e brilhante!

— Pois eu insisto no que afirmo — retornou o rei Soleiman. — E se quiserem uma prova do que assevero, nada mais simples: da varanda deste palácio chamarás um homem qualquer que passe ao alcance do teu apelo. Veremos se ele, seja quem for, não será capaz de narrar-vos uma história interessante, digna de ser ouvida pelos mais altos cultos e exigentes!

— Aceito a proposta — acudiu, em tom sombrio, o soberano de Kabul. — Exijo, porém, uma condição: se o súdito chamado não souber contar-nos uma história ou uma anedota qualquer, será degolado, aqui mesmo, em presença de todos nós.

Depois de meditar um momento, respondeu o bondoso rei Soleiman:

— Concordo plenamente com a exigência. Quero porém uma compensação: se a pessoa aqui trazida deliciar-nos com uma narrativa interessante e atraente, receberá por tua ordem, do tesouro de Kabul, uma recompensa de dois mil sequins de ouro!

— Declaro que aceito a aposta não obstante a condição — assentiu o rei Ismail. — Se o árabe, o que é pouco provável, distrair-nos com uma história digna de ser ouvida por uma pessoa nobre e culta, receberá de mim o valioso prêmio que acabas de estipular! Palavra de rei. — E acrescentou enérgico: — Não dispensarei, entretanto, a punição tremenda se alguém nela incorrer, confessando-se incapaz de narrar a história pedida!

Os nobres que se achavam no salão, informados da singular aposta dos dois soberanos, ficaram grandemente interessados em ver-lhe o desfecho.

A fim de que fosse feita a escolha do herói anônimo que desempenharia, no caso, o papel mais importante, os dois monarcas aproximaram-se da larga varanda do palácio e começaram a observar os populares que caminhavam pelas ruas despreocupadamente.

A atenção do rei Ismail foi despertada por um árabe que se dirigia apressado, de cabeça baixa, em direção do Eufrates.

— Quero ouvir aquele que ali vai! — declarou o rei Ismail. — Que o tragam já à nossa presença.

Transmitida a ordem a um dos oficiais do palácio, o transeunte foi imediatamente levado ao palácio real e conduzido à presença dos soberanos.

O desconhecido que por infelicidade atraíra a atenção do perverso rei de Kabul era um muçulmano1 de vinte anos talvez. A fisionomia serena, o olhar suave e terno refletiam nitidamente o homem bom e leal. Vestia-se com apurado gosto e a maneira delicada e respeitosa como saudou os soberanos e os nobres maometanos denotava pessoa de fino trato e, certamente, de elevada posição social.

— Jovem muçulmano! — começou o rei Soleiman. — Pedi que viesses à minha presença porque preciso do teu precioso auxílio para vencer uma aposta, aliás simples, que acabo de fazer com o meu amigo, aqui presente, Ismail, rei de Kabul. Vais ser submetido a uma prova, e tamanha é a certeza de que te sairás dela com garbo, que não tive dúvidas em aceitar a proposta do meu antagonista. As condições impostas são estas: se contares aqui, diante de todos nós, uma história interessante e atraente, receberás dois mil sequins de ouro; se a tua narrativa não for de nosso agrado nada receberás e voltarás como vieste; se, finalmente, por uma fatalidade, e nisso eu não acredito, não souberes contar-nos história alguma, serás, por ordem do rei Ismail, degolado imediatamente.

Fez-se no grande salão do palácio de Bássora profundo silêncio. Reis e nobres tinham os olhares voltados para o jovem que parecia encarar a situação com calma e coragem.

— Vamos — ordenou em tom amistoso o rei Soleiman. — Podes começar a tua narrativa. Estamos ansiosos por ouvir a encantadora história que nos vais narrar para conquista do prêmio e vitória de minha aposta.

— Rei generoso! — respondeu o moço. — Que Alá vos conserve feliz até o fim dos séculos. Peço-vos perdão, mas não posso atender ao vosso pedido! — E, diante do pasmo geral dos ouvintes, acrescentou: — Sinto-me forçado a confessar que não me lembro de história alguma digna de ser narrada a tão seleto auditório.

O rei Soleiman, ao ouvir a inesperada resposta, pôs-se pálido de espanto. O bondoso monarca não podia esperar num jovem, que parecia educado e culto, tão completa ausência de um bem comum aos árabes de qualquer classe social.

O rei Ismail sorriu satisfeito diante da infelicidade do moço.

— Pensa melhor, meu rapaz — aconselhou o rei Soleiman. — Não te constranja o falares diante dos que aqui estão. Nem te quero mal e desejo que te saias bem desta prova que nada tem de penosa para um filho do Islã. Se não te lembras de uma história conta-nos um caso qualquer ocorrido com algum amigo teu, um incidente digno de nota, ou mesmo uma anedota, por mais breve que seja, para te desembaraçares do aperto em que, sem querer, te pus.

— *Attal Allah unnak ia maulayi*! (Que Alá prolongue a tua vida, ó rei!) — respondeu o rapaz. — Peço-vos humildemente perdão, ó emir! Eu não sei de caso algum ocorrido com amigo meu, nem conheço a mais simples e banal anedota!

— Narra-nos, então, um episódio qualquer de tua vida! — volveu o rei Soleiman aflito e já temeroso da sorte do pobre muçulmano.

— Rei afortunado! — retorquiu o jovem, com serenidade e segurança. — Não me vem à mente, no momento, episódio algum da minha vida!

— Não vale a pena insistir, ó Soleiman! — interveio friamente o rei Ismail. — Chama logo o teu carrasco. Perdeste, positivamente, a aposta. — E, num riso cheio de perversidade, acrescentou: — Bem te dizia, vaidoso amigo, que teus súditos não têm as ideias e a imaginação que supunhas! Por tua culpa vai este "jovem silencioso" entregar o pescoço ao alfanje do nosso Massuf.

— Nem tudo está perdido — retorquiu o rei Soleiman. — Vou fazer a última tentativa.

E, voltando-se para o jovem que se conservava de pé em atitude respeitosa, tranquilo e indiferente, assim falou:

— Meu filho! Não quero absolutamente que por um mau capricho do rei de Kabul sofras o castigo de morte! Ficarei penalizadíssimo se for obrigado a cumprir o juramento que fiz! Em desespero de causa faço um último apelo à tua imaginação: conta-nos um caso ou um episódio qualquer, inventado ou não, possível ou inverossímil! — E julgando, talvez, que seu apelo não fosse bem compreendido pelo jovem, ajuntou: — Se, por qualquer motivo, não quiseres fazer a tua narrativa em prosa, poderás, sem o menor receio, usar a linguagem admirável dos poetas — o verso! Darás, se inspiração tiveres, forma poética a uma das lendas ou tradições populares de nosso país. Duplo será o nosso prazer em ouvir-te. Não há, realmente, um árabe inteligente que não se arrebate e não se comova ao se deliciar com um conto aprimorado pelas irresistíveis seduções da poesia. Se estás triste, esquece, por um momento, as tuas tristezas. Escuta o conselho do poeta:

As tristezas desta vida
Eu as deixo e abandono:
De dia, por muita lida;
De noite, por muito sono![2]

— Muito agradeço a vossa bondade e o interesse generoso que mostrais pela minha humilde pessoa! É, entretanto, com profunda mágoa, que me vejo mais uma vez obrigado a declarar que estou completamente deslembrado de qualquer caso ou do mais vago episódio verídico ou fantástico. Cabe-me muito bem o apelido que há pouco o rei Ismail lembrou para mim. Sou, infelizmente, o "Jovem Silencioso".

Compreendendo o rei Soleiman que o moço — ao contrário do que era de se esperar — obstinava-se em não fazer narrativa alguma, muito a contragosto fez com que um dos ulemás[3] da corte lavrasse, segundo determinava a lei, a sentença de morte.

Foi chamado, então, o gigantesco Massuf, carrasco de Bássora, que raras vezes exercia o seu execrando ofício.

Notas

1 Muçulmano — nome derivado de *mauslim*, "aquele que se resigna à vontade de Deus". Os muçulmanos são os que seguem a religião do Islã, fundada por Mafoma em 672. O islamismo apresenta cerca de 240 milhões de adeptos, isto é, 14% da população total do globo. *Islã*, forma derivada do verbo *as lamas*, significa confiar cegamente, resignar-se. O substantivo *Islã* designa igualmente o conjunto de países muçulmanos.

2 Esta trova é de Bastos Tigre.

3 Ulemá — vocábulo derivado do árabe Ulamá, plural de Alem. Significa sábio, douto, erudito. (B. A. B.)

2ª Narrativa

Continuação da história dos dois reis amigos e do "Jovem Silencioso" que não sabia contar episódio algum de sua vida. Como surgiu um sábio rabi e o caso misterioso que depois ocorreu.
Das Mil histórias sem fim *é esta a segunda! Lida a segunda restam, apenas, novecentas e noventa e oito...*

Chegado o carrasco, iniciaram-se os preparativos para a execução.

Um dos juízes mais ilustres de Basra leu em voz alta a sentença do rei Soleiman, justificando-a com algumas citações do livro de Alá.[1] Foi ela ouvida por todos os religiosos em silêncio.

O ajudante do carrasco começou, em seguida, a tirar as vestes do condenado, que deveria ficar vestido com um pequeno calção.

Descobriu o algoz que o desditoso jovem trazia ao pescoço, presa por uma corrente de ouro, uma pequena medalha quadrangular. Massuf arrancou-a e foi entregá-la ao rei, que verificou tratar-se de uma curiosa peça com a forma de um losango em que se percebia complicada inscrição em caracteres hebraicos.

— Jovem e desditoso muçulmano! — exclamou pesaroso o rei de Bássora. — Apesar dos esforços que fiz em teu favor, foste condenado. Poucos momentos te restam de vida. Dentro de alguns minutos comparecerás diante d'Aquele que é o Juiz Supremo de todos nós! Quero pedir-te o último favor: Dize-me, ao menos, qual é a origem desta medalha e o que significa a inscrição que ela nos mostra.

— Rei! — volveu o moço com altivez. Não posso infelizmente atender ao vosso pedido! O mesmo motivo que me impediu há pouco de contar uma história ao rei Ismail, impede-me agora de esclarecer a origem dessa medalha!

— Qual é esse motivo? — perguntou o rei Soleiman.

— Um juramento, ó rei! — respondeu o condenado.

— Por Alá — exclamou o soberano de Bássora. — É extraordinário esse caso! Não hesitaste em morrer unicamente por causa de um juramento? — E, voltando-se para o seu grão-vizir, o rei Soleiman ordenou, sem hesitar: — Determino que seja adiada, por algumas horas, a execução desse condenado! Desejo esclarecer o mistério desta medalha e a razão do juramento que esse jovem não quis violar nem mesmo para salvar a própria vida!

El-Mothano, grão-vizir do rei Soleiman, era homem dotado de agudeza de espírito, grande cultura, e tinha, além disso, invejável prestígio em Bássora.

Consultado pelo rei sobre o caso da medalha, aconselhou ele ao monarca ouvisse, antes de tudo, a opinião de um velho rabino2 chamado Simão Benaia Benterandim, morador no bairro judeu.

Ordenou o rei Soleiman que o israelita fosse intimado a comparecer imediatamente a sua presença.

Momentos depois, acompanhado de um dos oficiais da corte, dava entrada no grande salão o sábio rabino que o rei de Bássora, com tão grande urgência, queria ouvir.

Rabi Simão, uma das figuras mais conhecidas e estimadas em Bássora, era um homem que bem merecia o respeito, a amizade e o acato de um povo inteiro.

Respeitavam-no os grandes pela sua modéstia, os maus pela integridade de seu caráter, os pobres pela bondade de seu coração. Os seus conselhos eram alívio para os atribulados, incentivo para os fracos, temor para os rebeldes. A sua palavra, onde quer que soasse, determinava o silêncio de todas as vozes, a atenção de todos os ouvidos.

Escaveirado, todo acurvado, o andar incerto, os trajes modestos, ele era, sem o querer, um dos vultos de grande prestígio na cidade.

À luz de seu espírito, os mais intrincados problemas tinham imediata e precisa solução. Decifrador emérito dos enigmas da vida, era o homem dos grandes momentos, das grandes angústias.

Ao chegar ao palácio já encontrou repleto o salão de audiências. Todos queriam ouvir e ver o homem de quem dependia a sorte do desafortunado árabe.

— Sei, ó rabi! — começou o rei Soleiman — que és um homem honesto e sábio! Sei também que és um justo e que teus lábios, em caso algum, se abriram para deixar passar uma mentira! A verdade deve ser dita muito embora ela encerre elogio feito a um infiel.3

O douto judeu inclinou-se respeitoso, como se quisesse agradecer os elogios que o grande soberano lhe fazia publicamente.

Depois de breve pausa, o monarca prosseguiu:

— Peço-te, ó ilustre filho de Israel!,4 que me respondas sempre a verdade a todas as perguntas que eu agora te vou fazer!

— Juro por Abraão que só direi a verdade! — respondeu o rabi, estendendo, solene, a mão.

O rei de Basra apontando, então, para o jovem condenado, perguntou ao judeu:

— Conheces este rapaz?

— Não o conheço, ó rei! — respondeu o rabi.

— Já o viste casualmente em algum lugar?

— Também não, ó rei! E posso garantir a Vossa Majestade que este jovem não é amigo, nem é ligado por laço de parentesco a pessoa alguma de minha família!

Voltando-se em seguida para o condenado, o rei perguntou-lhe:

— Conheces este venerável e sábio rabi?

— Devo dizer a Vossa Majestade — respondeu o interpelado — que não o conheço, e é a primeira vez que vejo este ilustre ancião.

Terminado este rápido interrogatório, o rei contou ao rabi Simão tudo o que ocorrera, momentos antes, naquele salão, desde a aposta singular feita com o rei de Kabul até a descoberta da original medalha hebraica que o condenado trazia, como se fosse um talismã, presa por uma forte corrente de ouro.

— É meu desejo, ó rabi! — continuou o rei — que me traduzas a inscrição que esta medalha contém, pois acredito que a essa legenda judaica se prenda o silêncio que levou este jovem a ser condenado à morte.

O judeu tomou a medalha que lhe foi apresentada e mal havia observado uma das inscrições, transfigurou-se como se o assaltasse incontida emoção. Tremiam-lhe as mãos e o rosto cobriu-se de mortal palidez. E foi com voz balbuciante — que denunciava grande angústia — que ele falou:

— Rei magnânimo e justo! Posso adiantar, desde já, que um dos casos mais extraordinários de que teve notícia o mundo acaba de ocorrer diante dos vossos olhos! — No imponente salão, o silêncio deixava ouvir a respiração ofegante e penosa do velho rabi, que assim continuou: — Por esta pequena medalha consegui descobrir que este jovem se chama Imedin Tahir Ben-Zalã, é natural de Damasco e aqui se acha há poucos dias. E se Vossa Majestade permitir que eu diga ao jovem Imedin algumas palavras em segredo, ele, livre de todo e qualquer juramento, contará aqui mesmo, diante de todos, uma história tão espantosa que causará aos nobres muçulmanos a mais forte admiração e o maior assombro.

— Consinto! — exclamou o rei Soleiman, que mal podia dominar a curiosidade.

O rabi aproximou-se, então, do jovem Ben-Zalã e disse-lhe, em segredo, algumas palavras ao ouvido.

Os muçulmanos que se achavam no rico salão do palácio de Soleiman presenciaram, nesse momento, uma cena curiosa e comovente.

Ao ouvir a misteriosa revelação do judeu o condenado caiu de joelhos e, cobrindo o rosto com as mãos, começou a chorar copiosamente.

— Por Alá! — exclamou o rei Ismail intrigadíssimo com o que via. — Não posso compreender esse mistério! Exijo que Imedin e este judeu deem imediatamente uma explicação completa deste caso!

Ergueu-se Imedin, e mal dominando a intensa emoção de que se achava possuído assim falou:

— Alá vos conserve, ó rei! Estou agora completamente desligado do juramento que há pouco me prendia ao silêncio, e posso, portanto, contar-vos uma das muitas e belíssimas lendas que aprendi nas longas viagens que empreendi pelo mundo!

— Ouvirei mais tarde — atalhou o rei Ismail — todas as lendas maravilhosas que me quiseres narrar; as lendas formam, bem o sei, o maior tesouro da nossa literatura. Agora, entretanto, faço o maior empenho em ouvir uma explicação completa deste misterioso caso da medalha, a razão desse juramento descabido que fizeste, e a significação que tiveram, afinal, as palavras ditas, em segredo, pelo rabi. Desejo, enfim, ó jovem!, ouvir uma narrativa minuciosa da tua vida e de tuas aventuras pelo mundo.

— Escuto-vos e obedeço-vos — respondeu Imedin. — Vou contar-vos a história da minha vida e vereis como se explicam perfeitamente todos os fatos, de certo modo incompreensíveis, que há pouco aqui ocorreram. Sou forçado, porém, a confessar que a minha vida se acha envolvida numa trama inextricável de mil histórias sem fim...

O rei Ismail, que tudo ouvira e observara com a maior atenção, aproximou-se igualmente do jovem Imedin e disse-lhe:

— Confesso-te, meu amigo, que me considero desde já inteiramente vencido na ousada aposta que fiz, há pouco, com o rei Soleiman. Pagarei com satisfação o prêmio prometido. A curiosidade é, porém, muito forte em meu espírito. Espero, portanto, ouvir o relato das aventuras que te forçaram a proferir o tal juramento que se tornou inviolável até diante da ameaça de morte!

E para atender ao pedido do rei, Imedin Ben-Zalã iniciou o seguinte relato:

Notas

1 Livro de Alá — denominação dada ao Alcorão, livro sagrado dos muçulmanos, composto de 114 capítulos, ou suratas, divididos em versículos. Segundo a crença dos árabes, foi revelado por Deus a Mafoma por intermédio do arcanjo Gabriel. (B. A. B.)

2 Doutor israelita: o que explica a lei sobre os hebreus. (B. A. B.)

3 Para o rei Ismail o rabi Simão era um infiel. Os muçulmanos dividem os infiéis em três grupos principais: judeus, cristãos e idólatras. (B. A. B.)

4 Israel — palavra hebraica que significa "forte contra Deus". Sobrenome que, segundo a Bíblia, foi dado a Jacó depois de sua luta com um anjo. (B. A. B.)

3ª Narrativa

Imedin Tahir Ben-Zalan conta sua vida e suas aventuras. Por que foi ele à casa do xeque Abder Ali Madyã e as pessoas que lá encontrou. O que disse o xeque a um velhote que oferecia um escravo e as peripécias que depois se seguiram.
Das Mil histórias sem fim *é esta a terceira! Lida a terceira restam, apenas, novecentas*
e noventa e sete...

I

Meu nome é Imedin Tahir Ben-Zalã e sou natural de Damasco.

Muito cedo tive a infelicidade de perder meu pai, e achei-me, com minha mãe e meus irmãos, em completo desamparo. Um bom mercador, que morava nas vizinhanças de nossa casa, tomou-me sob sua proteção. Graças ao inestimável auxílio desse generoso protetor, obtive meios que me permitiram estudar com os mestres e adquirir, assim, os variados conhecimentos que hoje possuo e de que me tenho valido nos transes mais difíceis da vida.

Há cerca de dois anos, mais ou menos, a marcha serena de minha existência foi perturbada por um acontecimento imprevisto. Salomão Moiard, assim se chamava o meu pai adotivo, obrigado a partir para Jerusalém, em virtude de um chamado urgente, deixou os haveres que possuía, inclusive uma pequena caixa na qual se guardavam mil sequins de ouro. Recomendou-me que zelasse com o maior desvelo pelos seus bens e riquezas, pois só ao fim de um ano talvez, liquidados os seus negócios na Palestina, poderia regressar dessa longa jornada ao país dos israelitas.

Jurei que tudo faria para corresponder à honrosa confiança que ele em mim depositara; e, na manhã seguinte, depois da primeira prece,1 tive a tristeza de vê-lo partir com grande caravana de mercadores judeus.

O velho Salomão deixara, para as minhas despesas, quantia razoável com a qual eu poderia viver, sem privações, durante um ano. Resolvi, entretanto, auxiliar minha mãe, como sempre fizera — a fim de atenuar-lhe a penúria em que vivia —; deliberei obter um emprego que me permitisse, embora com sacrifício, aumentar-lhe os recursos pecuniários.

II

Naquele tempo vivia em Damasco um opulento mercador chamado Abder Ali Madyã, cujo nome brilhava à luz do prestígio que os muçulmanos atribuem aos que têm ouro em abundância, oásis e caravana. Informado de que o xeque2 procurava um secretário, apresentei-me em sua nobilíssima residência, à hora marcada, esperançoso de obter o vantajoso emprego.

Recebeu-me à porta um escravo baixote, vestido à moda síria, e, tendo declarado a razão da minha presença, fui conduzido até um belo salão onde deparei várias outras pessoas que aguardavam a audiência do xeque. Entre os presentes, reconheci os incorrigíveis Annaf e Mohammed, "o gago", escribas de poucas luzes, que se tornaram famosos entre os damascenos em razão da falta de discrição e honestidade com que desempenhavam as tarefas mais sérias de que se encarregavam.

A fantasia popular não exagerava ao atribuir ao poderoso Abder Madyã uma opulência quase lendária. A sua deslumbrante moradia, cuja construção obedecera ao plano de um escravo cristão, ostentava o luxo e a riqueza de um serralho imperial; havia por toda parte valiosas alcatifas, e no salão poligonal em que nos achávamos, as paredes internas eram cobertas por figuras geométricas coloridas, entrelaçadas em harmoniosas combinações. Menos deslumbravam os adornos e pedrarias do que a arte e o fino gosto com que tudo ali era arranjado.

Quando o xeque surgiu, como um príncipe das *Mil e uma Noites,* acompanhado de seus íntimos e auxiliares, levantamo-nos respeitosamente e fizemos o *salã*.3 Com um ligeiro aceno, o fidalgo agradeceu-nos a saudação.

Um velhote nervoso, de olhos embaciados, que se pusera a um canto, depois de curvar-se várias vezes desmanchando-se em repetidos salamaleques, aproximou-se do xeque e entregou-lhe um documento que trazia em rolo, preso por uma fita azulada.

O xeque tomou o pergaminho, desenrolou-o lentamente, e sobre os vagos caracteres ali traçados correu displicente o olhar.

Ualá![4] — exclamou irritado devolvendo ao velhote o documento. — Não me convém a sua proposta. Acho-a irracional. Seria um absurdo que eu comprasse um escravo, por um preço elevado, sem adquirir nessa transação a pele desse escravo! Que disparate! Onde já se viu semelhante despautério?

— Xeque dos xeques! — acudiu pressuroso o velhinho, estorcendo os dedos. — Trata-se, como já vos disse mais de uma vez, de um caso excepcional. A pele do escravo a que me refiro não lhe pertence. Posso contar-vos...

— Pelas barbas de Mafoma! — atalhou colérico o xeque. — Não me interessa saber como se chegou a essa situação inverossímil e anti-humana; não me animo, tampouco, a ouvir a história desse escravo martirizado pela servidão! Já estou farto de casos excepcionais! Qualquer mendigo da estrada, em troca de um osso, é capaz de contar vinte casos excepcionais! Os homens de imaginação baratearam o impossível. Só os fatos sobejamente vulgares e rotineiros é que a mim me parecem realmente excepcionais!

E, isso dizendo, voltou-se para um dos homens que se achavam perfilados, aguardando ordens, e murmurou secamente:

— Leva daqui este importuno!

Acompanhei, ainda, com o olhar, o velhote nervoso que se retirava aos trancos, levado pelo braço hercúleo de um guarda. Sua figura pareceu-me cheia de mistério. Que estranho caso seria aquele do escravo que não era dono da própria pele? Algum dia — pensei — mesmo que seja para tanto obrigado a contar todos os pelos de um camelo, hei de descobrir o paradeiro desse singular muçulmano para dele ouvir aquele "caso excepcional" a que o xeque não dera a menor importância.[5]

III

Tendo saído o velhote de roupa cinzenta, ficaram, apenas, aguardando a decisão do xeque, os que pretendiam o lugar de secretário. Éramos em número de quatro: eu, os dois escribas desonestos (aos quais já me referi) e um tipo pálido, alto como uma girafa e muito magro, que não cessava de sacudir a cabeça para baixo e para cima, como se quisesse, por antecipação, concordar com alguma coisa que ia ouvir de alguém.

— Sou avesso à prática da injustiça — começou o xeque — e não quero, pois, errar na escolha de meu novo secretário. Conforme costumo proceder em tais casos, vou submetê-los a uma pequena prova, que será simples e sumária. Aquele que se sair com mais brilho e revelar maior habilidade será por mim escolhido. Ali, sobre aquela mesa, está o material necessário. Cada um dos candidatos poderá escrever a seu bel-prazer o que muito bem entender, contanto que revele inteligência e cultura!

Ao perigoso Annaf, que se achava na frente, cabia, no caso, a iniciativa. Aproximou-se da mesa, tomou do cálamo e de uma folha em branco e, depois de sentar-se sobre uma almofada, escreveu várias linhas, pondo nessa operação os cuidados de um calígrafo.

— Leia! — ordenou o xeque.

O escriba, que usava habitualmente do cinismo como recurso seguro de êxito, leu com voz clara, numa cadência irritante, as linhas que traçara.

> *Glorificado seja Alá, o Altíssimo! No país do Islã*6 *não há homem mais generoso, mais belo, mais sábio e mais valente do que o grande xeque Madyã! O nome desse genial muçulmano...*

— Não me agradam — interrompeu com azedume o xeque — os elogios derramados como os que aí escreveste. Abomino os bajuladores. A tua gabação, envilecida pela sabujice, cai sobre mim como a baba de um camelo. Vai-te daqui e não me procures mais. Lembra-te de que eu sei fazer com que os impertinentes amarguem o arrependimento das importunações com que me irritam!

Regozijei-me intimamente com tal decisão. Foi o caviloso escriba agarrado, num abrir e fechar de olhos, e arrastado para fora do salão pela férrea musculatura de dois guardas autômatos. Percebi que houve, a seguir, um tumulto, acompanhado de ruídos surdos, no corredor; veio-me a espírito a suspeita de que ele teria sido impiedosamente espancado pelos numerosos servos. O regozijo, que a princípio sentira, transformou-se, por causa daquele sucesso, na mais grave apreensão.

Mohammed, "o gago", foi o segundo a apresentar a prova exigida. Tendo escrito duas ou três linhas demonstrativas de sua capacidade, entregou-as ao xeque julgador.

Mal relanceara sobre elas os seus olhos espertos, enfureceu-se perigosamente o rico Madyã.

— Miserável, filho de miseráveis! — gritou enviperado. — Detesto, já o disse, a sabujice dos cínicos tanto quanto execro os tipos grosseiros e mal-educados! Isto que escreveste é uma estúpida infâmia! Por Alá! Vai-te, antes que eu perca por completo a calma.

O temido senhor não teve necessidade de repetir a ordem. Um agigantado cameleiro agarrou pelas costas o grosseiro candidato e, com um empurrão violentíssimo, atirou-o para fora da sala, sem cuidar da desastrosa posição que lhe remataria a queda. Ouvi novamente ruídos surdos e prolongados no corredor; desta vez, entretanto, não tive dúvidas sobre o tremendo espancamento com que os servos castigavam o segundo pretendente.

A má sorte de Annaf e Mohammed não perturbou a calma e a serenidade do tal homem pálido, magro, que sacudia a cabeça. Com penalizante humildade, sem desligar dos lábios um lastimável sorriso, que traduzia a mais profunda resignação, aproximou-se do xeque em cujas mãos depositou uma pequena folha, na qual rabiscara alguns versos de notável poeta árabe.

— Imbecil que és! — exclamou o xeque, depois de ler a prova e tomado de vivo rancor. — A tua ignorância é revoltante! Nos versos de Montenébbi7 que aqui escreveste, há três acentos trocados e duas sílabas erradas! É incrível que um árabe tenha a ousadia de estropiar, assim, o mais admirável poema do Islã! — E a transbordar de empáfia, ajuntou: — Sei de cor os cinco mil versos de Antar, as canções de Nobiha, de Tarafa e Zobe. Já li cem vezes as obras dos antigos e modernos escritores árabes. Não posso admitir, portanto, que um imbecil, por ignorância, estropie torpemente as joias mais caras do grande Montenébbi!

E vi penalizadíssimo ser aplicado ao terceiro infeliz o mesmo tratamento brutal dispensado aos dois primeiros: seguiram-se, como das outras vezes, barulhentos distúrbios no fatídico e temeroso corredor. Voltou-se, a seguir, o xeque para os amigos que o rodeavam e proclamou com irritante prosápia:

— Viram a audácia deste chacal insolente que fiz expulsar agora de minha casa? Teve a petulância de me oferecer, como coisa sua, fruto de sua acanhada inteligência, um punhado de lindos versos que o imortal Montenébbi escreveu, em Chiraz, para obter a simpatia e proteção do poderoso Adod-ed-Daula. O infeliz plagiário não se lembrou de olhar para os seus pés antes de submeter a julgamento a sua desastrosa prova.

E o enfatuado xeque apontou para o grande e rico tapete azul-claro, adornado com legendas admiráveis, que cobria a parte central do aposento. Destacavam-se, no centro do tal tapete, versos admiráveis de Montenébbi:

Quis apossar-me do Tempo
mas o Tempo, imaginário,
não se deixou alcançar.
Procurei a eternidade,

pensando que, na Ciência,
tudo pudesse encontrar.
Mas voltei de mãos vazias,
lamentando os dias meus,
estudei e, logo, a Dúvida
*veio afastar-me de Deus...*8

— Que tapeçaria magnífica! — comentou com voz amolentada um tipo gorducho, de rosto redondo, que parecia íntimo do xeque. — É de estranhar que o velhote não tenha reparado nela, depois de ter permanecido nesta sala, à nossa espera, durante tanto tempo.

— Isso acontece com os indivíduos vulgares, meu caro Rhaif — acudiu com vivacidade o xeque. — Olham, mas não veem; ouvem, mas não escutam; falam, mas não dizem nada; correm, mas não se afastam. Conheci, em Homs, um aguadeiro tão distraído que de uma feita, ao sair da mesquita, esqueceu as babuchas e enrolou os pés no turbante! Ao chegar a casa, a esposa espantou-se e disse: "Que loucura é essa, meu marido? Olha o que fizeste com o teu turbante!" Respondeu o aguadeiro olhando para os pés: "Foi distração minha! Pensei que tomara, por engano, as calças do velho cádi!"

A citação daquele caso — que me parecia uma frioleira sem sentido e sem cabimento — fez rir gostosamente o gordo Rhaif. Todos os outros xeques desmancharam-se, também, em estrepitosas risadas. Sentia-se que a intenção dos presentes era lisonjear e agradar o dono daquele palácio, o opulento xeque Madyã.

Que chiste poderia alguém descobrir naquela desenxabida anedota do aguadeiro?

A minha atitude discreta e serena despertou a atenção do xeque.

Fitou-me muito a sério e, fazendo transparecer certa ironia em suas palavras, disse-me com voz pausada:

— Chegou, agora, a tua vez, meu jovem amigo! Que no insucesso e no lamentável fracasso de teus antecessores possas descobrir meio mais seguro de alcançar a vitória. Queira Alá que a tua prova seja satisfatória, pois os cameleiros que me servem já estão, com certeza, fatigados de castigar atrevidos e ignorantes audaciosos! Pela sagrada mesquita de Meca! Vamos à prova!

Notas

1 As preces obrigatórias para os muçulmanos são em número de cinco. A primeira ao nascer do dia; a segunda ao meio-dia; a terceira às quatro horas da tarde, mais ou menos; a quarta ao pôr do sol, e a última à noite. A prece deve ser precedida de ablução (*ghuci*). (B. A. B.)

2 Xeque — termo de acatamento que se aplica em geral aos sábios, religiosos e pessoas respeitáveis pela idade ou pelos costumes. A denominação xeque é dada igualmente ao chefe de tribo ou agrupamento muçulmano.

3 *Salã* — quer dizer paz. É a expressão de que se servem os árabes em suas saudações. (B. A. B.)

4 *Ualá!* (por Deus!) — exclamação muito usada pelos muçulmanos. (B. A. B.)

5 A prodigiosa história desse escravo, e do velhote que o queria vender, aparecerá em outra parte desta obra e vai constituir a 273ª narrativa. (B. A. B.)

6 O *Islã*, de modo geral, significa "conjunto de países que adotam a religião de Mafoma". Atualmente esses países são: Turquia, Arábia Saudita, Irã, Afeganistão, Iraque, Iêmen, Marrocos, etc.

7 Montenébbi — poeta árabe de grande renome, nasceu em Kufa no ano de 905. Passou a sua infância na Síria e, durante vários anos, viveu entre beduínos do deserto. Muito moço ainda agitou a pequena cidade de Semawat, nas margens do Eufrates, fazendo-se passar como inspirado profeta que aparecia, no mundo, com a missão sublime de fundar uma nova crença religiosa. Fez crer a seus amigos e correligionários que recebia inspiração de anjos e espíritos ocultos e pretendeu elaborar um segundo Alcorão, que serviria de código religioso e moral para a seita revolucionária que pretendia implantar na Arábia e espalhar por todos os recantos do mundo. Foi preso pelas tropas Ikhechiditas de Homs, e só obteve liberdade depois de ter declarado que as suas ideias religiosas eram falsas e que a verdade estava contida unicamente no Islã. O apelido *Montenébbi* significa "aquele que pretendeu ser profeta". Escreveu poemas admiráveis, até hoje lidos com entusiasmo pelos árabes. Foi, em seu tempo, o poeta mais popular da Arábia. Era admirado pelos caravaneiros e temido pelos príncipes. (B. A. B.)

8 Estes versos são do livro *Pássaro de Jade*, da poetisa brasileira Sônia Regina.

4ª Narrativa

Continuação das aventuras de Imedin. O caso da palavra caucasiana que um filólogo de grande fama traduziu e explicou.
Das Mil histórias sem fim *é esta a quarta!*
Lida a quarta restam, apenas, novecentas e noventa e seis...

I

Vendo chegada a minha vez, invadiu-me invencível terror, como se houvesse surgido pela frente um fantasma de apavorante aspecto. Que deveria escrever para agradar ao incontentável xeque? Elogios? Nunca. Lembrava-me ainda do quanto penara o primeiro escriba. Insultos e grosserias? Muito menos. Trechos literários ou poesias? Seria uma imprudência de louco. Um engano numa frase, um descuido num verso, seria, para mim, desgraça completa.

Quis Alá que uma feliz inspiração me iluminasse o atribulado espírito. Tomei de uma folha de papel e nela escrevi uma única palavra: Mazaliche!

— *Ma-za-li-che!* — leu o xeque, vagarosamente, separando com cuidado as sílabas. Que quer dizer "mazaliche"?

Senti, naquele transe perigoso, que a minha salvação, no caso, dependia, exclusivamente, de um pouco de audácia. A palavra "mazaliche" tinha sido inventada, no momento, por mim; nada significava, não tinha sentido algum. Resolvido, porém, a levar até o fim a aventura iniciada de modo tão favorável, respondi com absoluta segurança:

— A palavra “mazaliche”, ó xeque generoso!, não é árabe, nem persa. É um vocábulo descoberto, faz muitos séculos, por um filólogo que estudou os vários dialetos falados pelos povos caucasianos. “Mazaliche” significa o que quiser!...

— Como assim? — interpelou-me novamente o xeque. — Qual é a tradução certa e exata para essa palavra?

— O que quiser! — reafirmei tranquilo. — Não vejo, senhor, como explicar, de outro modo, a significação de uma palavra para nós quase intraduzível. O sábio filólogo que viveu no Cáucaso...

— Basta — atalhou vivamente o xeque. Dispenso-te as explicações linguísticas. A lembrança que tiveste, ao condensar a tua prova numa única palavra, foi realmente original. Revelaste inteligência viva, cultura razoável e também muita presença de espírito. Creio que és digno de exercer as funções de secretário de um homem notável como eu!

Julguei, depois de ter ouvido tais elogios do imodesto xeque, passado inteiramente o perigo e definida, de modo favorável, a situação. Com grande surpresa, porém, o caso tomou, de repente, feição complicada e trágica.

Depois de pequeno silêncio, o xeque assim falou:

— Ser-me-á fácil verificar se disseste ou não a verdade em relação a essa palavra, “mazaliche”. Tenho aqui, em minha casa, como hóspede, há muito tempo, um filólogo eruditíssimo chamado Mostacini Thalabi, que conhece profundamente os mais complicados idiomas do mundo. Vejamos se esse sábio concorda com a tradução que apresentaste para a palavra caucasiana. Fica certo, porém, ó jovem, de uma coisa: se a tua prova, com a originalidade que parece ter, encerrar uma pilhéria, não sairás daqui com uma só costela em perfeito estado!

E depois de proferir tão grave ameaça, que me deixou estarrecido e tonto de pavor, o xeque chamou um escravo e disse-lhe:

— Que venha à minha presença o douto e eloquente filólogo Mostacini Thalabi!

Rápido como uma flecha o escravo desapareceu em busca do sábio.

“Estou perdido”, pensei. “O filólogo vai descobrir a minha audaciosa mistificação. Queira Alá valer-me nesta dependura.”

II

Momentos depois surge no salão, em companhia de um escravo, um homem de meia-idade, barbas castanhas, olhar muito vivo, rosto largo, a testa alta e mal disfarçada por um turbante farto e desajeitado, com uma grande barra verde. Era o recém-chegado o famoso filólogo Mostacini Thalabi, hóspede do palácio.

Depois de saudar delicadamente a todos os presentes, dirigiu-se ao senhor de Madyã e disse-lhe:

— Alá sobre ti, ó xeque! Que desejas de teu humilde servo?

Respondeu o xeque:

— Mais uma vez, meu bom amigo, vou apelar para os teus profundos conhecimentos linguísticos. Sei que os idiomas, vivos ou mortos, não possuem segredos que resistam à argúcia de teu espírito. Pois bem. Quero que me digas o que significa esta palavra e a língua ou dialeto a que pertence.

E o rico mercador passou para as mãos do filólogo a folha em que eu escrevera o ignorado vocábulo — *Mazaliche.*

Um sentimento de pavor invadiu-me o espírito e como que me petrificou. A máscara da palidez pesou-me sobre o rosto. Murmurei resignado: "*Maktub!*1 Alá é grande! Seja feita a vontade de Alá."

O sábio leu atentamente a palavra a que eu reduzira a minha prova. Passou a mão direita pela barba, alisando-a, displicente. Meditou alguns instantes como se procurasse coordenar ideias que pareciam quase esquecidas. E disse afinal:

— A palavra aqui escrita compõe-se de dois radicais distinhos: *mas* ou *maz,* e *aliche* ou *oiliche,* da raiz de um verbo *oili* a que se liga o sufixo *che,* indicativo de futuro. *Mazaliche* é encontradiço num dialeto falado na região do Cáucaso. A palavra é, pois, caucasiana!

Quem poderia avaliar a intensidade do meu espanto ao ouvir aquela declaração?

Feita pequena pausa, o filólogo continuou:

— Vou dar agora a significação da palavra "mazaliche". A primeira parte, constituída pelo radical *mas,* significa "aquilo que", "coisa"; a segunda, *aliche,* é um verbo: "querer", "pretender", "desejar", "preferir no futuro". A melhor tradução para *mazaliche* será, pois: "o que quiser."

— Jovem — declarou então o xeque. — A tua prova acaba de ser confirmada pela voz autorizada do nosso grande filólogo. Nomeio-te meu secretário e de hoje em diante viverás neste palácio!

Recebi a seguir, de quase todas as pessoas que nos rodeavam, provas de afeto e simpatia. Cochichou-me um sujeitinho magro, que piscava continuamente os olhos:

— Foste de muita sorte. Com habilidade alcançarás aqui riquezas incalculáveis!

Compreendi que o sábio Mostacini, movido por um sentimento de incomparável bondade, deliberara salvar-me daquela emergência inventando para a palavra "mazaliche" a complicada etimologia que causara tanta admiração ao xeque.

"Serei grato a esse homem", pensei. "A ele devo exclusivamente a vitória na prova. Quem o informara, porém, da significação que eu havia momentos antes atribuído ao vocábulo 'mazaliche'?"

Naquele mesmo dia — ao cair da noite — fui aos aposentos do filólogo a fim de agradecer-lhe o precioso auxílio que me prestara.

O erudito Mostacini recebeu-me com indisfarçável alegria.

A sala que lhe fora destinada no palácio era larga e espaçosa. Pelo chão viam-se atiradas, ao acaso, ricas almofadas de seda.

— Já sei, meu amigo — disse-me o filólogo —, vieste aqui agradecer-me a solução engenhosa que dei hoje para o teu caso. O escravo que veio chamar-me é meu amigo e a ele devo inúmeros favores. Este escravo contou-me tudo o que se passara e solicitou o meu auxílio em teu favor. Prometi-lhe que tudo faria para salvar-te. Quando entrei, pois, no salão, já sabia o que devia responder ao xeque em relação à palavra que havias, por certo, inventado. Do contrário estarias irremediavelmente perdido.

— E esse escravo — perguntei — quem é? Por que veio ele em meu auxílio?

Respondeu-me Mostacini:

— Neste palácio vivem dezenas de indivíduos sem caráter e sem dignidade que exploram a vaidade doentia do xeque. A hipocrisia, a inveja e a perfídia se familiarizaram em todos os cantos desta casa, e o vaidoso xeque é a toda hora rodeado por cortesãos indignos, que tudo sacrificam pelo amor à cobiça. A única criatura sincera e leal que aqui conheço é esse escravo. Chama-se Meruã. É filho de um aguadeiro de Damasco e conheceu teu pai durante uma viagem que fez ao Cairo. Meruã é cristão e afirmou-me que se acha no dever de proteger-te. Se quiseres ouvir dele a narrativa de uma aventura estranha ocorrida no Egito ficarás conhecendo, de tua vida, um segredo tão estranho que talvez modifique por completo o curso de tua existência.

Tomado da mais viva curiosidade pelo caso, apertei o bom filólogo com um chuveiro de perguntas, ao que ele retorquiu sem se impacientar:

— Nada quero adiantar-te. Amanhã muito cedo mandarei chamar Meruã. E dele próprio ouvirás a mais espantosa narrativa de quantas correm no mundo. — E acrescentou: — Vou agora para o salão. O eloquente *xeque-el-medah*2 acaba de chegar. Queres ouvir as narrativas desta noite?

Agradeci ao bondoso ulemá o convite; sentia-me fatigado. Preferia ficar ali, na tranquilidade daquele belo aposento, recostado nas ricas almofadas; não me interessavam, naquele momento, as histórias fabulosas cheias de aventuras trágicas e emocionantes.

Retirou-se o sábio, deixando-me sozinho na maior ansiedade.

Que relação poderia existir entre mim e o misterioso escravo? Que estranha aventura teria ocorrido no Egito com meu pai?

A meu lado achava-se um manuscrito que o filólogo ali deixara. Olhei sôfrego para a obra. Na primeira página li assombrado:

> *Não há no mundo ninguém sem alguma tribulação ou angústia, seja ele emir, rei ou califa.*

E mais:

> *Prepara-te para sofrer muitas adversidades e vários desgostos nesta miserável vida; porque assim te sucederá onde quer que estiveres, e assim acharás, em verdade, onde quer que te esconderes.*

Quem teria escrito aquelas impressionantes palavras? Que sentido teriam elas no enredo de minha vida?

Intrigado com o caso, tomei do curioso manuscrito e consegui, sem dificuldade, ler uma história que me deixou encantado e me fez esquecer os pensamentos confusos que me agitavam.[3]

Eis a história que li:

Notas

1 *Maktub!* Estava escrito!

2 Chefe dos contadores de histórias. Veja explicação no prefácio. (B. A. B.)

3 O jovem Imedin, que tem as suas aventuras aqui interrompidas, vai reaparecer na 240ª, 241ª e 242ª narrativas. Encontramos, então, o complemento e a explicação da 2ª narrativa. Convém ler, a tal respeito, a nota final. (B. A. B.)

5ª Narrativa

História de um rei da Índia que tinha três ministros e do caso espantoso que ocorreu por causa de uma bela estátua. O que disse ao rei o terceiro-vizir para livrar-se do perigo que o ameaçava.
Das Mil histórias sem fim *é esta a quinta!*
Lida a quinta restam, apenas, novecentas e noventa e cinco...

Houve outrora, no país de Panjgur, na Índia, um rei que tinha três ministros.

Querendo um dia verificar o grau de estima e consideração em que era tido pelos seus três dignos auxiliares, ordenou o monarca fosse colocada no meio do grande parque do palácio real uma estátua[1] dele próprio e, escondido em discreto recanto, pôs-se à espera para observar o que fariam os ministros quando vissem inesperadamente aquele novo monumento.

O primeiro a chegar foi o ministro da Justiça. Ao defrontar com a estátua do rei no meio do arvoredo, parou muito sério, os braços cruzados sobre o peito, em atitude respeitosa, e examinou miudamente a obra de arte sem proferir uma única palavra, nem deixando transparecer a impressão que lhe causara o inopinado encontro.

Mal se retirara o primeiro ministro quando chegou o seu colega encarregado das Finanças e do Tesouro do país.

O digno tesoureiro do rei Malabã — assim se chamava o soberano de Panjgur — ao ver a nova estátua cobriu o rosto com as mãos e entrou a chorar desesperadamente como se grande desgosto o oprimisse.

Ao rei, que tudo observara, causou isto não pequena admiração.

— Por que teria o primeiro-ministro ficado tão sério ao ver a estátua, ao passo que para o segundo o defrontar com ela fora motivo de pranto desfeito?

Momentos depois chegou o terceiro-ministro. Era esse vizir encarregado unicamente de estudar as questões relativas às Forças Armadas e aos recursos militares do país.

O titular da Guerra, ao deparar-se-lhe a imponente figura do vaidoso monarca, entrou a rir com estrepitosas gargalhadas e de tal modo o dominaram os ataques de riso que chegou a cair de costas junto ao pedestal do régio monumento.

O rei Malabã, que além de orgulhoso era muito desconfiado — dois defeitos gravíssimos para um chefe de Estado —, ficou intrigadíssimo com a diversidade singular das impressões que sua imagem causara aos três dignos ministros de Panjgur.

A rígida gravidade do primeiro, as lágrimas do segundo e o louco gargalhar do terceiro eram enigmas que a régia sagacidade não podia decifrar, o que sobremodo o afligia.

Incapaz de refrear a curiosidade que o estranho caso lhe despertara, partiu o rei Malabã para o palácio e, tão depressa ali chegado, mandou viessem à sua presença os três ministros.

Contou-lhes o rei, sem nada ocultar, tudo o que observara e disse-lhes que queria saber o motivo por que ficara o primeiro-ministro tão sério, ao passo que o segundo chorara com abundância de lágrimas e o terceiro rira a ponto de perder os sentidos.

O ministro da Justiça, compreendendo que devia ser o primeiro a falar, assim começou, depois de saudar respeitosamente o rei:

— Deveis saber, ó rei magnânimo!, que ao ver aquela belíssima estátua, para mim até então desconhecida, lembrei-me de vós e dos grandes benefícios que tendes prestado ao povo, aos meus amigos, aos meus parentes e a mim em particular. Resolvi, pois, dirigir a Alá, o Altíssimo, uma prece, pela vossa saúde, prosperidade e bem-estar! Fiquei, como vistes, muito sério, ó rei generoso!, porque estava contrito em orações.

— Meu bom amigo! — exclamou o rei, abraçando-o. — Compreendo agora o quanto és sincero e dedicado! Jamais deixarei de retribuir a grande amizade que tens por mim.

E, voltando-se para o segundo-ministro, disse-lhe:

— Não compreendo, porém, ó vizir tesoureiro!, por que motivo a estátua pôde ser causa do teu grande desespero.

Assim interpelado, o ministro das Finanças, depois de prestar ao rei Malabã a sua homenagem humilde e respeitosa, começou:

— Cumpre-me dizer-vos, ó rei do tempo!, que ao ver aquela bela estátua notei que ali estava a vossa majestosa figura posta no bronze pelo gênio incomparável de famoso artista. Este monumento é de bronze, pensei, e assim durará eternamente, ao passo que o nosso bondoso rei, na sua triste condição de mortal, não poderá sobreviver à própria efígie. Dia virá em que Hã-Ru, o Anjo da Morte,2 na sua eterna faina, arrebatará a alma preciosa do nosso estremecido rei! E esses pensamentos cruéis, sem que eu pudesse impedir, apoderaram-se de mim e tal tristeza me trouxeram ao coração que, dando livre curso às lágrimas, chorei desesperadamente!

— Grande amigo! — atalhou o soberano hindu comovido. — Jamais me esquecerei da prova sincera de amizade que acabo de receber de ti!

E depois de abraçar afetuosamente o ministro da Fazenda, o rei Malabã voltou-se para o terceiro vizir e censurou-o com enérgico rancor:

— Nas tuas gargalhadas, porém, ó vizir!, próprias de um insensato, não vi mais do que um insulto e um escárnio à minha pessoa! Não compreendo como poderás explicar a tua atitude descabida e irreverente! Cabe-te a vez de falar! Dize-me onde foste buscar em minha estátua, perfeita e impecável, motivos para tamanha hilaridade.

Ao ouvir palavras tais empalideceu o ministro da Guerra, sentindo que a falsa interpretação do rei punha a sua vida em grande perigo.

Sem perder, porém, a calma tão necessária em tais situações, o digno vizir do rei Malabã aproximou-se do trono e, depois de beijar humildemente a terra entre as mãos, assim falou:

— Rei generoso! Esteja o vosso nome sob a proteção dos deuses! Não sei mentir. Vou contar-vos a verdade, embora com sacrifício da minha vida, revelando-vos o motivo por que tanto ri ao topar com essa estátua! — E, diante do silêncio que se fizera, o terceiro-vizir começou: — Ao atravessar o parque do palácio, deparou-se-me um belíssimo monumento de bronze que representava a figura do glorioso sultão de Panjgur. Vendo a estátua lembrei-me, naquele instante, de uma história muito curiosa intitulada "O Beduíno Astucioso", que ouvi contar, há dez anos, no interior da Arábia! Foi a lembrança dessa história que me fez rir daquela maneira!

— Que história é essa? — indagou o rei Malabã, tomado da mais viva curiosidade.

— É uma das lendas mais chistosas que conheço — explicou o vizir. — Ouvi-a de um velho árabe quando atravessava o deserto de Dahna!

"Há, nesse deserto, uma gigantesca montanha de pedra lisa e acinzentada, que os árabes denominaram "A Sofredora", já muitas vezes contornada pelas caravanas e varrida pelo simum. Ao norte dessa montanha agreste encontra-se pequeno e acolhedor oásis, com muita sombra e água fresca, onde florescem precisamente trezentas e trinta e três tamareiras. Dizem os caravaneiros que cada uma dessas trezentas e trinta e três tamareiras (com exceção de uma, e uma só) tem a existência ligada a uma lenda. Não há erro, pois, em afirmar que o número de lendas, nesse oásis, é igual ao número de tamareiras menos uma! A lenda da décima terceira tamareira é aquela que tem por título "O Beduíno Astucioso". Houve mesmo um sábio matemático que calculou...

— Não me interessam os cálculos das trezentas e tantas tamareiras — interrompeu, com impaciência, o monarca. — Quero ouvir, sem mais delongas, a singular aventura do beduíno astucioso com todos os episódios, versos ou fantasias que estiverem com ela relacionados.

O rei, já meio agastado, exigia a narrativa. Era preciso obedecer ao senhor de Panjgur.

O digno vizir concentrou-se durante breves instantes. Parecia coordenar as ideias e recordar os fatos que estivessem dispersos entre as brumas do passado. Decorridos, finalmente, alguns minutos, iniciou, com voz pausada, o seguinte relato:

Notas

1 A religião maometana proíbe a representação de animais, o uso de imagens e de figuras humanas. Na Índia, porém, muitos países estão inteiramente fora do Islã. (B. A. B.)

2 Hã-Ru — Na mitologia hindu figuram nada menos de 17 deuses. Um deles, *Siva*, é o princípio destruidor e tem como auxiliar Hã-Ru, o mensageiro da Morte.

6ª Narrativa

História de um rei do Kafiristã que fez erguer três estátuas e de um beduíno astucioso que ficou desesperado. Que fez o beduíno para despertar viva curiosidade no espírito do rei.
Das Mil histórias sem fim *é esta a sexta!*
Lida a sexta restam, apenas, novecentas e noventa e quatro...

Deveis saber, ó irmão dos árabes!, que existiu outrora, para além das montanhas de Kabul, um país muito rico e populoso chamado Kafiristã.

O Kafiristã era, nesse tempo, governado por um soberano íntegro e sábio cujo nome a História registrou e perpetuou em páginas magníficas, para maior glória dos povos do Islã. Deveis saber também — pois bem poucos são aqueles que o ignoram — que esse monarca famoso, a que nos referimos, foi Romalid Ben-Zallar Khã.

Dando ouvidos aos conselhos de um vizir insidioso e bajulador, o rei Romalid (Alá o tenha em sua glória!) mandou erguer na grande praça da capital três belíssimas estátuas.[1]

A primeira era de bronze, a segunda de prata e a terceira — não obstante ser a maior — era toda de ouro. Todas representavam o rei em atitude de combate, a erguer ameaçador um grande alfanje recurvado.

Um dia, o vaidoso Romalid repousava descuidoso na varanda de marfim de seu palácio, quando notou que um velho beduíno, pobremente vestido, se aproximava do lugar em que se achavam os três monumentos. Ao ver a estátua de bronze, o árabe do deserto ergueu os braços para o céu e exclamou:

— Que Alá, o Exaltado, conserve o nosso rei! — Ao defrontar, logo depois, a estátua de prata, o beduíno riu alegremente e disse em voz bem alta: — Que Alá, o Altíssimo, abençoe o nosso rei! — Ao topar, porém, com o rútilo e áureo monumento, o beduíno atirou-se ao chão; como um louco, entrou a gritar, desesperado: — Que Alá, o Clemente, salve o nosso rei!

O sultão, que tudo observara, mandou que trouxessem o aventureiro desconhecido ao seu palácio e em presença dos vizires mais ilustres da corte, interrogou-o sobre a significação dos votos que proferira e das atitudes diversas e inesperadas que havia assumido diante de cada uma das estátuas.

O velho beduíno, homem inteligente e astucioso, interpelado pelo poderoso senhor do Kafiristã, inclinou-se respeitoso e exclamou.

— *Allah alá tiac in manlei!* (Que Deus conserve a vossa vida, ó rei!) Devo dizer, primeiramente, que o meu nome é Salã Motafa. Pertenço a um grupo de nômades do deserto que hoje, para breve repouso, acamparam junto às portas desta cidade. Há dez anos que não vinha ao Kafiristã e não conhecia os três novos monumentos ora erguidos ali no meio da praça. Ao ver a estátua de bronze compreendi que ela representava o nosso rei Romalid Ben-Zallar Khã, sultão magnânimo e afortunado. Prestei, pois, como humilde súdito que sou, minhas homenagens à figura imponente e respeitável do soberano, rei e senhor deste rico país. Pensei: "Se não houvesse um rei, justo e forte, para governar e dirigir o povo, este andaria na terra como, em pleno oceano, o batel sem piloto."

"Ao avistar, logo depois, a estátua feita de prata pensei: 'Se o rei mandou fazer uma estátua tão cara é porque tem as arcas do tesouro a transbordar de dinheiro. Há, portanto, notável e completa prosperidade no país!' E este raciocínio trouxe-me ao espírito grande alegria, que externei, com a maior sinceridade, ao exclamar: 'Que Alá, o Altíssimo, abençoe o nosso rei e por muitos anos o conserve!' 'O que é muito puro de sangue, de linguagem e de conduta, o que é poderoso, reto e consumado político, é digno de reinar na terra.'

"Ao verificar, porém, que a terceira estátua era de ouro maciço, fiquei assombrado. 'O rei enlouqueceu', pensei. 'Onde já se viu, em que terra e em que lugar, um soberano desperdiçar tanto dinheiro numa estátua de ouro quando há tanto benefício a fazer-se e tanta necessidade a remediar-se?! Pobre e desventurado rei! Está completamente dominado pelo delírio das grandezas!' E esta triste conclusão afligiu-me de tal modo que de mim se assenhoreou grande e incontida aflição. Atirei-me desesperado ao chão, e implorei a proteção de Deus: 'Que Alá, o Clemente, salve o nosso rei!'"

Achou o sultão muita graça na original explicação dada pelo inteligente forasteiro e perguntou-lhe:

— Acreditas, então, ó beduíno tão bem-dotado!, que eu poderia ficar louco sem que os meus súditos o percebessem?

— Acredito, sim, ó rei dos reis — afirmou o beduíno. — Não conheceis o caso ocorrido com o rei Talif?

— Não é possível, mesmo a um rei, conhecer os casos que se deram com todos os reis. Possivelmente, ignoro o que ocorreu com esse meu digno antecessor.

— Pois é a história mais espantosa de quantas tenho ouvido — respondeu o beduíno. — Trata-se de um rei que verificou ter acontecido, consigo mesmo, uma anomalia realmente fantástica; durante nove anos, apesar de completamente louco, governava tranquilamente um dos países mais prósperos e mais ricos do mundo! E houve ainda, no caso, uma particularidade notável. No dia em que o rei Talif achou que seria prudente enlouquecer ficou inteiramente curado da demência que o aniquilava!

— Por Alá! — exclamou o sultão. — Será possível que um rei demente possa governar com acerto um grande país? Conta-nos, ó Filho do Deserto!, conta-nos esta história que me parece curiosa!

— Escuto-vos e obedeço-vos — respondeu o nômade, beijando humilde a terra entre as mãos. — Conto com a vossa generosidade. O coração do bom, embora agastado, não muda. Não é possível aquecer a água do oceano com a luz de uma vela!

E na sua voz forte e cadenciada, como o andar de uma caravana, o astucioso beduíno iniciou a seguinte narrativa:

Notas

1 A religião maometana proíbe a representação de animais, o uso de imagens e de figuras humanas. Na Ásia, porém, muitos países estão inteiramente fora do Islã. (B. A. B.)

7ª Narrativa

História de um povo triste e de um rei que se viu ameaçado por uma terrível profecia. Neste capítulo vamos encontrar um rei que só criou juízo no dia em que resolveu enlouquecer.
Das Mil histórias sem fim *é esta a sétima!*
Lida a sétima restam, apenas, novecentas e noventa e três.

I

Conta-se que existiu outrora, na Índia, entre o Indo e o Ganges, um país tão grande que uma caravana, para atravessá-lo de um extremo ao outro, era obrigada a repousar setenta e sete vezes.

Era esse país governado por um rei, chamado Talif, filho de Camil, Camil filho de Ludin, Ludin filho de Maol, o Forte.

Certo dia, o rei Talif chamou o seu grão-vizir Natuc e disse-lhe:

— Tenho notado, meu bom amigo, que os meus súditos, desde o mais humilde remendão ao mais opulento e prestigioso emir, de há algum tempo a esta parte, andam todos tristes e abatidos. Desejo vivamente saber qual é a causa dessa epidemia de tristeza e abatimento que oprime meu povo!

— Rei magnânimo e justo — respondeu o judicioso Natuc — que o Distribuidor1 vos conceda todas as graças que mereceis! Sou forçado a dizer-vos a verdade, embora tenha certeza de que ela vai causar-vos grande desgosto! O povo anda triste e abatido porque dentro de poucos dias deverá ser festejado em todo o reino o trigésimo quinto aniversário de vossa existência!

— Pelo manto do Profeta! — exclamou o rei Talif. — Que absurdo é este? Não vejo que relação possa existir entre o meu aniversário e a melancolia dessa gente!

— Bem sei que ignorais ainda — explicou o grão-vizir — que esse dia tão ansiosamente esperado, do vosso aniversário natalício, será para o reino o mais calamitoso do século!

— Calamitoso? Positivamente, ou tens o juízo fora da cabeça, ou terás, em breve, a cabeça fora do corpo. Já vai a tua audácia além do que eu poderia tolerar.

— Espero, ó rei magnânimo, me perdoeis a licença das expressões ao contar-vos a razão delas.

E o dedicado Natuc narrou ao soberano da Índia o seguinte:

— Uma semana depois do vosso nascimento, mandou o saudoso rei Camil, sobre ele a bênção de Alá!, chamar o famoso Ben-Farrac, o sábio astrólogo de maior prestígio do mundo, e pediu-lhe que lesse nas estrelas visíveis e nos astros invisíveis do firmamento o futuro de Talif, o novo príncipe do Islã. O grande Ben-Farrac, sobre ele a misericórdia de Alá, depois de consultar os voos dos pássaros, as constelações e a marcha dos planetas mais propícios, declarou que o filho de Camil subiria ao trono aos vinte e um anos de idade, e durante quatorze outros governaria, com agrado de todos, o novo reino herdado de seu pai. No dia, porém, em que completasse trinta e cinco anos, o rei Talif seria acometido de um ataque de loucura! Se ao atingir essa idade fatal, escrita no céu pelos astros luminosos, não apresentasse o rei sintomas de demência, uma grande e indescritível calamidade, que não pouparia nem mesmo as palmeiras do deserto, devastaria o país de norte a sul! E até agora, ó rei do tempo!, não houve uma só previsão de Ben-Ferrac que fosse tida por falsa ou errada. O povo tem assistido já a realização completa de várias delas!

E, depois de pequena pausa, o grão-vizir continuou:

— Eis aí, glorioso senhor, a causa da tristeza de vossos dedicados súditos. No próximo dia do vosso aniversário seremos vítimas de uma desgraça: ou a loucura apagará para sempre a luz de vossa inteligência, ou uma calamidade, que ainda não teve igual na história, devastará o país de norte a sul!

O bondoso rei Talif, ao ter conhecimento desse triste augúrio que pesava ameaçadoramente sobre seu futuro, ficou tomado da mais profunda tristeza e sentiu invadir-lhe o coração piedoso uma onda de amargura.

— Bem triste é a minha sina! — lamentou o rei depois de longo e penoso silêncio. — Certo estou, ó vizir!, de que não poderei fugir aos *decretos* irrevogáveis do destino. Apelo, meu amigo, para o teu esclarecido espírito e longa experiência! Não haveria um meio de atenuar-se a grande desgraça que paira presentemente sobre o meu povo e sobre mim mesmo?

— Só vejo um meio — respondeu sem hesitar o grão-vizir — e nele venho pensando há muito tempo. Segundo a previsão formulada pelo astrólogo, se ficardes louco no dia do vosso aniversário, o país não mais terá a temer futuras calamidades. Assim sendo, no dia do vosso natalício, logo pela manhã, fingireis, por vários atos absurdos, que o destino vos privou da luz da razão. Não deveis, porém, com a simulada loucura, deixar que desapareça, ou mesma diminua, a confiança que o povo deposita em vós. Para isto, penso que os vossos atos de falsa demência deverão ser de molde que não tragam qualquer perigo ou a menor perturbação à vida dos vossos súditos. O povo depressa poderá verificar que o rei, apesar de louco, continua a exercer o governo do país com justiça e tolerância. É preferível, poderão dizer todos, um rei demente, piedoso e justo, a um soberano de espírito lúcido, mas perverso e vingativo! E, assim, a vida de todos nós continuará, como até agora tem sido, calma, tranquila e feliz!

— Grande e talentoso amigo! — exclamou o rei Talif, movido por sincero entusiasmo — Como admiro a tua sagacidade, como aprecio a tua dedicação! É, na verdade, uma solução admirável para o meu caso; fazendo-me passar por louco farei com que se realize a terrível previsão do maldito astrólogo, e restituirei a calma e o sossego ao meu povo!

E desta sorte, tendo assentado com o grão-vizir os planos para a curiosa farsa que devia representar — fingindo-se louco —, ordenou o rei Talif que o seu trigésimo quinto aniversário fosse condignamente festejado em todas as cidades e aldeias do reino.

Chegado que foi o dia, todos os vizires, nobres e ricos mercadores foram, conforme o tradicional costume, levar as felicitações e os votos de prosperidade ao régio aniversariante.

Ordenou o rei Talif fossem os seus ilustres homenageantes conduzidos à sala do trono e recebeu-os de pé, tendo numa das mãos uma caveira e à cintura longa corrente de ferro a cuja extremidade vinha presa uma figura, feita de barro, que representava um gênio infernal de horripilante aspecto.

Os ricos, nobres e vizires, ao verem a estranha e descabida atitude do rei Talif, concluíram logo que o soberano da Índia havia enlouquecido. Aqueles que ainda tinham dúvida sobre o desequilíbrio mental do rei depressa se convenceram da dolorosa verdade, quando o ouviram declarar que estava resolvido a caçar elefantes no fundo do terceiro mar da China!

E quando um dos honrados vizires ponderou sobre as dificuldades de tal empresa, o rei pôs-se a enunciar frases sem nexo.

— Qual peso é excessivo aos esforçados? Que é diante ao perseverante? Que país é estranho aos homens da ciência? Quem é inimigo dos afáveis?

— Está louco o rei! — murmuraram todos. — De dois males o menor. Estamos livres da calamidade que devia devastar o país de norte a sul!

E o povo festejou nesse dia, com demonstrações de grande alegria, o trigésimo quinto aniversário do rei Talif, apelidado o Louco.

Desde logo, porém, compreenderam todos que a branda loucura do rei Talif em nada prejudicava a marcha natural dos múltiplos negócios do governo. Na verdade, os atos provindos da demência do monarca eram inofensivos. Ora decretava o casamento de uma palmeira com um coqueiro, ou assinava uma lei ridícula pela qual tomava posse de uma parte da Lua, ou de uma nuvem pardacenta do céu.

Quis Alá, o Exaltado, que o inteligente plano concebido pelo talentoso grão-vizir Natuc desse o melhor resultado. O país continuou a prosperar e o povo da Índia vivia tranquilo e feliz, embora tivesse no trono um rei privado da luz da razão.

II

Um dia, afinal, inspirado talvez pelo Demônio (Alá persiga o Maligno!), resolveu o rei Talif sair do seu palácio, disfarçado em mercador, a fim de ouvir o que diziam a seu respeito os homens do povo.

Bem oculto por hábil disfarce, entrou num grande *khã*2 onde se reuniam, à noite, viajantes, peregrinos e aventureiros, vindos de todos os cantos. Um cameleiro, que se achava a seu lado, murmurou com voz pesarosa:

— Pobre do nosso rei Talif! Depois do seu último aniversário ainda não recuperou a razão! Ainda hoje praticou nova insensatez! Concedeu o título de emir ao rio Ganges!

— Meus amigos — replicou um velho de venerável aspecto, que fumava silencioso a um canto. — Creio bem que o povo deste país anda treslendo! Estamos diante de um dos casos mais singulares que tenho observado em minha vida. Julgam todos que o rei Talif enlouqueceu no dia em que completou trinta e cinco anos, mas exatamente o contrário sucedeu! Foi nesse dia, precisamente, que o soberano recuperou o juízo!

— Como assim? — perguntaram os mais curiosos. — Não é possível! Como explicar os disparates e as ridículas decisões do rei?

— Já observei — continuou o ancião — que os últimos atos praticados pelo rei são inofensivos e servem apenas para divertir o povo. Antes, porém, de seu último aniversário, o rei Talif só procedia como louco ditando leis que eram profundamente prejudiciais aos interesses e ao bem-estar do país!

E, ante a admiração de todos, o velho hindu continuou:

— Não se lembram daquela estrada que o rei, há dois anos, mandou abrir, pelas montanhas de Chenab? Foi isto um ato de inconcebível loucura, visto como a tal estrada, que tantos sacrifícios nos custou, lá está abandonada sem utilidade nem valor algum. E aquele grande castelo mandado erguer no meio do lago de Magdalane? Foi outro ato de insânia do nosso soberano. Na primeira cheia do lago as águas invadiram impetuosamente a ilha e derrubaram todas as obras de arte que já estavam quase concluídas!

O bom monarca, que tudo ouvia, pálido de espanto, sentia-se obrigado a reconhecer que as palavras do desconhecido eram a expressão da verdade. A estrada e o famoso castelo tinham sido, realmente, erros lamentáveis de sua administração.

— E não foi só — acrescentou ainda o velho. — Há cerca de três anos o rei Talif mandou demitir o governador de Bhavapal, homem honesto e digno, para pôr no lugar um nobre protegido, que fora sempre um sujeito desonesto e mau. Só um rei insensato é que procede assim! E mais ainda. De outra feita o rei Talif, a pretexto de aumentar o salário dos servidores do reino...

Não quis o rei Talif continuar a ouvir a análise imparcial que o velho hindu fazia de todos os erros que ele praticara. Sem proferir uma só palavra, levantou-se e saiu vagarosamente do *khã*.

"É singular e espantoso", pensava ele, enquanto vagava a esmo por vielas desertas e mal iluminadas. "É espantoso e singular o que sucedeu comigo! Creio bem que sou fraco para governar o meu povo. E no tempo em que julgava ter perfeito juízo pratiquei tantas loucuras, o que não terei feito agora que resolvi passar por demente?"

Absorto em profunda meditação, voltava o rei para o palácio quando, ao atravessar uma praça, encontrou um árabe que chorava desesperado sentado junto a uma fonte.

— Que tens, meu amigo? — perguntou-lhe o monarca. — Qual é a causa de tua grande tristeza?

O desconhecido, sem reconhecer na pessoa que o interrogava o poderoso rei da Índia, respondeu:

— Sou um infeliz, ó muçulmano! Há perto de um ano que procuro falar ao rei Talif e não consigo chegar à sala do trono nos dias de audiência pública.

— E que queres dizer ao nosso bom soberano? — insistiu curioso o rei hindu.

Respondeu o desconhecido:

— Quero transmitir-lhe uma importante mensagem que recebi há tempos de meu saudoso pai, o astrólogo Ben-Farrac!

E, como o rei quedasse pouco menos que atônito ao ouvir o nome do fatídico astrólogo, o árabe continuou:

— Pouco antes de morrer, meu pai chamou-me e disse: "Meu filho, vou contar-te uma história singular intitulada: 'O Rei Insensato'. Peço-te que repitas fielmente essa história ao rei Talif, quando o nosso monarca festejar o trigésimo quinto aniversário. Se, por qualquer motivo, não atenderes a este meu pedido, que tem unicamente por fim salvar o rei, serás mais infeliz do que o mais desprezível dos mamelucos!"[3] Eis a causa do meu desespero; não vejo um meio de chegar à presença do rei Talif, filho de Camil, e receio que a maldição paterna venha a pesar sobre mim!

Ao ouvir tais palavras, não mais se conteve o rei Talif. Arrancando, no mesmo instante, as grandes barbas postiças e a negra cabeleira que lhe alteravam completamente a fisionomia, apresentou-se ao filho do astrólogo no seu verdadeiro aspecto, e gritou-lhe enérgico e ameaçador:

— Fica sabendo, ó infeliz!, que eu sou Talif, o rei. Exijo que me contes imediatamente essa história que para transmitir-me ouviste, há tantos anos, de teu pai, o astrólogo Ben-Farrac!

O árabe, ao reconhecer naquele simples e modesto mercador a pessoa sagrada e respeitável do rei, ajoelhou-se humilde, beijou a terra entre as mãos e assim falou:

— É bem possível, ó Rei do Tempo!, que o simples conhecimento da narrativa a que me referi seja suficiente para causar graves e profundas alterações em vossa vida. Desse momento em diante, porém, os nossos destinos estão ligados por laços inquebráveis. Tal é a sentença ditada pela sabedoria do astrólogo Ben-Farrac, meu saudoso pai. Sereis, ó glorioso Talif!, responsável pela minha vida e, mais ainda, responsável também pela vida de meus filhos e de meus amigos mais caros.

— Afirmo, sob juramento — declarou, logo, o rei —, que nada farei de mal contra ti, nem contra qualquer amigo ou parente teu!

— Agradeço-vos a inestimável garantia que as vossas palavras traduzem — retorquiu o filho do astrólogo. — Vejo-me, entretanto, forçado a exigir outro penhor e outra segurança de vossa parte.

— Que segurança é essa? — indagou nervoso o monarca aproximando-se de seu jovem interlocutor.

— O aviso que me cumpre fazer — explicou o enviado — é o seguinte: não deveis, sob pretexto algum, interromper a narrativa que, dentro de breves instantes, vou iniciar. Graves e desastrosas seriam as consequências de um gesto de impaciência ou protesto de vossa parte.

— Juro, pelas cinzas de meus antepassados — retorquiu gravemente o monarca —, que ouvirei a tua narrativa em absoluto silêncio!

— Diante dessa promessa, proferida com ânimo sincero e leal, o filho do astrólogo iniciou a seguinte narrativa:

Notas

1 Um dos muitos nomes com que os muçulmanos se referem a Alá.

2 *Khã* — lugar onde se reúnem viajantes e mercadores.

3 Mameluco ou *mameluj*, escravo. O plural seria *mamelik*.

8ª Narrativa

História surpreendente do infeliz Balchuf, que deixou o trono, a título de experiência, nas mãos de um príncipe louco.
Das Mil histórias sem fim *é esta a oitava!*
Lida a oitava restam, apenas, novecentas e noventa e duas...

No país de Astrabad vivia outrora um rei perverso e mau chamado Balchuf.

Não tendo filhos, era seu herdeiro um sobrinho — o príncipe Kabadiã —, moço desajuizado e turbulento que vivia a cometer toda sorte de loucuras e estroinices. Raro era o dia em que o futuro rei não praticava uma proeza qualquer.

O rei Balchuf, longe de procurar corrigir-lhe a índole arrebatada e travessa, distraía-se com suas extravagâncias e ria-se quando ouvia contar alguma nova tropelia daquele a quem já chamavam o "Príncipe Louco".

O povo de Astrabad antevia bem triste os dias que o aguardavam. Entregue a um monarca impiedoso e sanguinário, o país entraria fatalmente em completa decadência. Os estrangeiros já fugiam de Astrabad com receio das perseguições, e o comércio arrastava-se onerado e sem ânimo, coberto de impostos exorbitantes.

Um grupo de patriotas, compreendendo que aquele estado de coisas levaria todos à ruína, resolveu conspirar contra o rei, proclamar a República e entregar ao mais digno a direção do Estado.

Houve, porém, entre os oposicionistas um miserável delator que se apressou em levar ao conhecimento do rei o plano deliberado pelos conspiradores.

Enfureceu-se o soberano ao ter notícias de que alguns ricos súditos pretendiam subverter a ordem legal do país, e resolveu castigar implacavelmente os chefes daquele movimento republicano. Mandou degolar alguns, eliminando os mais influentes, desterrou outros, prendeu os suspeitos e confiscou os bens de todos os adeptos da revolução.

Esta vitória não lhe restituiu, porém, a tranquilidade que perdera. O fantasma da revolta continuava a povoar-lhe a mente, como um sonho mau.

"Uma tentativa destas", pensava, "deixa terríveis germes nos corações dos descontentes e dos vencidos. Se eu não tomar uma providência enérgica, cedo terei de dominar outra rebelião. E encontrarei, porventura, quem me avise a tempo?"

Preocupado com tais pensamentos, resolveu o rei Balchuf mostrar ao seu povo que ele não era tão ruim como os seus adversários faziam crer.

"Para isto", refletiu maldoso, "vou afastar-me durante um ano do governo e deixar meu sobrinho no trono. Tais loucuras há de ele praticar, tão frequentes serão os seus atos de tirania que quando eu voltar o povo respirará menos oprimido e verá em mim um soberano ponderado e justo."

Ora, o rei Balchuf fora informado de que o Príncipe Louco dissera várias vezes a seus amigos e companheiros que quando subisse ao poder praticaria, de início, três façanhas espantosas: uma represa das águas do rio Gurgã; a construção de um castelo subterrâneo; e a abolição do véu para as mulheres.

E, antegozando a dura lição que infligia ao país inteiro, esfregava as mãos de contente:

“O primeiro ato de meu tresloucado sobrinho levará o país às portas da miséria; o segundo à ruína completa; e o terceiro à revolução religiosa e à guerra civil!”

E resolvido a pôr em execução, sem mais delongas, o plano diabólico, o rei Balchuf assinou um decreto em virtude do qual seu sobrinho Kabadiã o substituiria no governo pelo espaço de um ano. Ele — o rei — iria, durante esse tempo, fazer uma visita ao seu velho amigo Iezide II, sultão do Hajar.

Foi com verdadeiro pavor que o povo de Astrabad recebeu a nova da viagem do rei e a consequente ocupação temporária do trono pelo Príncipe Louco.

Partiu o rei Balchuf resolvido a regressar dentro do prazo marcado. Preso, entretanto, por uma grave e prolongada enfermidade no longínquo país de Hajar, não pôde voltar senão quatro anos depois.

Chegado a Astrabad, depois de tão longa ausência, notou que os seus domínios haviam progredido extraordinariamente. Um vizir que por ordem do governo veio esperá-lo na fronteira disse-lhe, sem mais preâmbulos:

— Penso que Vossa Majestade não deve tentar reassumir o trono, pois o povo poderia revoltar-se e massacrá-lo.

— Como assim? — exclamou o rei. — Será possível que meus súditos prefiram ser governados pelo Príncipe Louco a ter-me no trono?

— Peço humildemente perdão a Vossa Majestade — recalcitrou o vizir. — Devo asseverar, porém, que Vossa Majestade está completamente equivocado. O príncipe Kabadiã está governando admiravelmente o país. Até hoje, não havíamos encontrado um chefe de Estado de mais ampla visão e sabedoria!

— É incrível! — protestou o rei. — E a represa do rio Gurgã? E o palácio subterrâneo? E a célebre abolição do véu feminino? Não teria o príncipe praticado nenhuma dessas tão prometidas loucuras.

O vizir explicou, então, ao rei Balchuf que tudo isso e muito mais havia feito o príncipe. A represa do rio Gurgã fora de consequências magníficas, pois as águas espalharam-se pelas terras vizinhas, fertilizando-as e tornando-as mui aperfeiçoadas à agricultura, que logo se desenvolveu; o palácio subterrâneo, depois de construído, tornou-se grande atrativo, e milhares de forasteiros visitaram a capital unicamente para admirar essa nova maravilha, o que para o comércio de Astrabad fora manancial de grandes lucros, e para o país fonte de gerais prosperidades. A abolição do véu feminino fora outra medida de alcance admirável. As raparigas passaram a andar com o rosto descoberto: abandonaram a ociosidade dos haréns e puderam trabalhar livremente não só nos bazares como nas pequenas indústrias. Uma vez condenado o véu, teve o príncipe ocasião de observar que suas jovens patrícias eram belíssimas e resolveu casar-se. Escolheu para esposa uma menina, formosa e inteligente, filha de um grande sábio. A nova princesa exerceu tão boa influência sobre o gênio de seu jovem esposo que o transformou radicalmente. Aconselhado pela fiel e dedicada companheira, o príncipe escolheu bons ministros, esforçados auxiliares, e, bem guiado e melhor secundado, soube modificar bastante o seu gênio irrequieto e impulsivo. Até então não assinara uma única sentença de morte, nem mandara confiscar os bens de nenhum cidadão.

Ao ouvir tão assombrosas revelações, o rei Balchuf ficou pasmado e percebeu que havia perdido para sempre o direito ao trono; jamais poderia ele contar com o apoio de suas tropas ou com a antiga submissão de seu povo.

— Insensato fui eu — confessou ele ao vizir. — Insensato, pois não soube governar o meu povo como ele merecia! Insensato em escolher maus ministros e péssimos conselheiros! Louco era eu quando premiava os vis delatores e perseguia os bons patriotas!

— Agora é tarde para arrependimentos, ó rei — retorquiu com impaciência o vizir. — Volte Vossa Majestade para o país de Hajar e procure acabar lá sossegado os seus dias, que o povo de minha terra não poderá suportá-lo mais!

E, tendo pronunciado tão ásperas palavras, o vizir afastou-se com a sua aparatosa comitiva, deixando o infeliz rei abandonado na estrada, como se fosse um camelo moribundo.

Sentindo-se perdido e sem forças para reconquistar o trono de seus avós, sentou-se o rei Balchuf, tomado de indizível tristeza, numa pedra à margem da estrada, e pôs-se a meditar nos espantosos erros de seu passado e na dolorosa expectativa que lhe oferecia o futuro.

— A morte — exclamou — é para o vencido o caminho mais seguro da reabilitação e do descanso. Devo, pois, morrer!

Um xeque desconhecido que passava no momento pela estrada, acompanhado de seus servos, ao ouvir as palavras de desespero do rei Balchuf, parou o camelo em que ia e assim falou:

— Ó desassisado viandante! Por que te pões, para aí, como um louco, a falar em morrer quando, graças a Deus, há na vida remédio para todos os males? Vem comigo, pois estou certo de que acharei solução para o teu caso!

Vamos olhar, apenas, o lado belo e puro
Das coisas que circundam este mundo,
Deixando à margem, voluntariamente,
Ideias más que vivem no inconsciente
*Como rainhas nefastas do escuro.*1

— Continua, meu amigo, a tua jornada — redarguiu secamente o rei. — O abismo que se acha diante de mim é intransponível! O problema do meu destino é inexplicável; os versos não me trazem alívio; os conselhos e advertências são, agora, para mim inúteis; os auxílios materiais nada poderão adiantar. Só a morte será capaz de tirar-me da negra situação em que me encontro.

— Estás enganado — contraveio o desconhecido. — Não sei ainda qual é a angústia que pesa sobre teus ombros; ignoro quais são os males que afligem a tua existência. Asseguro-te, porém, que já estive em situação muito pior do que a tua e que logrei salvação precisamente no momento em que decidira morrer. É preciso que a esperança exista sempre em nosso coração. Bem disse o poeta:

*Esperança, ventura da desgraça, trecho puro do céu sorrindo às almas, na floresta de angústias e incertezas.*2

"E por que não crês, ó irmão dos árabes!, na esperança? Serve a esperança de lenitivo para as dores mais torturantes e de bálsamo para as tristezas."

Só a leve esperança, em toda a vida,
disfarça a pena de viver, mais nada:
nem é mais a existência resumida,
*que uma grande esperança malograda!*3

O xeque do deserto, vendo que o rei continuava taciturno e infeliz, disse-lhe:

— Ouve a história de minha vida e verás se eu tenho ou não razão para confiar no futuro e exaltar a esperança.

E narrou a seguinte e singular história:

Notas

1 Versos do livro *Angústia dos Séculos*, de Adroaldo Barbosa Lima.

2 Versos de Aníbal Teófilo.

3 Do soneto "Velho Tema", de Vicente de Carvalho.

9ª Narrativa

História singular de um turbante cinzento e a estranha aventura de um enforcado. O encontro inesperado que teve o herói do conto com uma jovem que chorava no meio de uma grande floresta.
Das Mil histórias sem fim *é esta a nona!*
Lida a nona restam, apenas, novecentas e noventa e uma.

Meu nome é Sind Mathusa. Poucos homens têm havido, na Índia, mais ricos do que meu pai e não sei de um só que o excedesse em inteligência, bondade e prudência.

Sentindo-se, certa vez, assaltado de grave enfermidade, e na certeza de que os dias que lhe restavam na vida podiam ser contados pelos dedos da mão, meu pai chamou-me para junto de seu leito e disse-me:

— Escuta, ó jovem desmiolado! Atenta bem no que te vou dizer. És pela lei o herdeiro único de todos os bens que possuo. Com o ouro que te vou deixar poderias viver regaladamente, como um rajá, durante duzentos anos, se a tanto quisessem os deuses prolongar a tua louca e inútil existência. Como sei, porém, que és fraco para resistir aos vícios, e forte em seguir os maus exemplos, tenho a triste certeza de que muito mal empregarás a riqueza que vai em breve cair-te nas mãos.

Quero, assim, fazer-te agora um pedido: se for atendido morrerei tranquilo e não levarei para a vida futura o tormento de uma angústia.

— Dizei-me, meu pai — respondi —, qual é o teu desejo. Quero ser mais repelente do que um chacal se deixar de cumprir a tua vontade!

— Meu filho, quero arrancar de ti um juramento. Vês aquele turbante cinzento que ali está? Vais jurar pela imaculada pureza dos ídolos e pelas asas de Vichnu1 que se algum dia te sentires desonrado procurarás imediatamente a reabilitação que a morte concede aos infelizes, enforcando-te naquele turbante!

Fiz, sem hesitar, a vontade ao enfermo. Jurei pelos ídolos e pelos complicados deuses da Índia que se me visse, no futuro, ferido pela mácula da desonra, procuraria a morte ao enforcar-me no turbante cor de cinza.

Passados dois ou três dias, meu pai, fechando os olhos para a vida, integrou-se no Nirvana. Vi-me, de um momento para o outro, senhor de inúmeras propriedades, das quais auferia uma renda que chegava a causar inveja e insônia ao orgulhoso xá da nossa província. Passei a ostentar uma vida de luxo e dissipações; rodeavam-me, dia e noite, falsos amigos e bajuladores da pior casta que me induziam a praticar toda a sorte de leviandades e loucuras.

Uma noite, tendo reunido em minha casa, como habitualmente o fazia, em grande festa, vários e divertidos companheiros da nossa laia, um deles chamado Ishame, que adquirira considerável riqueza vendendo camelos e elefantes, convidou-me para uma partida de jogo de dados. A princípio a sorte me foi favorável; cheguei a ganhar num golpe o meu peso em marfim. Cedo, porém, perseguido por uma triste fatalidade, entrei a perder e os meus prejuízos excederam de mais de cem vezes o lucro inicial. Com a esperança de recuperar o dinheiro perdido redobrei as paradas. Perdi novamente. Na progressiva loucura do jogo, já alucinado, arrisquei nos azares da sorte as minhas joias, escravos e propriedades. Mais uma vez perdi, e ao nascer do sol sobre o Ganges nada mais me restava da herança de meu pai. Na certeza de que poderia contar com a generosidade e auxílio daqueles que me rodeavam, fiz, com a garantia da minha palavra, uma grande dívida de honra, ao perder a última partida. Procurei um jovem brâmane, filho de opulenta família e que sempre vivera a meu lado, no tempo da fartura, e pedi-lhe que me emprestasse algum dinheiro.

— Meu caro Sind — disse-me o brâmane conduzindo-me para o interior de sua rica vivenda —, chegas em péssima ocasião. Fui obrigado a enviar ontem, para resgatar uma dívida de meu pai, cerca de duas mil rupias para Benares. Encontro-me inteiramente desprevenido. Lamento, portanto, não poder servir a um amigo tão querido.

Olhei para as pratarias que se amontoavam por todos os recantos de sua casa. Havia narguilés riquíssimos e bandejas com inscrições que deviam valer alguns milhares.

— Nada disso é nosso — acudiu logo o brâmane, apontando para os adornos e enfeites. — É desejo de meu pai casar minhas irmãs com homens de boa casta, e para atrair os pretendentes alugou toda essa prata e esses tapetes bordados a ouro. Todos acreditam, desse modo, que somos ricos e que vivemos na fartura e na opulência.

Irritado com o cinismo daquele falso amigo, disse-lhe com calculada frieza:

— Bem sabes que sou descendente de nobres e que meus avós pertenciam à mais alta linhagem da Índia. Declaro, pois, que para fugir da situação em que me encontro, estou disposto a casar com uma jovem fina e educada. Peço, pois, a tua irmã mais moça em casamento.

Sorriu o brâmane:

— Pedes em casamento uma jovem que não conheces e que talvez não te aceite para esposo. Em nossa família os casamentos não são ditados pelos interesses pessoais; a mulher deve ser ouvida e suas inclinações pessoais levadas em linha de conta. Se desejas pagar dívidas de jogo com o dote de minha irmã mais moça, sinto dizer-te que estás equivocado, jamais aceitaria, como cunhado, um homem que se arruinou em consequência de uma vida desregrada e pecaminosa!

E, conduzindo-me até a porta de seu palácio, empurrou-me delicadamente para a rua.

Apesar desse péssimo acolhimento, não desanimei. Fui ter à casa em que morava um mercador chamado Meting, que era assíduo frequentador de minha mesa. De mim havia Meting recebido inúmeros obséquios e finezas, e muito dinheiro para ele eu perdera no jogo.

— Que desejas de mim? — perguntou-me. Disse-lhe que precisava de pequeno auxílio.

— Julgas que eu sou algum imbecil da tua espécie? — respondeu-me. — De mim não terás nem um *thalung*2 de cobre!

Desesperado, vendo-me repudiado por todos, e sem recursos para pagar o imenso débito que contraíra, abandonei o palácio e fui ter a um grande bosque nas vizinhanças da cidade. Era meu intento cumprir o juramento que formulara junto ao leito de meu pai.

Escolhi, portanto, entre muitas, uma belíssima árvore. Subi pelo nodoso tronco, sentei-me em um dos galhos mais altos, desenrolei o longo e belo turbante cor de cinza, amarrei uma das suas extremidades em outro galho que estava a meu alcance e fiz na outra extremidade um laço seguro em torno do pescoço. Todos esses preparativos trágicos executei-os com a maior calma, sentindo, embora, o coração opresso pela mais imensa tristeza.

Já ia deixar cair o corpo no espaço, quando, ao reforçar o laço fatal que me estrangularia, notei que havia na ponta do turbante, por dentro, qualquer coisa de muito resistente. Que seria? Na esperança louca de encontrar ali qualquer coisa que me pudesse salvar, rasguei o turbante. Embora pareça incrível, senhor, devo contar: de dentro dele retirei uma carta de meu pai redigida nos seguintes termos:

> *Estás desligado do teu juramento. Vai à casa de Kashiã, o tecelão, e pede-lhe a caixa de areia. Quem se salva por um milagre da desonra e da morte deve evitar o erro e procurar o caminho reto da vida.*

Ébrio de alegria saltei da árvore e quase a correr fui ter à choupana onde morava o pobre Kashiã, apelidado "o tecelão"; recebi das mãos desse pobre homem a lembrança que meu pai ali deixara para me ser entregue.

Ao abrir a misteriosa caixa quase desmaiei, tão grande foi o meu assombro. Estava repleta de brilhantes, pérolas e rubis — alguns dos quais valiam mais que as coroas dos príncipes hindus.

Possuidor de tão grande riqueza, não soube dominar a tensão de que fui presa e chorei. Lembrei-me de meu bom pai, sempre generoso e prudente, que ao prever a minha desgraça usara daquele artifício para salvar-me. Era evidente que eu só poderia obter a caixa com auxílio da carta, e a existência desta só chegaria ao meu conhecimento se o turbante fosse por mim próprio desmanchado.

Como louco que se salva de um abismo ao fundo do qual se atirara, assim me vi naquele momento. Depois de lançar aos pés do velho Kashiã um punhado de preciosas gemas, tomei a caixa e encaminhei-me para a cidade. Era minha intenção pagar todas as minhas dívidas e readquirir as minhas antigas propriedades. Quis, porém, a fatalidade que tal não acontecesse.

Ao atravessar um pequeno e sombrio bosque nas margens do Elir, encontrei sentada sob uma grande árvore uma jovem de deslumbrante formosura. Os seus olhos azuis tinham um pouco do céu da Índia com os reflexos mais verdes do mar de Omã. As faces eram como as da terceira deusa do templo de Yhamã. Os lábios da linda criatura tinham um encanto a que talvez não pudesse resistir o faquir mais puro e mais santo da terra. Com essas comparações não exagero a beleza da desconhecida; ao contrário, fico muito aquém da verdade.

A jovem chorava. Os seus soluços vibravam em ondas de indizível angústia.

— Que tens, ó jovem? — perguntei-lhe carinhoso, aproximando-me dela. — Qual é o motivo do teu pranto? Se para o teu mal há remédio, dentro dos recursos humanos, certo estou de que saberei livrar-te de qualquer desgosto!

Isso eu dizia tendo sob um dos braços a preciosa caixa, cheia de cintilantes pedras que me dariam ouro, fama e poderio.

Sem interromper o seu copioso pranto, a jovem olhou com surpresa para mim, segurou com os lábios o belo manto de seda que lhe caía sobre os ombros, e, puxando-o para o lado, deixou a descoberto o colo e os braços mais alvos, ambos, do que as penas das garças sagradas de Hamadã.

Recuei horrorizado. A infeliz tinha as duas mãos cortadas junto aos pulsos!

— Ó desditosa criatura! — exclamei, a alma oprimida pela maior angústia. — Qual foi o bárbaro autor de tamanha crueldade? Conta-me a causa de tua desgraça, e fica certa de que poderás armar o meu braço com o ódio que a vingança te souber inspirar.

A desditosa jovem, entre soluços, narrou-me o seguinte:

Notas

1 Uma das muitas formas que os hindus atribuem às divindades. Vichnu é representado por dez formas diferentes. (B. A. B.)

2 *Thalung* — moeda de ínfimo valor.

10ª Narrativa

História da filha mais moça do rei Ikamor, apelidada "A Noiva de Mafoma".
Das Mil histórias sem fim *é esta a décima!*
Lida a décima restam, apenas, novecentas e noventa...

I

Das três filhas do rei Ikamor era eu a mais moça e devo dizer — sem pecar contra a modéstia — que minhas irmãs não levavam sobre mim vantagem alguma no tocante a graças e encantos pessoais.

Monótonos e suavemente decorreram os primeiros anos de minha existência. Sem grandes alegrias — é verdade — mas também sem tristezas que abatem e afligem. Vivia fechada no rico e imenso serralho[1] real de Candahar, verdadeira fortaleza, onde meu pai, rei do Afeganistão, conservava não só a mim e minhas irmãs, como também suas esposas, em absoluta reclusão, conforme o tradicional costume do país.

Para o nosso serviço poderíamos dispor de várias e dedicadas escravas, muito embora os nossos passos fossem dia e noite vigiados por um grupo de guardas, vingativos e intrigantes, que à menor suspeita nos levavam ao terrível Abdalis — o chefe —, sujeito impiedoso que tinha autorização para punir-nos e até infligir-nos castigos corporais!

Abdalis (infame criatura!) era a personificação da perversidade; quando a sombra de sua agigantada figura aparecia no longo corredor, as mulheres de Candahar ficavam pálidas, em silêncio, e encolhiam-se sobre as almofadas, trêmulas de pavor.

Precisamente no dia em que eu completava dezesseis anos, meu pai viu-se obrigado a iniciar uma guerra de vida e morte contra o famoso xá Zemã, o Vingativo, que se dizia pretendente ao trono de Ikamor.

Para que uma derrota em tal campanha não trouxesse como consequência a ruína e a devastação do país, meu pai, que de poucos recursos militares podia dispor nessa época, achou que seria prudente e indispensável fazer uma aliança com o rei Barasky, soberano de Beluchistão.

Esse odiento monarca forçou-o a assinar um tratado no qual fez incluir algumas exigências vexatórias para os afegãos. Entre essas, uma havia menos absurda do que insultuosa: era eu obrigada a aceitar como esposo o indigno aliado do meu país!

Seja Alá testemunha da verdade do que vou dizer. Não conhecia o tal rei Barasky; ouvira, porém, de uma velha escrava persa vários e minuciosos informes que me levaram a concluir que ele devia ser, como o ignóbil Abdalis, velho, feíssimo, excessivamente gordo e mau.

Como aceitar um noivo cuja simples evocação a minha alma repelia horrorizada?

Implorei chorosa a proteção e o auxílio do velho Kattack, o astrólogo, único homem que tinha permissão para entrar (quando acompanhado por um guarda) no harém de Candahar.

O bondoso Kattack disse-me:

— Ó minha infeliz princesa! Bem negro é o vosso destino! Deixai-me ler nos astros a vossa sorte, sem o que nada poderei fazer.

Tais palavras encheram-me de esperanças o coração. Eu bem sabia que o meu venerável amigo era exímio em ler no céu os mistérios que os astros escrevem à noite com a luz que colhem durante o dia do infinito.

Dias depois meu pai procurou-me. Vinha agitado, nervoso, impaciente, e parecia que em seu espírito se digladiavam as mais desencontradas preocupações.

— Minha filha — disse-me, afagando-me carinhoso o rosto. — Sinto dizer-te que o casamento com o rei Barasky é impossível! O sábio Kattack acaba de ler no céu graves revelações a teu respeito!

— Dize, meu pai — implorei. — Que nova desgraça paira sobre mim?

— Desgraça? Longe de nós tal palavra! O teu futuro sorri a salvo de qualquer infortúnio. Bem sabes que, segundo uma velha lenda árabe, de cem em cem anos o profeta Mafoma (com Ele a oração e a paz) desce à terra a fim de escolher uma noiva entre as jovens mais formosas. Aquela que tem a felicidade de agradar ao Profeta é incluída no número das mulheres perfeitas2 e só poderá casar com um homem qualquer se ao fim de três anos e onze dias o Profeta (a paz sobre Ele!) não vier buscá-la.

— Ó meu pai — balbuciei desolada. — Custa-me acreditar que seja verdadeira tão espantosa revelação celeste. Como poderia eu, feia e pouco gentil, despertar a atenção do Profeta de Alá?

A tais palavras, tão despidas de sinceridade, retorquiu meu pai:

— No que respeita aos teus dotes físicos, faltas pecaminosamente à verdade. A tua deslumbrante formosura é reconhecida e proclamada pelas filhas de meu tio.3 Devo-te, porém, um aviso para o qual o prudente Kattack me chamou especialmente a atenção. Se durante o prazo de três anos e onze dias, por uma fraqueza de tua parte, traíres o voto de fidelidade ao Profeta, sofrerás um castigo terrível: terás amputadas ambas as mãos!

— Tranquiliza-te, meu pai — respondi. — Eleita do Profeta, ser-lhe-ei fiel não durante esse ridículo prazo de três anos e onze dias, mas durante meio século!

E terminei por declarar, com uma segurança que até a mim própria causou espanto:

— Se o Profeta não me vier buscar, ficarei solteira toda a vida!

II

A situação especial de ser noiva do Profeta facultava-me regalias excepcionais no serralho. Era-me permitido subir sozinha ao terraço, não só pela manhã, como a qualquer hora do dia ou da noite; e, acompanhada de uma escrava, tinha a liberdade de passear pelos jardins de Candahar, depois da última prece.

As outras mulheres do harém deitavam sobre mim olhares terríveis a que a inveja emprestava colorações estranhas.

Devo dizer, com sinceridade, que nunca dera crédito a essa lenda do noivado com Mafoma. Desconfiei desde logo — e mais tarde certifiquei-me da exatidão de tal desconfiança — que não passava o caso de um original artifício de que o ardiloso Kattack lançara mão para livrar-me do rei Barasky.

O bom astrólogo não tardou em fazer-me, a respeito, completas confidências:

— Minha linda princesa — disse-me uma noite, quando cavaqueávamos a sós no jardim —, bem sabeis que abusei da boa-fé do vosso pai, o rei Ikamor, fazendo-o acreditar nessas absurdas núpcias com o Profeta. Mas, se assim procedi, mereço perdão, dado o fim nobre que tinha em vista: queria livrar-vos das garras de um homem devasso e cruel! Passado, porém, o prazo de três anos e onze dias, a guerra estará terminada e o rei Ikamor, livre das exigências desse aliado indesejável, poderá repelir qualquer proposta menos digna que vise à tua mão.

E, assim conversando, chegamos juntos a um poço onde nadavam muitos peixes vermelhos.

— Que lindos peixes! — exclamei.

— Já conheceis, ó princesa! — perguntou-me o astrólogo —, a famosa lenda que explica a origem dos peixes vermelhos?

Respondi-lhe que não e que muito folgaria em ouvi-la.

O sábio Kattack contou-me então o seguinte:

Notas

1 Serralho — palácio. Uma das partes do serralho é o *harém*; é constituído pelas salas e quartos destinados às mulheres.

2 As mulheres "perfeitas" são em número de cinco e todas aparecem citadas no Alcorão.

3 Maneira pela qual os árabes tratam as esposas.

11ª Narrativa

Lenda dos peixes vermelhos — contada, nos jardins de Candahar, pelo astrólogo do rei à "Noiva de Mafoma".
Das Mil histórias sem fim *é esta a décima primeira!*
Lida a décima primeira restam, apenas, novecentas e oitenta e nove...

Alguém já vos disse, princesa, que o famoso rio Eufrates — cujas águas são mais vagarosas do que as caravanas do deserto — banha durante o seu longo e sinuoso curso a pequenina aldeia de Hit — hoje quase em ruínas —, outrora residência favorita dos príncipes do Islã.

Já vos contaram, também, senhora, que nessa aldeia de Hit vivia um humilde casal de pescadores árabes. Eram tão pobres que mal ganhavam num dia a tâmara e o pão com que se alimentavam no dia seguinte.

Não me recordo, senhora, do que escreveram a respeito os sábios e poetas muçulmanos desse tempo; não ignorais, porém, com certeza, que os pescadores de Hit — que figuram nesta lenda — tinham uma filha cujo nome deveis guardar para sempre na memória: chamava-se Radiá. Essa encantadora criatura reunia as três feições que faziam a glória de Fátima, a filha de Mafoma: a beleza que deslumbra; a bondade que atrai; e a simpatia que vence e domina os corações! Atentai, senhora, que Radiá era tão boa e de alma tão simples que muitas vezes quando via o pai aproximar-se do rio, levando a pesada rede, atirava à água várias pedras com o fim de afugentar para bem longe os peixes imprudentes.

— Ó menina — murmurava bondoso o paciente pescador —, se fizeres fugir todos os peixes eu nada mais poderei pescar!

Conta-se, ainda, que um dia Radiá, ao regressar de um passeio, encontrou casualmente vazia a mísera cabana em que morava: o pai tinha ido comprar tâmaras e mel num oásis próximo, e a mãe fora ao rio encher um cântaro de água.

Notou Radiá que o fogo estava aceso e que haviam sido deixados, a fritar, numa panela de barro, alguns peixes apanhados ao nascer do dia.

— Pobres peixinhos! — murmurou aflita a boa menina. — Que tortura estarão eles sofrendo! Vou tentar salvá-los ainda!

E arrebatando a panela que fumegava, correu para o rio e despejou nas ondas do grande Eufrates os peixes com que ia ser preparada, naquele dia, a ceia dos pescadores, sua própria ceia!

Alá, como deveis saber, é infinitamente justo e clemente. Qualquer ato bom e puro tem de Deus uma recompensa dez vezes maior — assim nos ensina o Alcorão, na sua eterna e incriada sabedoria.

Eis, portanto, senhora, o que aconteceu: por um milagre do Onipotente, os peixes, já avermelhados pelo fogo, foram novamente restituídos à vida e saíram a nadar, perfeitos, no seio profundo das águas.

Desses peixinhos, ó formosa sultana!, que a linda menina de Hit atirou ao rio — e que conservaram, pela vontade de Alá, a cor que o fogo lhes imprimira — nasceram os curiosos peixes vermelhos, enlevo dos ricos aquários.

12ª Narrativa

Continuação da história da filha mais moça do rei Ikamor, apelidada "A Noiva de Mafoma".
Como as esposas do rei planejaram a morte do homem que as vigiava e o que depois sucedeu.
Das Mil histórias sem fim *é esta a décima segunda!*
Lida a décima segunda restam, apenas, novecentas e oitenta e oito...

Uma noite, o velho Kattack veio ter comigo e disse-me em voz baixa, com infinita cautela:

— Estou informado, princesa, de que as esposas do rei Ikamor conspiram contra a vida de Abdalis, o guarda, que será envenenado amanhã ou depois. Não posso prever as consequências desse crime; certo estou, entretanto, de que as criminosas têm também intenções perversas a vosso respeito.

Aquela grave denúncia caía sobre mim como o simum do deserto sobre o viajante desprevenido. Tão grande foi o meu espanto que fiquei muda, estarrecida, diante do astrólogo.

— Para completa segurança, princesa, vou revelar-vos um segredo. Há uma passagem subterrânea secreta que liga Candahar à gruta de Telix. Vou ensinar-vos esse caminho, de cuja existência nem mesmo o rei tem conhecimento, para que possais fugir daqui em caso de perigo!

Não eram infundadas as suspeitas do velho Kattack. Passados dois ou três dias achava-me, ao cair da noite, em meu aposento, quando ouvi vozes e gritos desencontrados.

Um guarda, chamado Zeieb, dominando a gritaria, vociferava:

— Abdalis morreu! Mulheres, ao *hamã*!1

Aquela ordem, vinda de um homem de cujos maus sentimentos não se podia duvidar, obrigou-me a tomar uma resolução extrema, fugir o mais depressa possível.

Procurei, sem perda de tempo, alcançar o subterrâneo secreto e por ele caminhei corajosamente, no meio da mais completa escuridão.

Momentos depois achei-me em liberdade no meio de um dos grandes parques que circundavam Candahar.

A princípio embriagou-me a liberdade; cedo, porém, encarando com serenidade a situação, compreendi que jamais correra tanto perigo como naquele momento, perdida, sozinha, no meio daquele bosque tenebroso.

Quando meditava sobre uma resolução a tomar em tal emergência, ouvi vozes de homens que se aproximavam. Um deles trazia na mão uma lanterna. Escondi-me rapidamente atrás de uma grande árvore e, confiante no destino, aguardei os acontecimentos.

A luz da lanterna permitiu-me que reconhecesse um dos caminhantes noturnos. Era o astrólogo Kattack, meu velho amigo e confidente. O outro era um jovem de fisionomia atraente, mas que parecia abatido por uma grande tristeza.

A dois passos do lugar que me servia de esconderijo, os dois pararam.

O sábio Kattack disse então ao moço, que eu soube, mais tarde, ser seu filho:

— Breve estarás casado com aquela que todos julgam noiva de Mafoma. Só conseguirás, porém, recursos para o teu casamento se obtiveres a vitória no grande concurso de poesias promovido pelo rei Barasky.

— Como poderei vencer todos os poetas da corte? — objetou o moço com voz triste e cheia de desânimo.

— É muito simples, meu filho — tornou o astrólogo. — Logo que chegares diante do trono, dirás ao vaidoso Barasky os versos famosos com que Ibraim Ben-Sofian, o poeta, derrotou o célebre rei Senedin, do Laristã.

Depois de uma ligeira pausa, o astrólogo prosseguiu com tranquila segurança:

— Não deves, meu filho, temer o futuro nem afligir o coração com as torturas da incerteza. Lembra-te do que disse um poeta:

Só quem um dia desolado vir
Seu ideal mais puro derrubado.
Só quem a ventura já sentiu,
Sentiu-a sem jamais ter blasfemado:
Quem conheceu a dor, algumas vezes,

E o desespero e o sofrimento mudo;
Só quem fugiu da vida muitos meses,
E afastou-se da vida e assim de tudo,
... e quem, depois, voltou de novo à vida
purificado em sua própria dor!
— só esse pode, de alma comovida,
*amar a vida com imenso amor!*2

Certo estou de que os versos de Ben-Sofian garantirão a tua vitória no concurso.

O jovem indagou com viva curiosidade:

— Que versos são esses, meu pai? Respondeu o prudente astrólogo:

— Para que possas compreender os versos mais assombrosos do mundo, é preciso que conheças as origens deles. Vou contar-te um dos casos mais surpreendentes da nossa História.

E tem sempre presente, em teu pensamento, para teu conforto, as admiráveis palavras:

Esperança tão fingida
de me enganar não se cansa...
Ai, porém, de minha vida.
*Se não houvesse Esperança...*3

E, a seguir, o honrado ulemá narrou a singular história que ouvi emocionada e curiosa:

Notas

1 *Hamã* — sala de banhos.

2 Versos de Luís Otávio, em “Saudade... Muita Saudade!...”

3 Luís Otávio, ob. cit.

13ª Narrativa

História de um rei e de um poeta que gostava da filha do rei. De que estratagema usava o monarca para desiludir os pretendentes à mão de sua filha. Como conseguiu o poeta vencer a teimosia do pai de sua amada.
Das Mil histórias sem fim *é esta a décima terceira!*
Lida a décima terceira restam, apenas, novecentas e oitenta e sete...

I

Em Laristã, na Pérsia, reinava, há muitos séculos, um monarca famoso e rico chamado Senedin.

Esse rei (Alá se compadeça dele!) era dotado de uma memória tão perfeita que repetia, sem discrepância da menor palavra, o pensamento, em prosa ou verso, que ouvisse uma só vez. Essa prodigiosa faculdade do soberano os súditos de Laristã ignoravam completamente.

O rei Senedin tinha um escravo, chamado Malik, igualmente possuidor de invulgar talento. Esse escravo era capaz de repetir, sem hesitar, a frase, o verso ou o pensamento que ouvisse duas vezes.

Além desse escravo, o poderoso senhor do Laristã tinha também uma escrava não menos inteligente. Leila — assim se chamava ela — podia repetir, facilmente, a página em prosa ou em verso que tivesse ouvido três vezes.

Quis a vontade de Alá (seja o Seu nome exaltado!) que o rei Senedin tivesse uma filha de peregrina formosura. Segundo os poetas e escritores do tempo, a princesa do Laristã era mais sedutora do que a quarta lua que brilha no mês do Ramadã.1

Embora vivesse fechada no harém do palácio real, entre escravos que a vigiavam, a fama da encantadora Roxana se espalhou pelo país, atravessou os desertos, transpôs as fronteiras e foi ter aos reinos vizinhos.

Vários príncipes e xeques poderosos vieram a Laristã pedir a formosa princesa em casamento.

O rei Senedin era pai extremoso; tinha pela filha enternecido afeto, e não queria, portanto, separar-se dela, o que fatalmente aconteceria se a jovem e encantadora criatura casasse com um príncipe estrangeiro da Arábia, da Síria ou da China.

Negar, porém, sistematicamente a todos os numerosos pretendentes era um proceder que não convinha à boa política diplomática do Laristã. Na verdade, alguns apaixonados de Roxana eram abastados e poderosos, e faziam-se acompanhar de cortejos tão pomposos e tão bem armados, que menos pareciam caravanas do que exércitos!

À vista de tão respeitáveis e valorosos pretendentes — que uma recusa formal poderia ferir ou melindrar — declarou o rei Senedin que só daria a sua filha em casamento àquele que fosse capaz de recitar, diante dele, uma poesia inédita, desconhecida e original!

Curiosíssimo foi esse certame que agitou durante muito tempo a população inteira do velho país do Islã.

Apresentou-se, em primeiro lugar, o famoso Al-Tamini Ben-Mansul, príncipe de Tlemcen, moço de grande talento, que podia perfilar entre os mais eruditos de seu tempo.

O príncipe Al-Tamini recitou, diante do rei, uma bela e inspirada poesia intitulada "A Estrela", que havia feito em louvor da princesa:

Vi uma estrela tão alta,
Vi uma estrela tão fria!
Vi uma estrela luzindo
Na minha vida vazia.

Era uma estrela tão fria!
Era uma estrela tão alta.

Era uma estrela sozinha
Luzindo no fim do dia.

Por que de sua distância
Para a minha companhia
Não baixava aquela estrela?
Por que tão alto luzia?

Eu ouvi-a na sombra funda
Responder-me que assim fazia
Para dar uma esperança
*Mais triste ao fim do meu dia.*2

Ouviu o rei, com grande atenção, a poesia inteira. Mal, porém, o príncipe Al-Tamini havia recitado o último verso, o inteligente monarca observou num tom em que a naturalidade aparecia sob a máscara da ironia:

— É realmente bela e benfeita essa poesia, ó príncipe! Infelizmente, porém, nada tem de original! Conheço-a, já há muito tempo e sou até capaz de repeti-la de cor!

E o rei repetiu pausadamente, sem hesitar, a poesia inteira, sem enganar-se numa sílaba.

O príncipe, que não podia disfarçar a sua imensa surpresa, observou respeitoso:

— Podeis crer, Vossa Majestade, que há forçosamente, nesse caso, um engano qualquer. Tenho absoluta certeza de que essa poesia é inédita e original. Escrevi-a faz dois ou três dias apenas! Juro que digo a verdade, pela memória de Mafoma, o santo profeta de Deus!

— *El hâ morr!*3 — exclamou o rei. — Há coincidências que perturbam e desorientam os mais prevenidos! Muitas vezes uma poesia que julgamos nova e completamente original já foi escrita, cem anos antes de Mafoma, por Tarafa ou Antar! Quer ter agora mesmo, ó príncipe!, uma prova do que afirmo? Vou chamar um escravo do palácio que talvez já conheça, também, essa poesia.

— Malik!

O escravo que tudo ouvira, escondido cautelosamente atrás de um reposteiro, surgiu, inclinou-se respeitosamente diante do rei, beijando a terra entre as mãos.

— Dize-me, ó Malik!, se não conheces, por acaso, uma ode formosa e popular, cheia de imagens, na qual um poeta beduíno canta uma estrela que luzia no fim do dia?

— Conheço muito bem essa belíssima ode, ó rei dos reis!

O escravo, que já tinha ouvido a poesia duas vezes, repetiu-lhe todos os versos, com absoluta segurança:

Vi uma estrela tão alta.
Vi uma estrela tão fria!
Vi uma estrela luzindo
Na minha vida vazia.
....
....
....

Em seguida o rei mandou que viesse a sua presença a escrava Leila, que se conservara também escondida em discreto recanto do salão.

A esperta rapariga, que três vezes ouvira a poesia do apaixonado príncipe, sendo interrogada, repetiu por seu turno todos os versos do príncipe, do princípio ao fim, com fidelidade impecável:

Vi uma estrela tão alta,
Vi uma estrela tão fria!
Vi uma estrela luzindo
Na minha vida vazia.
....
....
....

Diante de provas tão seguras e evidentes retirou-se humilhado o rico Al-Tamini Ben-Mansul, príncipe de Tlemcen.

II

Muitos outros pretendentes — xeques, vizires, cádis e poetas — foram ter à presença do rei Senedin, mas todos, graças aos recursos e estratagemas do monarca, voltavam desiludidos e convencidos de que os versos que haviam escrito eram velhos, velhíssimos e andavam na boca de soberanos e vassalos! Eram — afirmava sempre o rei — anteriores a Mafoma! (Com Ele a oração e a glória.)

Entre os incontáveis apaixonados da formosa Roxana, havia, porém, na Pérsia um jovem e talentoso poeta chamado Ibrahim Ben-Sofian.

Não podia ele admitir que o rei Senedin conhecesse de cor todos os versos que os inúmeros pretendentes escreviam.

"Há aí algum misterioso estratagema", pensava ele excogitando o caso.

A desconfiança sugere muitas vezes ao homem ideias e recursos imprevistos; é como a luz do sol, que empresta às nuvens colorações que elas não possuem.

Bem dizem os árabes: "Aquele que desconfia vale sete vezes mais do que qualquer outro."

Resolvido, portanto, a deslindar o segredo, o poeta Ibrahim escreveu uma longa poesia intitulada "A lenda do Vaso Partido", empregando, porém, as palavras mais complicadas e mais difíceis do idioma persa. Gastou nessa paciente tarefa muitos meses.

Terminado o trabalho, o talentoso poeta apresentou-se à prova diante de Senedin, senhor do Laristã.

Em dia marcado, na presença de vizires e nobres, o rei Senedin recebeu o poeta Ibrahim Ben-Sofian.

O monarca tinha a convicção de que venceria o novo pretendente empregando o mesmo modo e o mesmo artifício com que soubera iludir todos os outros.

Ibrahim leu com vagar os versos tremendos e complicados que compusera com vocábulos quase desconhecidos. Não havia memória capaz de conservar por um momento sequer as palavras esdrúxulas que o poeta proferia.

O rei, ao perceber o recurso singular de que lançara mão o poeta, sentiu que sua privilegiada memória fora, afinal, vencida; não quis, entretanto, confessar-se derrotado.

— Ouvi com agrado os teus versos — declarou com visível constrangimento. — Devo dizer que não os conheço. São certamente originais. E como a minha palavra foi dada, casarás com a minha filha. Desejo, entretanto, fazer-te um pedido. Quero conhecer "A lenda do Vaso Partido", tantas vezes citada em tua poesia.

— Escuto-vos e obedeço-vos — respondeu o poeta. — Para mim nada mais simples do que narrar essa belíssima história.

E assim começou:

Notas

1 Ramadã — mês da quaresma muçulmana. Durante esse mês (28 dias) o jejum é obrigatório desde as primeiras horas do dia até o cair da noite.

2 De Manuel Bandeira, *Poesias Completas* (pág. 167).

3 Expressão citada sob a forma de provérbio: "A verdade é amarga!"

14ª Narrativa

Singular episódio ocorrido em Bagdá. Estranho proceder de um xeque que adquire um jarro riquíssimo para espatifá-lo logo em seguida.
Das Mil histórias sem fim *é esta a décima quarta!*
Lida a décima quarta restam, apenas, novecentas e oitenta e seis...

Da janela de minha casa, em Bagdá, observava uma tarde o vaivém dos aventureiros e beduínos, quando a minha atenção foi despertada por um fato que me pareceu estranho e muito singular.

Um homem, ricamente trajado, aproximou-se de um velho mercador que oferecia à venda, sob largo toldo, uma bela coleção de jarros de diversas formas. Depois de escolher, com um empenho que me pareceu exagerado, a peça que mais lhe interessava, o desconhecido pagou ao vendedor, sem hesitar, o preço exigido. Isso feito, encaminhou-se para o meio da rua e levantando, com ambas as mãos, o jarro atirou-o com toda força contra uma pedra, espatifando-o.

— É um louco! — murmurei. E, como não sei resistir à atração que sobre mim exerce o ímã da curiosidade, fui sem demora juntar-me ao grupo dos que faziam roda ao desatinado comprador.

O homem, entretanto, sem se preocupar com os árabes e cameleiros que bem de perto o observavam, abaixou-se e começou a ajuntar vagarosamente os cacos, como se lhe movesse a intenção de reconstituir o que ele mesmo destruíra inexplicavelmente.

Xeques e caravaneiros que cruzavam a rua, vendo o caminho impedido pelo ajuntamento, gritavam do alto dos *maharis:*[1]

— Passagem! Eia! Por Alá! Passagem!

Ao cabo de algum tempo tornou-se enorme a confusão; os mais exaltados, proferindo insultos e blasfêmias de toda espécie, tentavam maldosamente atropelar e pisar com seus camelos os curiosos parados em grupos no meio da rua.

Temendo que aquele incidente degenerasse num conflito mais sério, deliberei intervir.

Aproximei-me do desconhecido, tomei-o pelo braço e disse-lhe:

— Quero levar-vos, meu amigo, até a minha casa! Tenho em meu poder diversos jarros persas e chineses com desenhos admiráveis.

Sem se mostrar surpreendido ou contrariado pelo intempestivo convite, o jovem acompanhou-me sereno, sob o olhar atônito da multidão!

Ficamos sós. Ofereci-lhe, com demonstrações de alta cerimônia, tâmaras e água, mas ele nada aceitou. Quis apenas provar o pão e o sal da hospitalidade.

Teria, afinal, o meu estranho hóspede perdido o uso da razão?

— Onde estão os teus jarros chineses? — perguntou-me, percorrendo insistente, com o olhar, todos os cantos da sala.

— Peço perdão, ó xeque! — respondi —, faltei há pouco à verdade quando vos disse possuir jarros da China e da Pérsia. Queria, apenas, inventar um pretexto para arrancar-vos do meio daqueles exaltados muçulmanos! *Bedal matghechoc ôlloh fê-vechoc!*2 Bem vejo que sois estrangeiro e desconheceis, por certo, o gênio arrebatado e violento do povo desta terra. Rara é a semana em que não assistimos, pelas praças e ruas, distúrbios e correrias. Às vezes, por causa de ninharias e frivolidades, homens são assassinados e ricas lojas saqueadas em poucos instantes. Os guardas não dominam os ímpetos sanguinários da população. Se houvesse, há pouco, um conflito com os caravaneiros turcos, a vossa vida estaria em grave perigo!

Riu o desconhecido ao ouvir a minha explicação.

— *Uallah!*3 — exclamou. — Julgavas, então, que eu fosse um fraco, um demente? É interessante! Vou contar-te a minha história e o motivo que me levou a quebrar um jarro no meio da rua.

Antes, porém, de dar início à prometida narrativa, o jovem maníaco sentou-se sobre uma almofada (que cuidadosamente ajeitara), colocou diante de si, sobre o tapete, dois fragmentos do jarro que ele, pouco antes, estilhaçara em plena rua e pôs-se a observá-los com a atenção de um obstinado.

Pareceu-me que seria mais delicado ou talvez mais cauteloso não perturbar o meu hóspede. Acomodei-me, sem-cerimônia, diante dele, acendi o meu delicioso narguilé e entreguei-me à tarefa de reparar e estudar as estranhas atitudes do lunático quebrador de vasos.

Teria, no máximo, trinta e um ou trinta e dois anos; seus olhos eram azulados; sua barba clara tinha reflexos cor de ouro vivo. Ostentava, com natural elegância, um aparatoso turbante de seda amarela no qual cintilava uma pequena pedra verde-escura.

De repente, a fisionomia do jovem tornou-se radiante, como se surpreendente inspiração o iluminasse. Ergueu o rosto e disse-me risonho:

— Afinal, o sultão perdoou o segundo condenado e este, sem querer, salvou o companheiro!

Aquela frase, para mim, não tinha sentido. Parecia disparate.

— Que sultão é esse, ó jovem? — interpelei-o com exagerada complacência, na certeza de que falava a um infeliz demente.

— Lamentável distração a minha! — exclamou com vivacidade. — Acreditei que fosses capaz de adivinhar os meus pensamentos e seguir o rumo da história que estive, aqui sentado, a arquitetar! Conforme prometi, vou contar-te o enredo de minha vida, e esclarecer os episódios que me forçaram a esfacelar o jarro diante da tenda de um mercador. E tudo compreenderás.

E na linguagem límpida e correta de um homem educado e culto, contou-me o seguinte:

Notas

1 *Mahari* — Camelo de sela. (B. A. B.)

2 É preferível agora não enganar, e dizer-te logo a verdade!

3 *Uallah* ou *Ualá* — Por Deus! (B. A. B.)

15ª Narrativa

História de um "Contador de Histórias". Como um jovem, sentindo-se atrapalhado, põe em prática os ensinamentos contidos num provérbio hindu!
Das Mil histórias sem fim *é esta a décima quinta!*
Lida a décima quinta restam, apenas, novecentas e oitenta e cinco...

Rafi An-Hari é o meu nome. Meu pai, que era um hábil negociante, fazia de quando em vez uma viagem a Sirendib,[1] aonde ia em busca de especiarias que ele revendia com apreciáveis lucros aos seus agentes de Basra.

Quis, porém, o destino que meu pai viesse a morrer em consequência de um naufrágio, desaparecendo com todas as riquezas e dinheiro que transportava. Ficou a nossa família em completo desamparo. Forçado pelas necessidades da vida a procurar trabalho, empreguei-me como escriba em casa de um xeque muito rico chamado Ibraim Hata. Uma noite, conversando casualmente com o meu patrão, disse-lhe que sabia contar várias histórias.

— Se é verdade o que acabas de revelar — ajuntou o xeque —, vou dar-te, em minha casa, o emprego de contador de histórias. Passarás a ganhar o triplo de teu atual ordenado!

Aquela decisão do meu generoso amo causou-me não pequena alegria. Passei a exercer no palácio de Ibraim Hata um cargo invejável: *contador de histórias*. Todas as noites, invariavelmente, o xeque Ibraim reunia em sua casa vários parentes e amigos; e eu, na presença dos ilustres convidados, contava uma lenda ou uma fábula qualquer. Em geral, finda a narrativa, os ouvintes mais entusiasmados felicitavam-me com palavras de estímulo e davam-me ainda peças de ouro. Vivi assim, regaladamente, durante meses semeando na imaginação dos que me ouviam todos os sonhos e fantasias dos contos árabes.

Hoje, finalmente, pela manhã, fui avisado de que haviam chegado do Egito vários amigos do xeque, mercadores ricos e prestigiosos, que seriam incluídos entre os meus numerosos ouvintes para o conto da noite.

Em outra ocasião tal acontecimento seria para mim motivo de júbilo; agora, porém, veio causar-me um grande pavor, deixando-me o coração esmagado por uma angústia sem limites. E a razão é simples: tendo desfiado, sem cessar, até a minha última pérola, o colar das minhas histórias e fábulas, nada mais restava do meu tesouro! Como inventar, de momento, um conto interessante e maravilhoso capaz de agradar aos meus nobres e exigentes ouvintes?

Preocupado com a grave responsabilidade que pesava sobre meus ombros, deixei pela manhã o palácio de meu amo e deliberei caminhar ao acaso, pelas ruas da cidade, pois tinha a esperança de encontrar alguém que me pudesse tirar do embaraço em que me achava. Procurei nos cafés os contadores profissionais de maior fama e consultei-os sobre as melhores narrativas que conheciam; apesar da recompensa que eu prometia, não consegui ouvir de nenhum deles história que fosse nova para mim; citavam-me algumas — é verdade — mas todas elas já tinham sido por mim mesmo narradas ao xeque.

O desânimo — acompanhado de uma inquietação perturbadora — já começava a esmagar as fibras restantes de minha energia, quando me veio, não sei por quê, à lembrança, um antigo provérbio hindu: "Um jarro quebrado alguma coisa recorda." "Quem sabe", pensei, agarrando-me ainda uma vez à esperança, "quem sabe se um jarro partido não me fará lembrar uma história há muito esquecida no meu passado pela caravana indolente da memória?"

Conta-se (Alá, porém, é mais sábio!) que o famoso poeta Moslini ben el Valid foi, certa vez, vítima de grave atentado. Fizeram cair sobre ele, atirado do alto de um terraço, grande e pesadíssimo jarro. Veio o jarro espatifar-se aos pés do poeta e uma das estilhas, saltando impelida pela violência do choque, foi ferir de leve o rosto de Moslini. O jarro, fabricado por um oleiro de Medina, trazia em letras douradas, sobre fundo azul, a seguinte inscrição:

> *"O que se adquiriu pela força só se*
> *pode conservar pela doçura."*

O fragmento que feriu Moslini era, precisamente, aquele que continha a palavra *"doçura"*.

Aconselharam ao poeta que levasse o caso ao conhecimento do juiz. A culpada (fora uma jovem ciumenta a autora do atentado) devia ser punida. Recusou-se, porém, Moslini, a apresentar queixa ou acusação, dizendo: "Não posso pedir castigo ou punição para uma pessoa que me feriu com tanta 'doçura'."

Confirmava-se, mais uma vez, o provérbio: "Um vaso quebrado alguma coisa recorda."

Movido por essa ideia, adquiri um jarro, depois de meticulosa escolha e pondo em execução o plano delineado, limitei-me a reduzi-lo a estilhas no meio da rua.

— E o processo deu resultado? — perguntei, interessado. — Veio à vossa memória, depois do sacrifício, alguma história interessante, digna de ser contada a um auditório seleto?

A minha ingenuidade fez rir novamente o inteligente Rafi An-Hari.

— *Ualá!* — exclamou, batendo-me no ombro. — O tal jarro, depois de partido, fez-me recordar um conto, muito original, que poderá divertir os viajantes ilustres e agradar ao bom e generoso xeque Ibraim. E sabes, meu amigo, que história é essa?

— Interessa-me conhecê-la — respondi. — Deve ser muito original.

Vendo-me dominado pela curiosidade, o inteligente Rafi An-Hari contou-me o seguinte:

Notas

1 Antigo nome de Ceilão.

16ª Narrativa

História de dois infelizes condenados que são salvos de modo imprevisto, no momento em que iam morrer.
Por causa da sentença de um sultão encontramos, com surpresa, um famoso narrador de histórias.
Das Mil histórias sem fim *é esta a décima sexta!*
Lida a décima sexta restam, apenas, novecentas e oitenta e quatro...

Conta-se — Alá, porém, é mais sábio[1] — que o sultão Ali Machem, senhor de Khorassã, por um capricho extravagante, foi certa vez, acompanhado de seu grão-vizir, emires e conselheiros, assistir à execução de dois infelizes beduínos da tribo de Lenab.

Em dado momento, quando o carrasco, já prestes a desempenhar a sua torva, punha termo aos últimos preparativos, o condenado que devia ser justiçado em segundo lugar adiantou-se alguns passos, aproximou-se do rei, e disse-lhe, depois de saudá-lo humildemente:

— Deus vos cubra de incalculáveis benefícios, ó rei! Bem sei que poucos momentos me restam de vida. Já vejo Azrail, o Anjo da Morte, aproximar-se de mim. Desejo, contudo, merecer de vossa inexcedível bondade um último favor!

— Fala, beduíno — ordenou o rei. — Dize o que pretendes de mim. Jamais desatendo, quando possível, ao derradeiro pedido de um condenado!

— Rei magnânimo! — respondeu o árabe. — O meu desejo vale menos do que uma tâmara depois de um banquete do califa. Gostaria de ser executado antes de meu companheiro e não depois dele, como parece vai dar-se!

Não foi pequena a surpresa do monarca ao ouvir tão inesperada solicitação.

— Não tenho dúvida alguma em atender ao teu pedido — retorquiu o rei. — Acho-o, porém, bastante curioso e não encontro, de pronto, motivo capaz de justificá-lo satisfatoriamente.

Sem deixar transparecer a menor cavilação, o condenado assim explicou:

— A razão é simples, ó sultão! Esse homem, que devia preceder-me no suplício, é um hábil contador de histórias e profundo conhecedor das lendas mais famosas do Islã. É meu intento, portanto, precedendo-o na morte, proporcionar a um árabe tão culto alguns minutos mais de vida!

O rei Machem — dizem os cem historiadores de seu tempo — era um soberano bondoso e justo. Ao ouvir a declaração do condenado sentiu que lhe competia, no mesmo instante, lavrar uma sentença digna do sucesso; e movido por tão humanitários sentimentos exclamou:

— Ualá! Se assim é, ó muçulmano, estão ambos perdoados! Por ser um grande narrador de lendas, o teu amigo jamais sofrerá castigo de morte; e tu também fizeste jus ao perdão pela forma admirável com que acabas de demonstrar a tua generosidade.

O maldoso grão-vizir Kacem Riduam (*Cheitã*2 o castigue!), que até então se conservara em silêncio, dirigindo-se ao soberano, observou irônico:

— Permiti, ó rei!, ao vosso humilde servo uma observação ditada pela longa experiência que tenho da vida e dos homens. Será, afinal, verdadeira a declaração desse impertinente beduíno? Não estaremos diante de uma mistificação habilmente tramada por um condenado astucioso que pretende, apenas, fugir, pelo oásis da vossa clemência, ao justo castigo de que se fez merecedor?

— A tua suspeita não é de todo descabida! — replicou o rei. — A hipótese que formulaste, meu caro vizir, pode corresponder a uma triste verdade, e é necessário que não exista o menor sulco de dúvida na areia clara do meu espírito. Vou, pois, exigir que o beduíno narrador de lendas dê, aqui mesmo, diante de todos nós, uma prova de seus talentos e habilidades.

E, dirigindo-se ao primeiro dos condenados, disse-lhe o soberano:

— Se não é falso o que a teu respeito alegou, há pouco, o teu bondoso amigo, conta-nos, ó filho do deserto, a mais formosa das lendas que conheces! A prova da tua eloquência deverá ser forte e segura como a caravana de um emir vencedor.

Interpelado pelo sultão, o beduíno, depois de beijar três vezes a terra entre as mãos, assim falou:

— Conheço, ó rei venturoso e digno!, sete mil e uma lendas, algumas das quais são tão belas que fazem lembrar os maravilhosos poemas do célebre Montenébbi.3 Que Deus o tenha em sua paz! Vou contar-vos, porém, para começar, a última de todas essas maravilhosas histórias, que é, a meu ver, a mais rica em ensinamentos e verdade!

Queira Alá que ela apague a dúvida do vosso espírito com a mesma facilidade com que o simum faz desaparecer no deserto os rastros das caravanas!

E, depois de pequeno silêncio, o árabe iniciou a seguinte narrativa:

Notas

1 O muçulmano ortodoxo não faz outra citação (por mais simples que seja) sem ajuntar a fórmula tradicional “Alá, porém, é mais sábio” (do que esta que estou agora citando).

2 *Cheitã* — Demônio.

3 Veja nota à pág. 47.

17ª Narrativa

História de um rei que tinha a cara muito engraçada.
Que fez o rei para evitar que a sua presença causasse hilaridade.
Das Mil histórias sem fim *é esta a décima sétima!*
Lida a décima sétima restam, apenas, novecentas e oitenta e três...

Existiu outrora, no Iêmen, um rei chamado Ibedin Daimã, que se tornou famoso pela originalidade espantosa de seus traços fisionômicos. E a fama justificava-se, pois, em verdade, esse rei tinha uma cara extraordinariamente burlesca. Ninguém podia ficar sério e imperturbável quando observava a máscara chistosa e apalhaçada do rei.

Nas horas de audiência solene, quando o poderoso monarca se apresentava empertigado em seu trono de marfim e pedrarias, os nobres e cortesãos riam estrepitosamente. Não havia como conter-se.

Um dia, afinal, irritado com aquela hilaridade que tanto o humilhava, o soberano árabe resolveu consultar o seu inteligente e habilidoso grão-vizir. Que fazer para pôr termo, de uma vez para sempre, àquelas gargalhadas escandalosas que molestavam o prestígio da coroa e o alto renome do país?

— Nada mais simples — respondeu o primeiro-ministro. — Penso que deveis baixar um decreto determinando que, portas adentro do palácio real, quem quer que seja só terá o direito de rir uma única vez. Severo castigo será imposto àquele que tiver a ousadia de transgredir a vossa determinação.

Concordou prontamente o rei com o alvitre, que achou excelente, e, no dia seguinte, com surpresa de todos, a inesperada decisão posta em letras garrafais percorreu a cidade toda, ao som de estridentes clarins.

Nos termos do tal decreto, as pessoas que se achassem em presença do rei Ibedin só poderiam rir uma vez; aquela que tivesse a petulância ou a insolência de dar segunda mostra de riso seria enforcada.

Houve, nessa mesma semana, uma grande reunião no palácio. Os nobres mostravam-se constrangidos e assustados. Traziam alguns sapatos apertadíssimos, que os faziam sofrer horrivelmente; muitos outros colocaram sob a roupa, contra o corpo, farpas e espinhos que, ao menor movimento, feriam e torturavam as carnes; outros, ainda, levavam à boca, de quando em vez, sementes amargas de sabor detestável. Tudo isso faziam para evitar o desejo louco de rir, quando se lhes deparasse a cara irresistível do rei.

Em meio da audiência, quando o monarca ouvia atento um poeta que declamava um inspirado poema, eis que a risada viva e argentina de um dos presentes vem perturbar repentinamente o silêncio e a gravidade da reunião.

Fora autor daquela intempestiva risada o velho e judicioso Damenil, primeiro-procurador do reino, homem ilustre e de grande prestígio na corte.

E, logo depois, sem dar atenção ao espanto dos que o rodeavam, o digno procurador riu ainda mais forte e mais gostosamente.

Passados alguns instantes, como se estivesse tomado de súbita alucinação, o respeitável Damenil, pela terceira vez, feriu a solenidade da ocasião, com uma longa e estrepitosa gargalhada.

O rei Ibedin, surpreendido com a atitude insólita e desrespeitosa do velho funcionário, ergueu-se furioso e exclamou:

— Não ignoras, por certo, ó procurador!, os termos do último decreto por mim assinado! A tua irreverente conduta nesta assembleia obriga-me a incluir o teu nome entre os que se acham privados da luz da razão. Exijo que justifiques, de modo claro e preciso, as tuas insultuosas gargalhadas. Se não o fizeres de maneira cabal e satisfatória, farei lavrar, neste mesmo instante, a tua sentença de morte!

Diante daquela grave ameaça, o ilustre ancião mostrou-se impassível. A imagem do alfanje do carrasco, prestes a desferir o golpe, não chegava a perturbar a serenidade de sua veneranda figura. Aproximou-se respeitoso do rei e assim falou:

— A primeira vez eu ri, ó magnânimo senhor!, porque a lei me permite rir uma vez. Coube-me rir pela segunda vez por ser procurador da corte. Realmente. De acordo com as funções que exerço, posso falar, cantar ou rir em nome do rei, pois tenho plena autorização para assim proceder. A terceira vez, finalmente, eu ri porque me lembrei, de repente, de uma história que me foi contada, há dois meses, à sombra das tamareiras.

— Que história é essa? — indagou o rei, tomado de viva curiosidade. — Deve ser interessantíssima, pois, ao recordá-la, um homem é capaz de rir, arriscando a própria vida!

Respondeu o procurador:

— É uma lenda tão engraçada que faria rir até uma raposa morta! Intitula-se "História de uma Ovelha Mal-Assombrada".

— Conta-nos, ó irmão dos árabes! — exclamou o monarca —, essa prodigiosa "História de uma Ovelha Mal-Assombrada"!

— Sinto-me forçado a dizer, ó rei — explicou o vizir —, que a minha narrativa iria pôr em perigo de vida todos os nobres e xeques aqui presentes. Assim sendo, só poderei atender ao vosso honroso pedido se for previamente revogada a lei que proíbe as risadas neste palácio!

O rei Ibedin, diante da justa ponderação de seu digno procurador, revogou, no mesmo instante, o decreto que limitava as expansões de alegria a fim de permitir que o sábio narrasse a hilariante "História de uma Ovelha Mal-Assombrada".

No momento em que o ilustre procurador Damenil ia dar início ao conto, o grão-vizir aproximou-se respeitoso do trono e disse:

— Rei do Tempo! Os homens que se interessam pelos problemas da educação afirmam que as histórias que instruem são preferíveis às que divertem. Convém ouvirmos pois, previamente, pela palavra eloquente do judicioso Damenil, um conto que encerre ensinamentos e verdades; a seguir, então, com o espírito bem-esclarecido, poderão todos ouvir o humorístico episódio que faz rir até uma raposa morta.

— É muito justa a vossa ponderação — concordou o rei.

E voltando-se para o procurador acrescentou:

— Conte-nos, ó prudente ulemá!, uma história simples, que traga novos raios de luz aos nossos olhos e uma parcela de conforto aos nossos corações.

— Escuto-vos e obedeço-vos — respondeu o preclaro Damenil.

E narrou o seguinte:

18ª Narrativa

História de um rei que detestava os ociosos. Na qual esse rei encontra três forasteiros, sendo o primeiro um persa que exercia curiosa e estranha profissão.
Das Mil histórias sem fim *é esta a décima oitava!*
Lida a décima oitava restam, apenas, novecentas e oitenta e duas...

Imensa região situada ao norte da África foi outrora governada por um sultão notável chamado Abul Inane.

Esse glorioso monarca tinha a nobre preocupação de combater a ociosidade e não admitia, dentro de suas fronteiras, homem algum que vivesse alheio ao trabalho ou que não dedicasse suas atividades a alguma obra de indiscutível serventia.

Grande, portanto, foi a surpresa do rei quando ao regressar, certa vez, de uma excursão ao oásis de Beni-Hezã avistou três homens que repousavam sob uma árvore.

A dúvida sobre o caso não podia existir. Tratava-se de vadios que fugiam das fadigas do emprego para andar à gandaia, e dormitar negligentes à sombra das tamareiras.

Abul Inane fez parar a sua comitiva e determinou que os três mandriões da estrada viessem à sua presença.

— Malandros! — exclamou furioso o rei. — Não deveis ignorar, por certo, que a ociosidade neste país é um crime. Os meus vizires têm ordem de obter para todos os desocupados um emprego ou um ofício compatível com a capacidade de cada um. Quero ser informado da situação de cada um de vós, pois do contrário sereis castigados impiedosamente.

Um dos desconhecidos, sentindo-se ameaçado por essas palavras, aproximou-se respeitoso do grande monarca e assim falou:

— Rei do Tempo! Seja Alá o vosso guia e o vosso amparo! Há mais de vinte dias chegamos do Egito e, logo que pisamos em vossos domínios, procuramos trabalho dentro de nossas profissões. Depois de muitas tentativas inúteis, fomos pedir o precioso auxílio do grão-vizir. Esse ilustre magistrado declarou, entretanto, que não poderia obter emprego algum que nos servisse, e ofereceu-nos recursos para abandonar o país.

— Não é possível! — contrariou Abul lnane. — Esta terra precisa de homens e seria um crime repelir o auxílio dos bons muçulmanos. Houve, com certeza, engano ou descuido do meu grão-vizir. São infinitas as formas de atividade em meu reino. Asseguro-vos, sob palavra, que serei capaz de obter emprego para qualquer homem de ação. Desejo conhecer, apenas, as vossas respectivas profissões.

Interrogado desse modo pelo glorioso sultão, Merenida, o primeiro dos acusados, assim falou:

— Rei! Venho da cidade de Ispahan, na Pérsia, e exercia lá uma profissão denominada *afifah-segadah-kheyt,* expressão que significa, mais ou menos, "aquele que abre caminho no meio da multidão". Cabe-me dizer que na longínqua Ispahan há, semanalmente, grandes feiras; a cidade é invadida por milhares de forasteiros; as ruas ficam apinhadas e o trânsito torna-se quase impossível. É muito comum que uma pessoa precise, de repente, deslocar-se, a toda pressa, de um lugar para outro. Solicita, nesse caso, o auxílio de um *afifah-segadah-kheyt,* que se encarrega, mediante modesta remuneração, de abrir caminho no meio da multidão. Não é das mais simples a profissão de *afifah.* O indivíduo que deseja exercê-la precisa possuir certas qualidades. Ser resistente, para afastar os importunos; ser corajoso, para enfrentar os atrevidos; ser prudente, para evitar os agrupamentos perigosos; ter domínio sobre os camelos, para se aproximar sem receio desses animais; conhecer as pragas mais violentas que figuram em todos os dialetos, para não ofender os exaltados. Um *afifah* que pretenda ser eficiente em sua profissão precisa ter sempre no pensamento a grande verdade, *Med reglek alk ad-lehafak.*1 Ora, um dia encontrava-me à porta da mesquita, em Ispahan, quando de mim se aproximou um desconhecido. Parecia um persa nobre. Trazia na mão uma caixa escura de dois palmos de comprimento mais ou menos.

"'Queres levar', disse-me, sem mais preâmbulos, 'esta caixa ao palácio do xeque Al-Fakars? Receberás, pelo serviço, cinco dinares'. 'Aceito', respondi. Tomei da caixa, sobracei-a cuidadosamente e parti a correr em direção à residência do xeque. As ruas estavam repletas. De súbito um beduíno estouvado deu-me um esbarrão violento. A caixa caiu-me do braço e, batendo com violência numa pedra, abriu-se. Vi, então, uma cena que me causou assombro. De dentro da caixa saltaram quinze ou vinte rãs que se espalharam pela rua. Os populares que se achavam perto atiraram contra mim:

"'Feiticeiro! Feiticeiro!', gritavam os mais exaltados, 'Mata! Mata!' Com receio de ser trucidado pelos fanáticos, tratei de fugir dali, proeza que pratiquei em poucos instantes graças à habilidade com que sei me deslocar no meio dos ajuntamentos. As tais rãs, como mais tarde vim a saber, valiam um tesouro: tinham sido trazidas da Ilha de Chipre. No dia seguinte soube que o xeque Al-Fakars, homem vingativo e perverso, não se conformando com a perda das rãs, andava à minha procura. Fugi da Ispahan e, depois de jornadear por vários países, vim ter aqui. Vejo-me, agora, em dificuldades, pois em Túnis, a vossa bela capital, não há multidões e os meus serviços tornaram-se desnecessários."

— É singular! — concordou o rei. — Não poderia imaginar que houvesse no mundo profissão tão estranha.

— Mais estranha ainda, ó rei! — acrescentou o *afifah —,* é a profissão exercida pelo nosso companheiro hindu.

— Por Alá — bradou o sultão. — Que profissão é essa que de tão esquisita chega a vencer a tua em estranheza?

O segundo aventureiro, depois de um humilde *salã,* contou o seguinte:

Notas

1 Provérbio árabe: “Acomoda teus pés conforme o tamanho do teu cobertor.”

19ª Narrativa

História de um empalhador de elefantes que embriagava pavões para combater as serpentes.
Das Mil histórias sem fim *é esta a décima nona!*
Lida a décima nona restam, apenas, novecentas e oitenta e uma...

Sou natural da Índia. Trabalhei, durante toda minha vida, nas terras do rajá Naradej, governador da província de Rã-Napal. Esse príncipe conservara em suas matas mais de quinhentos elefantes sagrados. Quando acontecia morrer um desses elefantes, o príncipe Naradej determinava que o corpo do monstruoso paquiderme fosse cuidadosamente embalsamado. Cabia-me, então, executar com habilidade essa piedosa tarefa. A minha profissão é, portanto, muito simples e nobre: "empalhador de elefantes sagrados". Eu morava numa casa pequena e modesta, construída no meio da mata sombria em que viviam os elefantes. Aquelas terras eram infestadas de perigosas serpentes; rara a semana em que não se perdia um homem picado por uma delas. Aquele flagelo parecia irremediável pois a nossa religião não permite matar um animal seja este embora uma peçonhenta cobra. Que fiz então? Sem que o rajá soubesse, iniciei uma grande criação de pavões; para evitar que os pavões se afastassem dos arredores da casa, usei de um estratagema muito curioso. A partir dos primeiros dias habituei os pavões ao uso do ópio que é, como todos sabem, um entorpecente perigoso.

Todas as tardes cada pavão recebia, em minha casa, diante da porta que abria para o terreiro, uma certa dose de ópio e ali ficava, durante a noite, num sono de embriaguez. Pela manhã, os pavões partiam pela mata em busca de seu manjar predileto — as serpentes. Quando um pavão encontra uma cobra, entra logo em luta. Os botes e assaltos do ofídio são inúteis; a plumagem forte e espessa que reveste o corpo do pavão não permite que essa ave possa ser mordida pela serpente. O pavão, depois de se divertir durante alguns minutos com sua vítima, mata-a com duas ou três violentas bicadas, transformando-a, a seguir, numa apetitosa iguaria. Com auxílio dos pavões "viciados" eu fui pouco a pouco exterminando as serpentes que viviam nos arredores de minha casa. Um dia, porém, o rajá foi informado de que eu embriagava os pavões, dando-lhes ópio todas as tardes. O meu procedimento foi tido como "infame", pois contrariava todos os preceitos religiosos do povo. Por esse motivo fui despedido do emprego e expulso das terras. Depois de muito peregrinar pelo mundo, cheguei a este país onde esperava arrumar colocação. Sinto-me, todavia, embaraçado, pois julgo que dificilmente encontrarei aqui elefantes sagrados que exijam as minhas habilidades de empalhador.

— Não resta dúvida — concordou o rei —, a vossa singular especialidade não encontra facilmente aplicação dentro das fronteiras de meu país. Farei, todavia, o possível para auxiliar-vos.

Disse então o hindu:

— Se a minha profissão é original, rara e estranha, mais rara, estranha e original é a profissão exercida por este camarada.

E apontou para o terceiro forasteiro, que se mantivera de pé, em atitude respeitosa, a poucos passos de distância.

— Por Alá! — bradou o rei. — Pelo sagrado templo de Meca! Será possível que exista, em algum recanto do mundo, profissão mais esquisita do que aquela que exerce um empalhador de elefantes sagrados?

E, dirigindo-se ao estrangeiro, disse-lhe:

— Aproxima-te, meu amigo! Quero saber qual é a profissão maravilhosamente rara que exercias em tua terra, e por que vieste parar agora em nosso país!

O terceiro viajante, interpelado pelo sultão, assim falou:

— Crime seria iludir-vos com fantasias enganadoras ou com exageros mentirosos. A profissão que exerço e na qual, digo-o ferindo, embora a minha natural modéstia, sou de excepcional eficiência não é certamente das mais raras. Tenho encontrado, ao percorrer os caminhos de Alá, homens que exercem atividades muito mais estranhas. Em Heif, no sul da Arábia, conheci um ancião que amealhava bens invejáveis domesticando lagartixas e proporcionando, com esses animaizinhos sobre grandes bandejas de prata, espetáculos que muito distraíam os curiosos. Assisti, por exemplo, um luta simulada entre duas lagartixas que me deixou encantado. Esse mágico das lagartixas chamava-se El-Magdisi e era tão avarento que passou a adotar o apelido de Mag para economizar tinta nas assinaturas do nome. Em Damasco, na Síria, fiz boa amizade com um calculista cujo ganha-pão consistia em fazer cálculos inúteis que não deviam na verdade interessar a pessoa alguma. Quantas escamas tem um certo peixe? Quantos passos, em média, uma pessoa dá por dia? Qual é o número cujo quadrado é formado por dez algarismos e todos desiguais: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9? Quantas vezes a letra *alef* aparece na 1ª surata do Alcorão? Havia centenas de outros problemas sem a menor significação, que o calculista vendia por bom preço aos damascenos mais ilustrados.

— Todas essas considerações — interrompeu delicadamente o sultão — parecem-me dignas de atenção dos estudiosos. No momento, porém, não me interessam e não disponho, infelizmente, de tempo suficiente para ouvi-las.

"Quero que me descrevas a profissão que exerces, e que teu companheiro reputa original e surpreendente."

O terceiro viajante, interpelado desse modo pelo sultão, narrou o seguinte:

20ª Narrativa

História de um homem que afinava cigarras.
Um conselho simples que esse homem recebeu de um mendigo de Medina.
Das Mil histórias sem fim *é esta a vigésima!*
Lida a vigésima restam, apenas, novecentas e oitenta...

Poderia parecer, ó rei!, a um espírito menos atilado, que eu pertencesse ao número infindável dos indolentes e preguiçosos. Tal suspeita traduziria uma dolorosa injustiça.

Sou de índole ativa: adoro o trabalho e exerço uma profissão utilíssima. Nasci em Mekala, ao sul da Arábia. Existe, nesse país, um grande número de cigarras. Habituado a ouvir o canto desses curiosos habitantes das selvas, aprendi a imitá-los com grande perfeição.

Verifiquei, entretanto, que algumas cigarras cantam mal, são roucas e desafinadas; pude observar ainda que era possível corrigir certos defeitos fazendo com que as cigarras ouvissem melodias perfeitas no tom justo e certo. Informado da minha habilidade, o governador de Mekala encarregou-me, mediante bom ordenado, dessa delicada tarefa: afinar as cigarras. O meu emprego era dos mais úteis no país, pois em Mekala o canto das cigarras constituía um dos grandes divertimentos do povo.

Há dois anos, porém, as cigarras de MekaIa foram dizimadas por uma praga e desapareceram. Perdi o emprego e resolvi emigrar. Parti de Mekala com uma numerosa caravana de peregrinos que iam em busca de Meca, a Cidade Santa.

Chegamos ao Madinat'En Nabi1 depois de uma longa e fatigante jornada.

Um dia, ao deixar a mesquita do Profeta, andrajoso mendigo estendeu-me a mão implorando um óbolo. Dei-lhe um dinar.

Disse-me o infeliz ancião:

— É esta a terceira vez, estrangeiro!, que recebo de ti um dinar de cobre. Como vejo que és bom e caridoso, vou dar-te um conselho útil, por certo, aos indivíduos que, como tu, praticam o ato sublime da esmola: Não deves dar, ao pobre que habitualmente encontras em teu caminho, uma esmola certa, igual à que lhe deste na véspera! Há nisto, afirmo, um grande perigo! Procura auxiliá-lo com quantia maior ou menor. Nunca, porém, com quantia idêntica à anterior!

— Singular é o teu conselho, meu amigo — repliquei. — Que perigo poderia advir a uma pessoa do simples fato de dar, todos os dias, a mesma esmola a um mendigo conhecido?

— Por Alá, muçulmano! — retorquiu o mendigo. — Será possível que ainda não tenha chegado ao teu conhecimento a trágica aventura ocorrida com um escriba de Kabul, chamado Ali Durrani, que tinha o péssimo costume de dar ao mesmo pobre uma esmola certa e invariável?

— Que caso foi esse?

— Quero que o ouças da pessoa mais autorizada para narrá-lo! — E acrescentou com um gesto misterioso: — Vem comigo!

Conduziu-me por um corredor lateral, até um dos pátios internos da mesquita. Havia ali uma porta, estreita e resistente, na qual o meu singular companheiro bateu com impaciência várias vezes. Abriu-se, afinal, ligeiramente, a porta e ouvi por uma fresta uma voz rouca e meio agressiva indagar:

— Que trazes tu?

Respondeu meu companheiro:

— Trago três fios de sol e duas aranhas da China!

Surpreendeu-me aquela resposta. As palavras do mendicante envolviam um estranho mistério. E realmente, vi surgir por detrás da tal porta um venerável xeque, ricamente trajado. As suas barbas longas e já grisalhas caíam-lhe sobre o peito. Ostentava uma espécie de manto todo debruado com fios de ouro e, na cabeça, trazia um turbante à moda dos hindus, rematado, à direita, por um grande laço vermelho-claro.

Ao pôr em mim os olhos, o estranho xeque exclamou, com profunda emoção.

— Louvado seja Alá, o Sapientíssimo! Até que enfim posso abraçar o meu jovem e amigo, o mais famoso dos músicos, o afinador de cigarras!

E sem que eu pudesse fazer o menor gesto para detê-lo, abraçou-me pelo ombro, com efusão de incontida alegria.

Aquele encontro deixara-me estarrecido. O ancião conhecia-me; não ignorava a antiga profissão que eu exercera em Mekala. Que pretendia o caprichoso destino ao levar-me a seu encontro?

— Não me tome por um mágico, nem por um *djim* — disse o ancião com bom humor. — Conheço-te porque estive durante alguns meses em Mekala, e assisti, mais de uma vez, ao coro das cigarras que tu dirigias no parque do rei. Sei que és habilidoso. Precisas de mim?

Nesse momento, o mendigo, que ali me trouxera, acudiu, interessado:

— Xeque dos xeques! Esse jovem, caridoso e simples, deseja ouvir o relato da aventura ocorrida com o bom escriba Ali Durrani, de Kabul.

— Com grande prazer posso narrá-lo — replicou o xeque. — É uma das histórias mais singulares do velho Afeganistão.

E, com serenidade e graça, narrou-me o seguinte:

Notas

1 A cidade do Profeta — Medina.

21ª Narrativa

Singular aventura do escriba Ali Durrani.
O caso do troco recusado. Das Mil histórias sem fim *é esta a vigésima primeira!*
Lida a vigésima primeira restam, apenas, novecentas e setenta e nove...

Conta-se que um dia, ao aproximar-se Ali Durrani, o bom e honrado escriba, da célebre mesquita de Ullah, em Kabul, um mendigo lhe veio ao encontro e disse-lhe:

— Houve ontem, ó xeque!, um engano de vossa parte. Recebi, de vossas mãos, um *damasin*1 de ouro, ao invés do dinar de cobre que é vosso costume dar-me diariamente. Aqui está, pois, o troco de 99 dinares que vos pertence!

— Não, meu velho — replicou delicadamente o escriba. — Tenho certeza de que não me enganei. Não te dei, como julgas, uma peça de ouro; as minhas modestas posses não permitem, nem mesmo por engano, semelhante generosidade! Dei-te apenas, como o faço diariamente, um mísero dinar de cobre!

O mendigo, não se conformando com tal recusa, por várias vezes insistiu em fazer com que o escriba recebesse o troco que lhe deveria ser restituído. Ali Durrani, conservando-se no firme propósito de não aceitar o dinheiro, disse:

— Se por um milagre saiu das minhas mãos para as tuas um *damasin* de ouro, é porque estava escrito que tal aconteceria. Guarda, pois, contigo esses dinares. São teus. Jamais recebi troco das esmolas com que auxilio os infelizes!

Ao ouvir tais palavras, enfureceu-se o mendigo. E erguendo seu pesado bastão entrou a agredir inopinadamente o bom escriba, gritando:

— Miserável! Por tua causa estou impossibilitado de sair hoje da miséria em que sempre tenho vivido!

Vários transeuntes correram em socorro de Ali Durrani, e livraram-no de ser gravemente ferido pelo exaltado mendicante, que foi preso e levado à presença do emir Allanbasard, por esse tempo o primeiro-juiz de Kabul!

O sábio magistrado, ao ter conhecimento das estranhas circunstâncias que precederam a agressão, ficou tomado do mais vivo espanto e interpelou severamente o agressor:

— Ó chacal, filho de chacal! Não vejo explicação alguma para o teu louco proceder. Se Alá, o Único, não te privou, como creio, da luz da razão, conta-nos a verdade, pois do contrário irás acabar sob o alfanje do carrasco!

— Emir poderoso! — exclamou o mendigo. — Vou contar-vos a minha singular história. Vereis, pela minha narrativa, que o meu proceder, embora as aparências o revistam com cores negras da ingratidão, é perfeitamente justificável perante as fraquezas humanas!

E, depois de ajoelhar-se humildemente aos pés do emir, o velho mendicante assim começou:

Notas

1 Moeda persa.

22ª Narrativa

O terceiro-vizir faz a um mendigo uma indigna proposta. Vamos encontrar um velho tecelão que advoga uma causa perdida.
Das Mil histórias sem fim *é esta a vigésima segunda!*
Lida a vigésima segunda restam, apenas, novecentas e setenta e oito...

Hoje, antes da prece, achava-me, como de costume, junto à porta da mesquita de Ullah, valendo-me da caridade dos bons muçulmanos, quando de mim se acercou um xeque ricamente trajado, que eu soube depois ser o poderoso Kabib Karmala, terceiro-vizir do nosso rei.

Esse nobre maometano, depois de presentear-me delicadamente com uma bolsa cheia de ouro, disse-me, em tom confidencial:

— O nosso querido soberano, que Alá sempre o proteja!, tem ouvido as mais elogiosas referências à inquebrantável honestidade de um escriba chamado Ali Durrani. É intenção do rei nomear esse homem para o cargo de tesoureiro da corte. Tal escolha, porém, não me agrada nem pode convir aos outros vizires. Sei igualmente que o escriba tem o costume de vir todos os dias a esta mesquita, e nunca deixa de socorrer com um dinar de cobre a todos os mendigos que encontra. Conto, pois, com o teu auxílio para desmentir a fama de probidade de que goza Ali Durrani.

— Que devo fazer para auxiliá-lo, ó xeque generoso? — perguntei.

— É simples — continuou o prestigioso vizir. — Logo que o escriba apareça, irás ao encontro dele e procurarás convencê-lo de que ontem, sem querer, ele te deu, por engano, um *damasin* de ouro, e que, portanto, tem direito ao troco de 99 dinares. Se conseguires fazer com que o escriba, quebrando os seus princípios de honestidade, guarde indevidamente o troco, receberás de mim, como recompensa, duas mil peças de ouro!

Só Alá, o Incomparável, poderia avaliar a intensa alegria que de mim se apoderou ao ouvir tal proposta. Eu estava convencido de que o escriba, por mais honesto que fosse, não deixaria de aceitar um simples troco de 99 dinares. E já me acreditava possuidor do rico pecúlio que o vizir me oferecera, quando esbarrei na recusa inabalável do escriba. Fiquei por isso exaltado e, perdendo a calma e a serenidade tão necessárias, não pude conter um acesso de furor e tentei maltratar o homem bondoso e honesto que tantas vezes se apiedara ao trazer-me o seu óbolo generoso.

Ao ouvir a narrativa do mendigo, disse-lhe o juiz:

— Não encontro como justificar o teu infame proceder. É duplo o teu crime: procuraste iludir um benfeitor e tentaste induzi-lo à prática de uma ação indigna. Vou, pois, castigar-te como mereces. Quero, porém, ouvir antes as testemunhas que contigo foram trazidas até aqui!

Um velho tecelão, que fora o primeiro a socorrer o escriba, aproximando-se do íntegro juiz, disse-lhe respeitoso:

— Peço-vos, humildemente, perdão, ó emir! Penso, porém, que não deveis lavrar sentença contra esse infeliz mendigo! Ele tem toda razão! Só o escriba é que é culpado! Recusando o troco, ele tinha em vista uma grande recompensa!

— Por quê? — indagou surpreso o juiz.

— Porventura não conheceis — continuou o tecelão — o caso ocorrido com um jovem de Bagdá que recusou aceitar uma caravana carregada de ouro e pedrarias?

— Que caso foi esse? — perguntou o juiz.

— Vou contá-lo — respondeu o tecelão.

E narrou o seguinte:

23ª Narrativa

Um jovem de Bagdá recusa uma caravana carregada de preciosas mercadorias. Um rajá intervém no caso.
Das Mil histórias sem fim *é esta a vigésima terceira!*
Lida a vigésima terceira restam, apenas, novecentas e setenta e sete...

I

Em Bagdá vivia, outrora, um jovem muçulmano chamado Ibraim Ibn-Tabir, que passava os dias descuidado em festas e banquetes a gastar, sem pensar no futuro, a prodigiosa herança que lhe deixara o pai.

Cedo viu-se o nosso herói reduzido a penúria extrema. No dia em que fora obrigado a separar-se de seu derradeiro dinar, proveniente da venda do último escravo, ocorreu-lhe apelar para o auxílio dos alegres companheiros que haviam compartilhado de sua mesa e de seu ouro, quando aquela era farta e este abundante. Não houve, porém, um só que se compadecesse da situação aflitiva do desajuizado mancebo.

Compreendendo que nada poderia obter de seus falsos e ingratos amigos, e resolvido a enfrentar corajosamente as vicissitudes da pobreza, regressava Ibraim a casa quando, ao chegar à rua em que morava, notou ali um movimento anormal. Vencendo, a custo, a massa de curiosos, deparou ele uma grande caravana que parecia vir de longe, com seus guias condutores e cameleiros!

O chamir — chefe da caravana — dirigiu-se ao jovem e disse-lhe:

— Acabo de ser informado de que sois Ibraim, filho do rico Tabir Messoudi. É vossa, portanto, esta caravana que acabo de trazer de Bássora, através do deserto.

Convencido de que o chamir estava enganado, Ibraim, que era honesto e incapaz de apoderar-se de qualquer coisa que não lhe pertencesse, respondeu:

— Estás enganado, ó amigo! Esta caravana não me pertence! Houve, com certeza, algum equívoco na indicação de quem ta confiou, para que a leves a seu destino.

— Recusas, então, ó jovem? — indagou o chamir. — Recusas esta caravana tão rica, pois vem carregada de preciosas mercadorias?

— Recuso! — replicou com segurança Ibraim.

Essa resposta do jovem causou aos homens da caravana uma impressão indescritível. Gritaram todos alegremente. *Allah! Alá Kerim!* Alguns arrancaram os turbantes e rasgavam as vestes entre risos estrepitosos; o próprio chamir chegou a rolar pelo chão, a rir como um faquir demente.

Ibraim, surpreendido por tão inesperada manifestação de regozijo, agarrou o caravaneiro-chefe pelo braço e gritou-lhe, enérgico:

— Que significam essas risadas e chacotas? Por que ficaram todos tão contentes com a minha recusa? Exijo que me expliquem o mistério desse caso!

Diante de tal intimação, o chamir resolveu esclarecer o sucesso:

II

"Deveis saber, ó jovem tão bem-dotado, que o vosso pai tinha em Bássora um sócio riquíssimo chamado Ahmed Bakhari, que possuía, além de muitas terras e rebanhos, palácios, camelos, escravos e joias de grande valor.

"Sentindo-se, um dia, gravemente enfermo e certo de que o Anjo da Morte não tardaria a vir arrebatá-lo deste mundo, o generoso Bakhari chamou-me para junto de seu leito, pois era o seu empregado de maior confiança, e disse-me:

— Dentro de poucos dias deverei comparecer perante Alá, o Altíssimo. Não quero, entretanto, deixar este mundo sem pagar as dívidas que contraí. Logo que eu morrer, levarás, em meu nome, a Bagdá, uma caravana de 30 camelos carregados de estofos, tapetes e joias. Essa caravana deverá ser entregue ao meu velho amigo e sócio Tabir Messoudi, em pagamento de uma quantia que há tempos me emprestou. Sei que Messoudi é riquíssimo e de um espírito de generosidade sem igual. É bem provável, portanto, que ele não queira aceitar, como aliás já tem feito, o pagamento do dinheiro que lhe devo. No caso de ser recusada, a caravana deverá ser repartida equitativamente entre os homens que a conduzirem.

"Jurei, pelo Livro Sagrado, que obedeceria cegamente às instruções de meu amo e no dia seguinte ao seu enterro despedi-me das quatro viúvas, e pus-me a caminho para esta cidade.

"Logo que aqui chegamos, soubemos que o velho Tabir Messoudi já havia falecido, tendo deixado um filho único chamado Ibraim. Esse jovem, acrescentaram ainda os nossos informantes, está reduzido à maior pobreza, por ter esbanjado em mil festins os bens superabundantes que lhe deixara o pai.

"Fiz sentir aos meus honestos caravaneiros de jornada que nada poderíamos esperar, a não ser uma modesta paga dos nossos trabalhos, pois era bem certo que um rapaz pobre não iria recusar uma caravana tão valiosa.

Depois de pequena pausa, o velho chamir continuou:

— Eis aí explicado o motivo único da grande alegria que se apoderou dos cameleiros quando ouviram de vossos lábios a recusa formal em aceitar a bela caravana que trouxemos de Basra. A vossa inesperada recusa foi ouvida por várias testemunhas, inclusive pelo representante do nosso cádi, que vai proceder, neste mesmo instante, à partilha da caravana! Mesmo depois de pago o cádi, esta caravana é suficiente para enriquecer a todos nós!

Nesse momento, o secretário do cádi aproximou-se de Ibraim e disse-lhe.

— É tarde para arrependimentos, meu filho! Ouvi perfeitamente a tua declaração. Segundo a ordem do rico Bakhari, a caravana que recusaste vai ser repartida pelos dedicados caravaneiros que a trouxeram de Basra até aqui!

— Tive a riqueza nas mãos e perdi-a! — exclamou Ibraim, cheio de mágoa — *Maktub!* (Estava escrito!) Louvado seja Alá que duas vezes me fez mais pobre do que um escravo!

Mal havia o jovem pronunciado tais palavras, sentiu que lhe tocavam no ombro.

Voltou-se rápido e viu diante dele um homem alto, de cor bronzeada, ricamente trajado, que ostentava na cintura um longo punhal indiano e na cabeça um turbante de seda amarela, onde cintilava um grande brilhante azulado.

— Jovem — começou o desconhecido pondo carinhosamente a mão sobre o ombro de Ibraim. — Acabo de observar com a maior admiração a tua maneira digna e honesta de proceder. Recusaste uma caravana inteira, carregada de ricas alcatifas, porque estavas convencido de que ela não te pertencia, e, como bom muçulmano, aceitaste sem revolta os decretos do Onipotente.

E como o jovem Ibraim fitasse nele os olhos, cheio de espanto, o estrangeiro continuou:

— Chamo-me Walaemg Mahadeva, e sou rajá da província de Mahabalipur, na Índia! Queres, ó jovem, recuperar não só essa caravana perdida como outras muitas que valem mil vezes mais? Escuta, então, a extraordinária história intitulada "A Bolsa Encantada", que vou contar. Verás como pôde ocorrer com um pobre homem um caso milagroso que o tornou, de um momento para outro, mais rico do que um emir.

E o rajá contou ao jovem a história que se vai ouvir:

24ª Narrativa

História da "Bolsa Encantada" e das aventuras que depois ocorreram.
Das Mil histórias sem fim *é esta a vigésima quarta!*
Lida a vigésima quarta restam, apenas, novecentas e setenta e seis...

I

Com a chegada de duas caravanas da Pérsia, o movimento do suque de Basra naquele dia fora excepcionalmente intenso. Ao cair da noite, fatigado pelo trabalho brutal de muitas horas, o mísero Mustakin Karuf, o carregador, recolheu-se, para dormir, à *kuba*1 sórdida em que vivia no fundo do pátio de uma casa de cameleiros, no bairo de Tahhin.

Sentou-se na ponta de um *tanght*2 feito de caixas velhas, cobertas com panos grosseiros, e, enquanto mastigava uma tâmara seca, quase sem gosto, tirou de um pequeno cesto as poucas moedas que havia recebido pelo trabalho no mercado. Contou e recontou várias vezes o dinheiro. Verificou possuir doze dinares de cobre e cinco moedas de prata. Tudo isso, porém, valia menos do que uma dessas peças rutilantes de ouro com que os ricos e ociosos xeques compram perfumes e joias aos traficantes judeus.

— Como é triste a minha vida — murmurou, lastimando-se da sorte. — Bem adverso foi para mim o destino! Trabalho como um escravo sem parar até o cair da noite, e mal ganho num dia o que já devo pelo sustento da véspera. Que pode valer, afinal, ao homem ser justo, diligente e honrado, quando não consegue vencer a fatalidade e sair da miséria em que se arrasta? Enquanto os mais felizes vivem na opulência, ostentando um luxo exagerado, outros, como se merecessem tal castigo, sofrem a tortura da fome e os espantosos suplícios da pobreza! As boas obras terão um benefício dez vezes maior!... São promessas vãs do Alcorão. Que faço senão praticar as boas obras e os deveres impostos aos muçulmanos sinceros? Jamais deixo de atender ao chamado do muezim para as cinco preces do dia; auxilio os pobres; leio com fervor o *Fatihah*3*,* já beijei duas vezes a Santa Kaaba de Meca e ninguém melhor do que eu sabe respeitar o jejum sagrado de Ramadã! Que tenho, afinal, lucrado com esses atos de caridade e de fé? Nada. A pobreza, como um camelo que descansa, deitou-se à porta desta *kuba* e a fome...

Nesse momento sentiu Mustakin que alguém muito de leve, com as pontas dos dedos, lhe tocara no ombro. Voltou-se rápido e viu de pé, a seu lado, um ancião desconhecido que, pelo trajar bem-posto, parecia pessoa de alto lustre e distinção. O estranho visitante atravessou, com certeza, sem ser notado, o pátio deserto e entrou silencioso no quarto, pela porta lateral.

Ergueu-se o pobre Mustakin, surpreendido com a presença daquele xeque de aspecto venerável, que o fitava com um sorriso bondoso e leal.

— Quem sois? — perguntou, com um espanto que não sabia disfarçar. — Que desejais de mim? Por que conduziu Alá os vossos passos até a minha pobre *kuba*?

— Logo saberás — acudiu com severidade o desconhecido. — Levado por uma indicação errada, entrei, há pouco, neste pátio e, sem querer, vim ter aqui à porta do teu quarto. Tão absorto estavas em contar o teu pecúlio que não notaste a minha chegada. Ouvi, portanto, as palavras injustas de revolta que acabaste de proferir. Como pode um servo de Alá blasfemar dessa forma contra as contingências da vida? Não sabes, então, ó infeliz!, que Deus é justo e clemente? Cada um de nós tem o destino que merece. Diz o Alcorão, o Livro de Alá:

"As recompensas serão proporcionais aos méritos. Deus aprecia e julga todas as obras!"

E diante do infinito assombro de Mustakin, o velho xeque continuou, solene:

— Escuta, ó muçulmano! Pela vontade do Altíssimo estudei as ciências ocultas, a misteriosa astrologia e todos os segredos da alquimia. Conheço as pedras mágicas, os filtros maravilhosos e as pedras cabalísticas com que obtemos o auxílio dos gênios que povoam o mundo. Queres verificar se és, realmente, um homem justo e sincero? Toma esta bolsa. Ela poderá proporcionar àquele que for bom e puro uma riqueza incalculável.

Mustakin tomou nas mãos a bolsa que o misterioso personagem lhe oferecia. Era uma bolsa escura, de couro liso, como as que usavam os arrogantes recebedores de impostos.

— Essa bolsa — esclareceu o mago — parece vulgar e inútil, mas é maravilhosa e encantada. Toda vez que praticares um ato bom e louvável, aparecerá dentro dela uma moeda de ouro. Se a tua vida, como há pouco afirmaste, é um rosário de virtudes, poderás ao fim de pouco tempo possuir uma riqueza que excederá aos tesouros do sultão! Que Alá, o Exaltado, não te abandone, ó Mustakin! *Alahur akbar!*

E depois de proferir tais palavras, o singular visitante, envolto numa capa cinzenta que chegava ao chão, saiu da *kuba,* atravessou lentamente o pátio e desapareceu na rua escura.

O pasmado Mustakin, que jamais conhecera os famosos cultores da magia, ficou imóvel no meio da *kuba,* com a bolsa na mão, sem saber como julgar aquele estranho sucesso.

"Verificarei amanhã", pensou, "se esta história de encantamento não passa de um simples gracejo de um xeque extravagante."

Súbito, porém, as mãos lhe tremeram; uma angústia indefinível oprimiu-lhe o peito. Ele verificara, com indizível assombro, que a bolsa trazia, por fora, em letras douradas, o seu nome "Mustakin Karuf" — acompanhado de sinais cabalísticos indecifráveis. A dúvida desapareceu dando lugar à certeza. A bolsa era encantada.

II

Mal acabara de balbuciar a prece da madrugada, saiu Mustakin, depois de uma noite de vigília, levando na cintura a bolsa com que fora presenteado pelo mago.

Formara o intuito de praticar um ato bom e digno, a fim de obter pela virtude mágica da bolsa a sedutora moeda de ouro.

Ao aproximar-se da fonte de Hajar avistou um mendigo, de horripilante aspecto, sentado na laje da rua, ocupado em limpar com uma espécie de pente um cão magríssimo que se estendia a seus pés.

— Por Alá — murmurou Mustakin, com incontida alegria. — Eis que se me depara uma ocasião magnífica para praticar o preceito da esmola!

E, aproximando-se acintosamente do mendicante, atirou-lhe todas as moedas que havia ganho, com tanto sacrifício, na véspera.

Não há palavras que possam descrever o espanto que se apoderou do andrajoso pedinte ao receber uma esmola tão vultosa.

— Que Alá vos conserve, ó generoso amigo! — exclamou, enquanto arrebanhava sofregamente os dinares espalhados pela areia. — Que o Altíssimo derrame sobre o vosso lar e sobre a vossa cabeça todos os favores do céu! Seja a paz a vossa estrada...

Sem dar atenção ao discurso com que o mendigo mal podia exprimir a gratidão, Mustakin afastou-se e discretamente abriu a bolsa. Com dolorosa surpresa verificou que se conservava vazia. Onde estaria o dinar de ouro que ali deveria se encontrar?

"A moeda de ouro não apareceu", pensou Mustakin, "e houve, bem o sei, razão para isso. O ato que acabei de praticar não foi um ato de perfeita caridade. Que fiz eu ao socorrer o mendigo? Dei-lhe algumas moedas na esperança de obter, em troca, quantia muito maior. Alá é justo e sábio, e lê no pensamento a intenção de cada um! Quem dá dez com a esperança de receber cem não pratica a caridade!"

III

Preocupado com tais pensamentos caminhava Mustakin, quando avistou uma velha que cruzava uma praça curvada ao peso de um enorme feixe de lenha. Era de causar pena o sacrifício que a infeliz fazia!

"Vou auxiliar aquela anciã", planejou Mustakin. "Tenho certeza de que irei, agora, praticar um ato de elevada piedade."

Ofereceu-se à desconhecida para transportar a pesada carga. E só deixou o feixe junto à porta do casebre em que a velha morava, muito longe da cidade, perto do rio.

E mal completara a fatigante tarefa a que ele próprio se impusera, abriu a bolsa para admirar a prometida moeda de ouro. Nada encontrou.

"E não devia ser de outra forma", pensou Mustakin, procurando analisar o auxílio que acabava de prestar. "Que fiz eu, afinal? Ajudei uma pobre velha, e essa ajuda não passou de um esforço material que para mim nada representa."

IV

Nesse instante, precisamente, ouviu Mustakin gritos aflitivos que partiam do rio. Avistou, no meio da corrente, um menino que se debatia desesperado, em grave perigo, prestes a perecer afogado. Um pensamento, mais rápido do que o simum, atravessou-lhe o espírito. Que oportunidade ótima se lhe oferecia para pôr em prática um ato de incontestável heroísmo e abnegação! Sem hesitar um segundo, atirou-se ao rio, enfrentou o perigo e com grande esforço conseguiu trazer para terra a mísera criança. Camponeses e curiosos haviam se aproximado do local. Os pais do menino, que fora arrancado à morte graças à coragem e ao heroísmo de Mustakin, choravam de satisfação. "Esse homem é um santo!", afirmava a velha do feixe de lenha. E de todas as bocas saíram, dirigidas ao abnegado salvador, palavras sinceras de louvor e gratidão. "Era um bravo, capaz de arriscar a vida naquele trecho impetuoso da corrente, onde o rio, em avalanche com arabescos de espumas, escrevia ameaças de morte sobre as ondas."

Ao ambicioso Mustakin eram, entretanto, indiferentes os elogios com que todos lhe exaltavam o belo feito. Preocupava-o, como sempre, a preciosa moeda que devia estar a rebrilhar no fundo da bolsa encantada. Uma só? Não. Muitas! A proeza do rio merecia um punhado de ouro. Alá é generoso; a bondade de Alá não tem limites nem no impossível!

Afastou-se estouvadamente, como um ébrio, das pessoas que o cercavam, repeliu os que o queriam seguir por curiosidade, e, longe dos olhares indiscretos, abriu a sedutora bolsa do velho feiticeiro.

Que dolorosa desilusão para seus olhos ávidos! A bolsa continuava como sempre vazia, vazia e inútil, inútil como um punhado de areia no meio do deserto!

— Já compreendi a verdade — murmurou o desolado Mustakin. — Louvado seja Alá que me abriu os olhos para a realidade da vida! Esta bolsa encantada jamais poderá ter dádivas para mim. Não sei praticar o bem senão movido pelo interesse do ouro. E essa preocupação da paga que me deve tocar anula por completo o mérito de qualquer ação piedosa que eu venha a praticar. O homem justo pratica o bem sem olhar para a recompensa. Aquele que tem bons sentimentos auxilia seus irmãos desinteressadamente. A mácula da ambição jamais sairá de minha consciência, e esta bolsa enquanto estiver comigo permanecerá vazia.

Que fez, então, Mustakin?

Tomou uma resolução extrema, capaz de surpreender o mais impassível faquir da Índia.

Vou contar:

Notas

1 Casebre.

2 Espécie de leito.

3 Primeiro capítulo do Alcorão.

25ª Narrativa

Continuação da história da "Bolsa Encantada".
Na qual um mendigo compra a liberdade de vários escravos cristãos.
Das Mil histórias sem fim *é esta a vigésima quinta!*
Lida a vigésima quinta restam, apenas, novecentas e setenta e cinco...

Convencido, afinal, de que a bolsa possuidora da mágica virtude da recompensa de nada lhe poderia servir, resolveu Mustakin desfazer-se dela.

Para tanto, sem perda de tempo, tratou de escondê-la sob uma pedra e, antes que alguém o observasse, afastou-se a passos rápidos. Achava-se a caminhar à toa junto a uma das famosas portas de Basra. Um escravo cristão, a cantar descuidado, retirava água do fundo de um poço.

Depois de beber avidamente a linfa que o servo lhe despejara na concha da mão, ficou em silêncio, sem saber que resolução deveria tomar.

— Se tens fome — ousou o escravo, vendo-o indeciso —, vem comigo. Não será difícil obter com algum de meus companheiros um pouco de alimento.

— Meu amigo — retorquiu Mustakin —, agradeço a tua bondosa lembrança, mas não sinto disposição para comer.

E de repente, num gesto de louco, segurou o escravo pelo braço e disse-lhe, com voz surda:

— Escuta! Bem vejo que és bom e quero recompensar-te. Debaixo daquela pedra, junto da árvore, está uma bolsa encantada. É provável que não contenha dinheiro, e certamente está vazia! Essa bolsa poderá proporcionar a quem a possuir riquezas incalculáveis. Guardarás, cristão, um utensílio que em minhas mãos nada poderá valer!

E fugiu, quase a correr pela estrada, como se um inimigo execrável o perseguisse impiedoso.

No dia seguinte, pela manhã, preparava-se Mustakin para deixar a *kuba* em busca de trabalho, quando o pátio de sua casa foi invadido por um grupo de homens armados.

Eram guardas e auxiliares do cádi Mah Hassan El-Rabhul, que exercia o prestigioso cargo de governador de Bássora.

— Procuram alguém?

— É a ti mesmo que procuramos, Mustakin — respondeu o chefe dos guardas. — Temos ordem urgente do cádi e vamos levar-te ao palácio.

Menos assustado do que surpreso ficou o infeliz Mustakin. Que nova desgraça seria aquela?

— Estou inocente! — murmurava, cheio de angústia. — Nada fiz para merecer castigo!

O palácio do cádi achava-se repleto de juízes e de altos funcionários do governo. A notícia da prisão de Mustakin despertara grande interesse.

O governador de Bássora interrogou o preso.

— A acusação que pesa sobre teus ombros, Mustakin — começou o cádi —, é grave, é talvez de provações; a *kuba* em que dormes é um verdadeiro antro. E, no entanto, tiveste a coragem de oferecer ontem, a um escravo cristão, em troca de um pouco d’água, uma bolsa com cem dinares de ouro?

Mustakin, ao ouvir a inesperada declaração do cádi, esbugalhou os olhos assombrado:

— Não se compreende — continuou o governador — que um homem rude, pobre, andrajoso, possa dar a um simples escravo um presente que só os haveres de um califa atingiriam! Bem sei que amanhã é um dia festivo para a cristandade. Os cristãos comemoram o nascimento de Isa,1 filho de Maria, sobre Ele a oração e a glória! Não posso acreditar que um muçulmano passe a mais miserável existência economizando um pecúlio destinado a proporcionar um Natal festivo aos escravos cristãos. Quero, portanto, saber qual a origem desse ouro. Se ocultares a verdade, ó Mustakin!, serás severamente castigado e não asseguro que mantenhas a cabeça entre os ombros depois dessa punição.

Ao ouvir tão grave ameaça, Mustakin, num depoimento sincero, narrou ao governador tudo que lhe ocorrera desde o aparecimento do misterioso mago em sua casa até o seu encontro com o escravo cristão, e o oferecimento que fez da bolsa vazia.

— É singular essa história! — observou o cádi. — A verdade é a seguinte: o escravo cristão indo, por indicação tua, procurar a bolsa encantada, achou-a, não vazia como pensavas, mas repleta de moedas de ouro. Com esse dinheiro comprou a própria liberdade e deu também liberdade a muitos outros escravos cristãos!

E voltando-se para os ricos cortesões que o rodeavam, perguntou-lhes:

— Quem seria capaz de explicar tão estranho sucesso?

Um xeque, presente à estranha narrativa, inclinou-se respeitoso diante do cádi, e assim falou:

— Creio poder facilmente explicar-vos o suposto mistério da bolsa encantada, ó cádi!

Todos os olhares convergiam sobre o muçulmano que assim falara. Mustakin ficou pálido de espanto ao reconhecer no xeque o mago que lhe dera a bolsa encantada.

— Cádi! — gritou. — Esse homem é o sábio alquimista de que vos falei!

Um silêncio impressionante acompanhou a inesperada declaração de Mustakin.

Fitavam todos o nobre, o qual permanecia imóvel, a cabeça inclinada sobre o peito, os braços firmemente cruzados, numa atitude severa.

— Fala! — ordenou o cádi, dirigindo-se ao mago. — Por que misterioso poder veio a bolsa encantada chegar-te às mãos?

Interrogado dessa forma pelo digno magistrado, o misterioso personagem, depois de correr o olhar pelos que se achavam presentes, assim falou com voz pausada e grave:

— Chamo-me Abi-Osaibi e exerço a nobre profissão de alquimista. Sei preparar remédios, filtros, xaropes e vinhos deliciosos. Muito moço ainda deixei esta bela cidade e, associando-me a dois aventureiros atenienses, fui tentar a vida no Egito. Consegui, trabalhando sem descansar, durante trinta anos, reunir apreciável pecúlio. O destino escrevera a palavra "riqueza" no livro de minha vida, assim quis Alá, louvado seja o Onipotente! Ao me sentir velho e fatigado, e possuindo recursos que me permitiriam viver tranquilamente o resto da vida, resolvi voltar a Basra a fim de rever meus antigos companheiros de mocidade. Onde estariam eles? Muitos, de certo, já teriam visto a face rebrilhante de Azrail, o Anjo da Eterna Separação.2

"O primeiro conhecido que encontrei foi o mísero Mustakin. Reconheci-o logo apesar de envelhecido e pobre. Acompanhei-o, sem que ele o percebesse. Entrei na *kuba* sórdida em que ele vive, e bem oculto pude ouvir as palavras de desespero e revolta que proferiu. Ao aparecer, de repente, fiz-me passar por um mágico. Ofereci-lhe uma bolsa que trouxera com a intenção de presenteá-lo. Inventei a lenda da bolsa encantada e rejubilei-me ao notar que ele havia acreditado em mim. Aquela aventura teria, certamente, desfecho curioso e iria constituir enredo para uma nova história. Sempre apreciei preparar surpresas e agradáveis imprevistos para os meus amigos. No dia seguinte, que foi ontem, não perdi Mustakin de vista. Segui-o, como uma sombra, por toda parte. Apreciei todas as tentativas feitas por ele para se assegurar do poder mágico da bolsa. Não errei ao admitir que ele acabaria por se desiludir, pois as prometidas e ambicionadas moedas de ouro, por mais que ele fizesse, não apareciam, a brilhar, na bolsa que eu lhe dera. Ao vê-lo, afinal, ocultar a bolsa sob uma pedra resolvi, mais uma vez, surpreendê-lo. 'Ele virá buscá-la dentro em breve', pensei. Fui, portanto, ao esconderijo e coloquei discretamente, dentro da bolsa, cinquenta dinares em ouro. Foi esse o dinheiro que o escravo cristão, momentos depois, encontrou. E assim, ó cádi!, fica explicado o episódio da bolsa mágica e a origem das moedas que tanto alvoroço causaram nesta cidade!

— Por Alá — exclamou, com entusiasmo, o chefe do tribunal. — O enigma que envolvia o caso da bolsa mágica está completamente elucidado. Os pontos obscurecidos pela dúvida foram esclarecidos pela verdade dos depoimentos. Resultou tudo de uma trama bem arquitetada, mas que teve um desfecho inesperado para seu autor.

E voltando-se para Mustakin, proferiu com ênfase a seguinte sentença:

— Estás livre, ó irmão dos árabes! A grave acusação que pesava sobre ti desapareceu, sem deixar vestígios ou nódoas, depois das declarações da principal testemunha. A tua pessoa não mais interessa à justiça. Podes partir!

— Perdão! — interveio respeitosamente o douto alquimista. — Penso que o Sr. Cádi não deve conceder a liberdade a Mustakin antes que este modesto carregador da feira receba uma indenização pelos sustos que sofreu ao ser acusado e preso. A indenização será paga por mim, pois em grande parte cabe-me a culpa do sucesso. Duas recompensas proporcionarei a Mustakin. Receberá uma bolsa com duzentos dinares e ouvirá, de mim, o relato completo da trágica aventura da "mão cortada". Sei que ele se interessa por essa história, pois sua filha e sua esposa foram sem querer envolvidas nesse terrível drama.

E o rico alquimista entregou a Mustakin uma bolsa que continha duas centenas de moedas de ouro.

Com lágrimas nos olhos agradeceu Mustakin aquele generoso auxílio e, com voz recortada pela emoção, implorou:

— Quero ouvir, agora, ó ilustre cádi!, o drama da "mão cortada". É bem possível que a narrativa desse episódio venha esclarecer vários e dolorosos mistérios que envolvem oito ou nove famílias de alto prestígio!

— Deve ser muito singular essa história — observou, muito sério, o digno magistrado. — É bem possível que ela esteja ligada a mais de um inquérito promovido por este tribunal. — E, voltando-se para o alquimista, ordenou: — Vais contar, ó egípcio, o drama da "mão cortada". Tem a justiça o maior interesse em conhecer esse caso.

O estranho muçulmano inclinou-se respeitoso diante do juiz, e assim começou...

(VER O SEGUNDO VOLUME)

Notas

1 É esse o nome que os árabes dão a Jesus. (B. A. B.)

2 Azrail é o Anjo da Morte, isto é, aquele cuja missão é conduzir a alma dos que deixam a vida terrena. E só aos que morrem é permitida a glória de ver a face de Azrail. (B. A. B.)

Nota

O presente volume contém apenas vinte e cinco narrativas das Mil histórias sem fim.

Na impossibilidade de adaptá-los convenientemente ao nosso idioma, conservamos neste livro, para alguns nomes próprios, a ortografia primitiva.

Este e-book foi desenvolvido em formato ePub pela Distribuidora Record de Serviços de Imprensa S.A.

Mil histórias sem fim

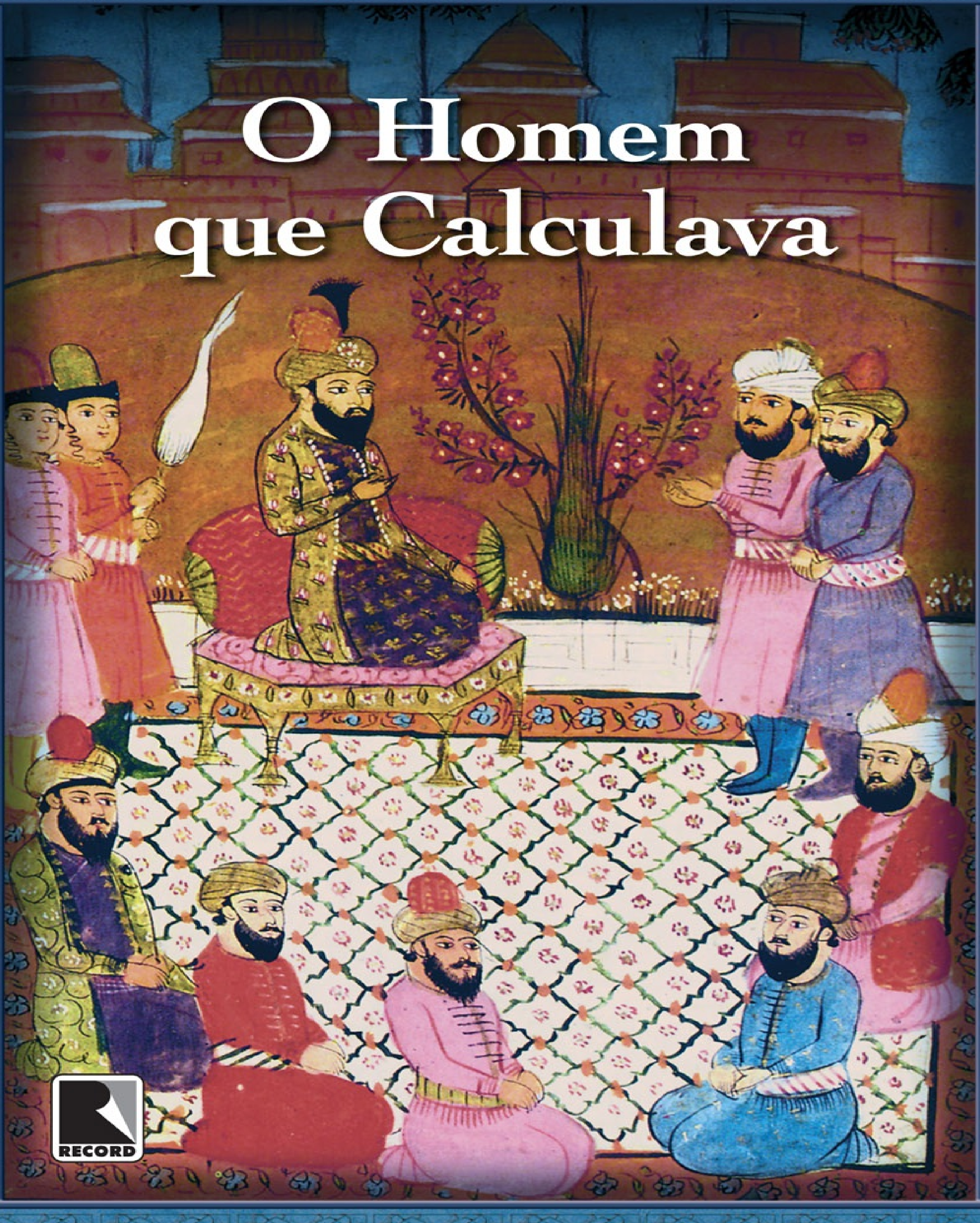
Skoob do livro
http://www.skoob.com.br/livro/284614-mil_historias_sem_fim_vol_1

Site do autor
http://www.malbatahan.com.br/

Wikipedia do autor
http://pt.wikipedia.org/wiki/J%C3%
BAlio_C%C3%A9sar_de_Melo_e_Sousa

Malba Tahan

O Homem que Calculava



Outras obras do autor

Aventuras do rei Baribê
A caixa do futuro
Céu de Alá
Lendas do céu e da terra
Lendas do deserto
Lendas do oásis
Lendas do povo de Deus
O livro de Aladim
Maktub!
Matemática divertida e curiosa
Os melhores contos
Meu anel de sete pedras
Mil histórias sem fim (2 volumes)
Minha vida querida
Novas lendas orientais
Salim, o mágico

Malba Tahan

O Homem que Calculava

Ilustrações de Thais Linhares

83ª EDIÇÃO

EDITORA RECORD
RIO DE JANEIRO • SÃO PAULO
2013

CIP-Brasil. Catalogação-na-fonte
Sindicato Nacional dos Editores de Livros, RJ.

Tahan, Malba, 1895-1974

T136h
83ª ed.

O homem que calculava / Malba Tahan. – 83ª ed. – Rio de Janeiro: Record, 2013.

Inclui bibliografia, glossário e apêndice
Formato: ePub
Requisitos do sistema: Adobe Digital Editions
Modo de acesso: World Wide Web
ISBN 978-85-01-40367-4 (recurso eletrônico)

1. Ficção brasileira. I. Título. 2. Livros eletrônicos.

CDD – 869.93
CDU – 869.0(81)-3

83-0868

Projeto de miolo e capa: Ana Sofia Mariz

Texto revisado segundo o novo Acordo Ortográfico da Língua Portuguesa

EDITORA RECORD LTDA.
Rua Argentina 171 __ 20921-380 Rio de Janeiro, RJ __ Tel.: 2585-2000

Produzido no Brasil

ISBN 978-85-01-40367-4

Dedicatória

À memória dos sete grandes geômetras cristãos ou agnósticos:

Descartes, Pascal, Newton, Leibnitz, Euler, Lagrange, Comte,

(Alá se compadeça desses infiéis!)

e à memória do inesquecível matemático, astrônomo e filósofo muçulmano

Buchafar Mohamed Abenmusa Al-Kharismi

(Alá o tenha em sua glória!)

e também a todos os que estudam, ensinam ou admiram a prodigiosa ciência das grandezas, das formas, dos números, das medidas, das funções, dos movimentos e das forças

eu, el-hadj xerife

Ali Iezid Izz-Edim Ibn Salim Hank Malba Tahan

(Crente de Alá e de seu santo profeta Maomé),

dedico esta desvaliosa página de lenda e fantasia.

De Bagdá, 19 da Lua de Ramadã de 1321

Ao Leitor

As notas do próprio Malba Tahan estão assinaladas entre parênteses. As notas sem assinatura são da autoria do tradutor.

Para atender ao pedido de muitos leitores e tendo em vista a dupla finalidade deste livro — educativo e cultural — resolvemos incluir, na parte final, um Apêndice.

No Apêndice encontrarão os interessados esclarecimentos sucintos, dados históricos, indicações bibliográficas etc., sobre os principais problemas e curiosidades que figuram no enredo desta originalíssima novela.

No Glossário, oferecemos aos leitores e pesquisadores as significações de certas palavras (árabes ou persas), frases, alegorias, fórmulas religiosas etc., citadas nos diversos capítulos, e que não foram devidamente esclarecidas nas pequenas notas ao pé das páginas. Para as palavras já esclarecidas, o Glossário indica apenas o capítulo e o número da nota em que o sentido da palavra é devidamente elucidado.

O Glossário é seguido de um pequeno índice de autores citados e de uma bibliografia.

Todas as notas que formam o Apêndice são da autoria do tradutor. Os verbetes que figuram no Glossário e no índice de autores foram cuidadosamente revistos pelo ilustre filólogo Prof. Ragy Basile.

A singular Dedicatória deste livro encerra uma página de alto sentido moral e religioso.

Convém ler, sobre essa Dedicatória, a nota inicial do Apêndice.

Breno Alencar Bianco
São Paulo, 1965

Sumário

O Problema do Diofante

Glossário

Índice de autores, personagens históricos, matemáticos etc.

Bibliografia

1 . No qual encontro, durante uma excursão, singular viajante. Que fazia o viajante e quais as palavras que ele pronunciava.

Em nome de Alá, Clemente e Misericordioso![1]

Voltava eu, certa vez, ao passo lento do meu camelo, pela Estrada de Bagdá, de uma excursão à famosa cidade de Samarra, nas margens do Tigre, quando avistei, sentado numa pedra, um viajante, modestamente vestido, que parecia repousar das fadigas de alguma viagem.

Dispunha-me a dirigir ao desconhecido o salã[2] trivial dos caminhantes quando, com grande surpresa, o vi levantar-se e pronunciar vagarosamente:

— Um milhão, quatrocentos e vinte e três mil, setecentos e quarenta e cinco!

Sentou-se em seguida e quedou em silêncio, a cabeça apoiada nas mãos, como se estivesse absorto em profunda meditação.

Parei a pequena distância e pus-me a observá-lo, como faria diante de um monumento histórico dos tempos lendários.

Momentos depois o homem levantou-se novamente e, com voz clara e pausada, enunciou outro número igualmente fabuloso:

— Dois milhões, trezentos e vinte e um mil, oitocentos e sessenta e seis!

E assim, várias vezes, o esquisito viajante pôs-se de pé, disse em voz alta um número de vários milhões, sentando-se, em seguida, na pedra tosca do caminho.

Sem poder refrear a curiosidade que me espicaçava, aproximei-me do desconhecido e, depois de saudá-lo em nome de Alá (com Ele a oração e a glória),[3] perguntei-lhe a significação daqueles números que só poderiam figurar em gigantescas proporções.

— Forasteiro — respondeu o Homem que Calculava —, não censuro a curiosidade que te levou a perturbar a marcha de meus cálculos e a serenidade de meus pensamentos. E já que soubeste ser delicado no falar e no pedir, vou atender ao teu desejo. Para tanto preciso, porém, contar-te a história de minha vida!

E narrou o seguinte:

NOTAS

[1] O árabe muçulmano não inicia uma obra literária, ou uma simples narrativa, sem fazer essa evocação respeitosa ao nome de Deus. Vale por uma prece.

[2] Saudação. *Ver Glossário*.

[3] Os árabes designam o Criador por quatrocentos e noventa e nove nomes diferentes. Os muçulmanos, sempre que pronunciam o nome de Deus, acrescentam-lhe uma expressão de alto respeito e adoração. O Deus dos muçulmanos é o mesmo Deus dos cristãos. O muçulmanos são rigorosamente monoteístas.

2 . Neste capítulo Beremiz Samir, o Homem que Calculava, conta a história de sua vida. Como fiquei informado dos cálculos prodigiosos que realizava e por que nos tornamos companheiros de jornada.

Chamo-me Beremiz Samir e nasci na pequenina aldeia de Khói, na Pérsia, à sombra da pirâmide imensa formada pelo Ararat. Muito moço ainda, empreguei-me, como pastor, a serviço de um rico senhor de Khamat.[1]

Todos os dias, ao nascer do sol, levava para o campo o grande rebanho e era obrigado a trazê-lo ao abrigo antes de cair a noite. Com receio de perder alguma ovelha tresmalhada e ser, por tal negligência, severamente castigado, contava-as várias vezes durante o dia.

Fui, assim, adquirindo, pouco a pouco, tal habilidade em contar que, por vezes, num relance calculava sem erro o rebanho inteiro. Não contente com isso passei a exercitar-me contando os pássaros quando, em bandos, voavam, pelo céu afora. Tornei-me habilíssimo nessa arte.

Ao fim de alguns meses — graças a novos e constantes exercícios — contando formigas e outros pequeninos insetos, cheguei a praticar a proeza incrível de contar todas as abelhas de um enxame! Essa façanha de calculista, porém, nada viria a valer, diante das muitas outras que mais tarde pratiquei! O meu generoso amo possuía, em dois ou três oásis distantes, grandes plantações de tâmaras e, informado das minhas habilidades matemáticas, encarregou-me de dirigir a venda de seus frutos, por mim contados nos cachos, um a um. Trabalhei, assim, ao pé das tamareiras, cerca de dez anos. Contente com os lucros que obteve, o meu bondoso patrão acaba de conceder-me quatro meses de repouso e vou, agora, a Bagdá, pois tenho desejo de visitar alguns parentes e admirar as belas mesquitas e os suntuosos palácios da cidade famosa. E para não perder tempo, exercito-me durante a viagem, contando as árvores que ensombram esta região, as flores que a perfumam, os pássaros que voam, no céu, entre nuvens.

E, apontando para uma velha e grande figueira que se erguia a pequena distância, prosseguiu:

— Aquela árvore, por exemplo, tem duzentos e oitenta e quatro ramos. Sabendo-se que cada ramo tem, em média, trezentas e quarenta e sete folhas, é fácil concluir que aquela árvore tem um total de noventa e oito mil, quinhentas e quarenta e oito folhas! Estará certo, meu amigo?[2]

— Que maravilha! — exclamei atônito. — É inacreditável possa um homem contar, em rápido volver d'olhos, todos os galhos de uma árvore e as flores de um jardim! Tal habilidade pode proporcionar, a qualquer pessoa, seguro meio de ganhar riquezas invejáveis!

— Como assim? — estranhou Beremiz. — Jamais me passou pela ideia que se pudesse ganhar dinheiro, contando aos milhões folhas de árvores e enxames de abelhas! Quem poderá interessar-se pelo total de ramos de uma árvore ou pelo número do passaredo que cruza o céu durante o dia?

— A vossa admirável habilidade — expliquei — pode ser empregada em vinte mil casos diferentes. Numa grande capital, como Constantinopla, ou mesmo Bagdá, sereis auxiliar precioso para o governo. Podereis calcular populações, exércitos e rebanhos. Fácil vos será avaliar os recursos do país, o valor das colheitas, os impostos, as mercadorias e todos os recursos do Estado. Asseguro-vos — pelas relações que mantenho, pois sou bagdali[3] — que não vos será difícil obter lugar de destaque junto ao glorioso califa Al-Motacém (nosso amo e senhor). Podeis, talvez, exercer o cargo de vizir-tesoureiro ou desempenhar as funções de secretário da Fazenda muçulmana![4]

— Se assim é, ó jovem — respondeu o calculista —, não hesito. Vou contigo para Bagdá.

E sem mais preâmbulos, acomodou-se como pôde em cima do meu camelo (único que possuíamos), e pusemo-nos a caminhar pela larga estrada em direção à gloriosa cidade.

E daí em diante, ligados por este encontro casual em meio da estrada agreste, tornamo-nos companheiros e amigos inseparáveis.

Beremiz era de gênio alegre e comunicativo. Muito moço ainda — pois não completara vinte e seis anos —, era dotado de inteligência extremamente viva e notável aptidão para a ciência dos números.

Formulava, às vezes, sobre os acontecimentos mais banais da vida, comparações inesperadas que denotavam grande agudeza de espírito e raro talento matemático. Sabia, também, contar histórias e narrar episódios que muito ilustravam suas palestras, já de si atraentes e curiosas.

Às vezes punha-se várias horas, em silêncio, num silêncio maníaco, a meditar sobre cálculos prodigiosos. Nessas ocasiões esforçava-me por não o perturbar. Deixava-o sossegado, a fim de que ele pudesse fazer, com os recursos de sua memória privilegiada, descobertas retumbantes nos misteriosos arcanos da Matemática, a ciência que os árabes tanto cultivaram e engrandeceram.[5]

NOTAS

[1] Khamat de Maru, cidade situada na base do Monte Ararat. Khói fica no vale desse mesmo nome e é banhada pelas águas que descem das montanhas de Salmas. (Nota de Malba Tahan.)

[2] Ver *Apêndice: Calculistas famosos.*

[3] Bagdali, indivíduo natural de Bagdá.

[4] Califado, conselho de ministros do rei.

[5] Ver *Apêndice: Os Árabes* e *a Matemática*.

3. Onde é narrada a singular aventura dos 35 camelos que deviam ser repartidos por três árabes. Beremiz Samir efetua uma divisão que parecia impossível, contentando plenamente os três querelantes. O lucro inesperado que obtivemos com a transação.

Poucas horas havia que viajávamos sem interrupção, quando nos ocorreu uma aventura digna de registro, na qual meu companheiro Beremiz, com grande talento, pôs em prática as suas habilidades de exímio algebrista.

Encontramos, perto de um antigo caravançará[1]. meio abandonado, três homens que discutiam acaloradamente ao pé de um lote de camelos.

Por entre pragas e impropérios gritavam possessos, furiosos:

— Não pode ser!

— Isto é um roubo!

— Não aceito!

O inteligente Beremiz procurou informar-se do que se tratava.

— Somos irmãos — esclareceu o mais velho — e recebemos, como herança, esses 35 camelos. Segundo a vontade expressa de meu pai, devo receber a metade, o meu irmão Hamed Namir uma terça parte e ao Harim, o mais moço, deve tocar apenas a nona parte. Não sabemos, porém, como dividir dessa forma 35 camelos e a cada partilha proposta segue-se a recusa dos outros dois, pois a metade de 35 é 17 e meio. Como fazer a partilha se a terça parte e a nona parte de 35 também não são exatas?

— É muito simples — atalhou o Homem que Calculava. — Encarrego-me de fazer, com justiça, essa divisão, se permitirem que eu junte aos 35 camelos da herança este belo animal que, em boa hora, aqui nos trouxe!

Neste ponto, procurei intervir na questão:

— Não posso consentir em semelhante loucura! Como poderíamos concluir a viagem, se ficássemos sem o camelo?

— Não te preocupes com o resultado, ó Bagdali! — replicou-me em voz baixa Beremiz. — Sei muito bem o que estou fazendo. Cede-me o teu camelo e verás no fim a que conclusão quero chegar.

Tal foi o tom de segurança com que ele falou, que não tive dúvida em entregar-lhe o meu belo jamal,[2] que, imediatamente, foi reunido aos 35 ali presentes, para serem repartidos pelos três herdeiros.

— Vou, meus amigos — disse ele, dirigindo-se aos três irmãos —, fazer a divisão justa e exata dos camelos que são agora, como veem, em número de 36.

E, voltando-se para o mais velho dos irmãos, assim falou:

— Deverias receber, meu amigo, a metade de 35, isto é, 17 e meio. Receberás a metade de 36 e, portanto, 18. Nada tens a reclamar, pois é claro que saíste lucrando com esta divisão!

E, dirigindo-se ao segundo herdeiro, continuou:

— E tu, Hamed Namir, deverias receber um terço de 35, isto é, 11 e pouco. Vais receber um terço de 36, isto é, 12. Não poderás protestar, pois tu também saíste com visível lucro na transação.

E disse, por fim, ao mais moço:

— E tu, jovem Harim Namir, segundo a vontade de teu pai, deverias receber uma nona parte de 35, isto é, 3 e tanto. Vais receber uma nona parte de 36, isto é, 4. O teu lucro foi igualmente notável. Só tens a agradecer-me pelo resultado!

E concluiu com a maior segurança e serenidade:

— Pela vantajosa divisão feita entre os irmãos Namir — partilha em que todos três saíram lucrando — couberam 18 camelos ao primeiro, 12 ao segundo e 4 ao terceiro, o que dá um resultado (18+12+4) de 34 camelos. Dos 36 camelos, sobram, portanto, dois. Um pertence, como sabem, ao bagdali, meu amigo e companheiro, outro toca por direito a mim, por ter resolvido, a contento de todos, o complicado problema da herança![3]

— Sois inteligente, ó Estrangeiro! — exclamou o mais velho dos três irmãos. — Aceitamos a vossa partilha na certeza de que foi feita com justiça e equidade!

E o astucioso Beremiz — o Homem que Calculava — tomou logo posse de um dos mais belos “jamales” do grupo e disse-me, entregando-me pela rédea o animal que me pertencia:

— Poderás agora, meu amigo, continuar a viagem no teu camelo manso e seguro! Tenho outro, especialmente para mim!

E continuamos nossa jornada para Bagdá.

NOTAS

[1] Refúgio construído pelo governo ou por pessoas piedosas à beira do caminho, para servir de abrigo aos peregrinos. Espécie de rancho de grandes dimensões em que se acolhiam as caravanas.

[2] Uma das muitas denominações que os árabes dão ao camelo.

[3] A análise desse curioso problema os leitores encontrarão no *Apêndice*.

4 . Do nosso encontro com um rico xeque. O xeque estava a morrer de fome no deserto. A proposta que nos fez sobre os 8 pães que trazíamos, e como se resolveu, de modo imprevisto, o pagamento com 8 moedas. As três divisões de Beremiz: a divisão simples, a divisão certa e a divisão perfeita. Elogio que um ilustre vizir dirigiu ao Homem que Calculava.

Três dias depois, aproximávamo-nos das ruínas de pequena aldeia — denominada Sippar[1] — quando encontramos, caído na estrada, um pobre viajante, roto e ferido.

Socorremos o infeliz e dele próprio ouvimos o relato de sua aventura.

Chamava-se Salém Nasair, e era um dos mais ricos mercadores de Bagdá. Ao regressar, poucos dias antes, de Báçora, com grande caravana, pela estrada de el-Hilleh,[2] fora atacado por uma chusma de nômades persas do deserto. A caravana foi saqueada e quase todos os seus componentes pereceram nas mãos dos beduínos. Ele — o chefe — conseguira, milagrosamente, escapar, oculto na areia, entre os cadáveres dos seus escravos.

E, ao concluir a narrativa de sua desgraça, perguntou-nos com voz angustiosa:

— Trazeis, por acaso, ó muçulmanos, alguma coisa que se possa comer? Estou quase, quase a morrer de fome!

— Tenho, de resto, três pães — respondi.

— Trago ainda cinco! — afirmou, a meu lado, o Homem que Calculava.

— Pois bem — sugeriu o xeque[3] —, juntemos esses pães e façamos uma sociedade única. Quando chegar a Bagdá prometo pagar com 8 moedas de ouro o pão que comer!

Assim fizemos. No dia seguinte, ao cair da tarde, entramos na célebre cidade de Bagdá, a pérola do Oriente.

Ao atravessarmos vistosa praça, demos de rosto com aparatoso cortejo. Na frente marchava, em garboso alazão, o poderoso Ibrahim Maluf, um dos vizires.[4]

O vizir, ao avistar o xeque Salém Nasair em nossa companhia, chamou-o e, fazendo parar a sua poderosa guarda, perguntou-lhe:

— Que te aconteceu, ó meu amigo? Por que te vejo chegar a Bagdá, roto e maltrapilho, em companhia de dois homens que não conheço?

O desventurado xeque narrou, minuciosamente, ao poderoso ministro, tudo o que lhe ocorrera em caminho, fazendo a nosso respeito os maiores elogios.

— Paga sem perda de tempo a esses dois forasteiros — ordenou-lhe o grão-vizir.

E, tirando de sua bolsa 8 moedas de ouro, entregou-as a Salém Nasair, acrescentando:

— Quero levar-te agora mesmo ao palácio, pois o Comendador dos Crentes deseja, com certeza, ser informado da nova afronta que os bandidos e beduínos praticaram, matando nossos amigos e saqueando caravanas dentro de nossas fronteiras.

O rico Salém Nasair disse-nos, então:

— Vou deixar-vos, meus amigos. Antes, porém, desejo agradecer-vos o grande auxílio que ontem me prestastes. E para cumprir a palavra dada, vou pagar já o pão que generosamente me destes!

E dirigindo-se ao Homem que Calculava disse-lhe:

— Vais receber, pelos 5 pães, 5 moedas!

E voltando-se para mim, ajuntou:

— E tu, ó Bagdali, pelos 3 pães, vais receber 3 moedas!

Com grande surpresa, o calculista objetou respeitoso:

— Perdão, ó Xeque. A divisão, feita desse modo, pode ser muito simples, mas não é matematicamente certa! Se eu dei 5 pães devo receber 7 moedas; o meu companheiro bagdali, que deu 3 pães, deve receber apenas uma moeda.

— Pelo nome de Maomé![5] — interveio o vizir Ibrahim, interessado vivamente pelo caso. — Como justificar, ó Estrangeiro, tão disparatada forma de pagar 8 pães com 8 moedas? Se contribuíste com 5 pães, por que exiges 7 moedas? Se o teu amigo contribuiu com 3 pães, por que afirmas que ele deve receber uma única moeda?

O Homem que Calculava aproximou-se do prestigioso ministro e assim falou:

— Vou provar-vos, ó Vizir, que a divisão das 8 moedas, pela forma por mim proposta, é matematicamente certa. Quando, durante a viagem, tínhamos fome, eu tirava um pão da caixa em que estavam guardados e repartia-o em três pedaços, comendo, cada um de nós, um desses pedaços. Se eu dei 5 pães, dei, é claro, 15 pedaços; se o meu companheiro deu 3 pães, contribuiu com 9 pedaços. Houve, assim, um total de 24 pedaços, cabendo, portanto, 8 pedaços para cada um. Dos 15 pedaços que dei, comi 8; dei, na realidade, 7; o meu companheiro deu, como disse, 9 pedaços e comeu, também, 8; logo, deu apenas 1. Os 7 pedaços que eu dei e que o bagdali forneceu formaram os 8 que couberam ao xeque Salém

Nasair. Logo, é justo que eu receba 7 moedas e o meu companheiro, apenas uma.

O grão-vizir, depois de fazer os maiores elogios ao Homem que Calculava, ordenou que lhe fossem entregues sete moedas, pois a mim me cabia, por direito, apenas uma. Era lógica, perfeita e irrespondível a demonstração apresentada pelo matemático.

— Esta divisão — retorquiu o calculista — de sete moedas para mim e uma para meu amigo, conforme provei, é matematicamente certa, mas não é perfeita aos olhos de Deus!

E tomando as moedas na mão dividiu-as em duas partes iguais. Deu-me uma dessas partes (4 moedas), guardando, para si, as quatro restantes.

— Esse homem é extraordinário — declarou o vizir. — Não aceitou a divisão proposta de 8 dinares em duas parcelas de 5 e 3, em que era favorecido; demonstrou ter direito a 7 e que seu companheiro só devia receber um dinar, acabando por dividir as 8 moedas em 2 parcelas iguais, que repartiu, finalmente, com o amigo.

E acrescentou com entusiasmo:

— Mac Allah![6] Esse jovem, além de parecer-me um sábio e habilíssimo nos cálculos e na Aritmética, é bom para o amigo e generoso para o companheiro. Tomo-o, hoje mesmo, para meu secretário!

— Poderoso Vizir — tornou o Homem que Calculava —, vejo que acabais de fazer com 32 vocábulos, com um total de 143 letras, o maior elogio que ouvi em minha vida, e eu, para agradecer-vos, sou forçado a empregar 64 palavras nas quais figuram nada menos de 286 letras. O dobro, precisamente! Que Alá vos abençoe e vos proteja!

Com tais palavras o Homem que Calculava deixou a todos nós maravilhados com sua argúcia e invejável talento. A sua capacidade de calculista ia ao extremo de contar as palavras e as letras de uma frase que acabara de ouvir.

NOTAS

[1] Antiga aldeia nos arredores de Bagdá.

[2] Pequena povoação na estrada de Báçora.

[3] Termo de respeito que se aplica, em geral, aos sábios, religiosos e pessoas respeitáveis pela idade ou posição social.

[4] Vizir é o termo para ministro. Califa é o soberano dos muçulmanos. Os califas diziam-se sucessores de Maomé. A ele era concedido o título honroso de *Comendador dos Crentes*.

[5] Fundador do Islamismo, a religião dos árabes. Nasceu, em Meca, no ano 571 e morreu no ano 632. Uma das personalidades mais notáveis da História.

[6] Exclamação usual entre muçulmanos que significa “Poderoso é Deus!”. Leia-se: *Maque-alá*.

5. No qual vamos para uma hospedaria. Palavras calculadas por minuto. Beremiz resolve um problema e determina a dívida de um joalheiro.

Logo que deixamos a companhia do xeque Nasair e do vizir Maluf, encaminhamo-nos para uma pequena hospedaria denominada Marreco Dourado, nas vizinhanças da mesquita de Solimã.

Os nossos camelos foram vendidos a um chamir[1] de minha confiança, que morava perto.

Em caminho disse a Beremiz:

— Já vê, meu amigo, que tive razão quando afirmei que um calculista hábil acharia com facilidade um bom emprego em Bagdá! Mal você chegou, foi convidado para exercer o cargo de secretário de um vizir. Não precisará voltar para a tal aldeia de Khói, penhascosa e triste.

— Mesmo que aqui prospere — respondeu-me o calculista — e enriqueça, pretendo voltar, mais tarde, à Pérsia, para rever o meu torrão natal. Ingrato é aquele que esquece a pátria e os amigos de infância, quando tem a felicidade de encontrar, na vida, o oásis da prosperidade e da fortuna.

E acrescentou, tomando-me pelo braço:

— Viajamos juntos, até o presente momento, 8 dias, exatamente. Durante esse tempo, para esclarecer dúvidas e indagar sobre coisas que me interessavam, pronunciei, precisamente, 414.720 palavras. Ora, como em 8 dias há 11 520 minutos, posso concluir que, durante a nossa jornada, pronunciei, em média, 36 palavras por minuto, isto é, 2 160 por hora. Esses números mostram que falei pouco, fui discreto e não tomei o teu tempo fazendo-te ouvir discursos estéreis. O homem taciturno, excessivamente calado, torna-se desagradável; mas os que falam sem parar irritam ou enfastiam seus ouvintes. Devemos, pois, evitar as palavras inúteis sem cair no laconismo exagerado, incompatível com a delicadeza. A tal respeito, poderei narrar um caso muito curioso.

Depois de ligeira pausa, o calculista contou-me o seguinte:

— Havia em Teerã, na Pérsia, um velho mercador que tinha três filhos. Um dia o mercador chamou os jovens e disse-lhes: "Aquele que passar o dia sem pronunciar palavras inúteis receberá, de mim, um prêmio de vinte e três timões."[2]

Ao cair da noite os três filhos foram ter à presença do ancião. Disse o primeiro:

— Evitei hoje, meu pai, todas as palavras inúteis. Espero, portanto, merecer (segundo a vossa promessa) o prêmio combinado — prêmio esse de vinte e três timões, conforme deveis estar lembrado.

O segundo aproximou-se do velho, beijou-lhe as mãos, e limitou-se a dizer:

— Boa noite, meu Pai!

O mais moço, finalmente, não pronunciou palavra, aproximou-se do velho e estendeu-lhe apenas a mão para receber o prêmio. O mercador, ao observar a atitude dos três rapazes, assim falou:

— O primeiro, ao chegar à minha presença, fatigou-me a atenção com várias palavras inúteis; o terceiro mostrou-se exageradamente lacônico. O prêmio caberá, pois, ao segundo, que foi discreto, sem verbosidade e simples, sem afetação:

E Beremiz, ao concluir, interpelou-me:

— Não acha que o velho mercador agiu com justiça, ao julgar os três filhos?

Nada respondi. Achei melhor não discutir o caso dos vinte e três timões com aquele homem prodigioso que reduzia tudo a números, calculava médias e resolvia problemas.

Momentos depois chegávamos ao Marreco Dourado.

O dono da hospedaria chamava-se Salim e fora empregado do meu pai. Ao avistar-me gritou risonho:

— Alá sobre ti, meu menino![3] Aguardo as tuas ordens agora e sempre!

Disse-lhe que precisava de um quarto para mim e para o meu amigo Beremiz Samir, o calculista, secretário do vizir Maluf.

— Esse homem é calculista? — indagou o velho Salim. — Chegou, então, em momento oportuno para tirar-me de um embaraço. Acabo de ter séria divergência com um vendedor de joias. Discutimos longo tempo e de nossa discussão resultou, afinal, um problema que não sabemos resolver.

Informadas de que um grande calculista havia chegado à hospedaria, várias pessoas aproximaram-se curiosas. O vendedor de joias foi chamado e declarou achar-se interessadíssimo na resolução do tal problema.

— Qual é, afinal, a origem da dúvida? — perguntou Beremiz.

— Esse homem (e apontou para o joalheiro) veio da Síria vender joias em Bagdá; prometeu-me que pagaria, pela hospedagem, 20 dinares se vendesse as joias por 100 dinares, pagando 35 se as vendesse por 200.

Ao cabo de vários dias, tendo andado daqui para ali, acabou vendendo tudo por 140 dinares. Quanto deve pagar, consoante a nossa combinação, pela hospedagem?

— Devo pagar apenas vinte e quatro dinares e meio! — replicou logo o mercador sírio. — Se para a venda de 200 eu pagaria 35, para a venda de 140 eu devo pagar 24 e meio!

Proporção feita pelo mercador de joias:
Duzentos está para trinta e cinco, assim como cento e quarenta está para x ou:
200 : 35 : : 140 : x
Multiplicando os meios e dividindo pelo extremo, o resultado será:
x = 24,5
Total da dívida.

— Está errado! — contrariou irritado o velho Salim. — Pelas minhas contas são 28. — Veja bem: Se para 100 eu deveria receber 20, para 140, da venda, devo receber 28. E vou provar.

E o velho Salim raciocinou do seguinte modo:

— Se para 100 eu deveria receber 20, para 10 (que é a décima parte de 100), eu deveria receber a décima parte de 20.

Qual é a décima parte de 20?

A décima parte de 20 é 2.

Logo, para 10, eu deveria receber 2.

140 quantos 10 contêm?

140 contêm 14 vezes 10.

Proporção feita pelo dono da hospedaria:
Cem está para vinte, assim como cento e quarenta está para x ou:
100 : 20 : : 140 : x
O valor de x é
28
Total da dívida.

Logo, para 140, eu devo receber 14 vezes 2, que é igual a 28, como já disse.

E o velho Salim, depois de todos aqueles cálculos, bradou enérgico:

— Devo receber 28. É esta a conta certa!

— Calma, meus amigos — interrompeu o calculista. — É preciso encarar as dúvidas com serenidade e mansidão. A precipitação conduz ao erro e à discórdia. Os resultados que os senhores indicam estão errados, conforme vou provar.

E esclareceu o caso do seguinte modo:

— De acordo com a combinação feita, o sírio seria obrigado a pagar 20 dinares pela hospedagem, se vendesse as joias por 100, e seria obrigado a pagar 35 se as vendesse por 200.

Temos assim:

Preço da venda	Custo da hospedagem
200	35
100	20
dif. ... 100	dif. ... 15

Reparem que a diferença de 100, no preço da venda, corresponde a uma diferença de 15 no preço da hospedagem! Não é claro?

— Claro como leite de camela! — assentiram os dois.

— Ora — prosseguiu o calculista —, se o acréscimo de 100 na venda traria um aumento de 15 na hospedagem, eu pergunto: Qual será o aumento da hospedagem para o acréscimo de 40 na venda? Se a diferença fosse de 20 (que é um quinto de 100), o aumento da hospedagem seria de 3 (pois 3 é um quinto de 15). Para a diferença de 40 (que é o dobro de 20), o acréscimo da hospedagem deverá ser de 6. O pagamento correspondente a 140 é, portanto, de 26.

Proporção feita pelo calculista:

Cem está para quinze assim como quarenta está para x, ou:

$$100 : 15 :: 40 : x$$

O valor de x é 6
(Acréscimo de preço e não o total da dívida)

— Meu amigo! Os números, na simplicidade com que se apresentam, iludem, não raro, os mais atilados. As proporções que nos parecem perfeitas estão, por vezes, falseadas pelo erro. Da incerteza dos cálculos é que resulta o indiscutível prestígio da Matemática. Nos termos da combinação, o senhor deverá pagar ao hospedeiro 26 dinares e não 24 e meio, como a princípio acreditava! Há ainda, na solução final desse problema, pequena diferença que não merece ser apurada e cuja grandeza não disponho de recursos para exprimir numericamente.[4]

— O senhor tem toda razão — assentiu o joalheiro. — Reconheço agora que o meu cálculo estava errado.

E, sem hesitar, tirou da bolsa 26 dinares e entregou-os ao velho Salim, oferecendo, de presente, ao talentoso Beremiz, um belo anel de ouro com duas pedras escuras, exornando a dádiva com afetuosas expressões.

Todos quantos se achavam na hospedaria admiraram-se da sagacidade do novo calculista, cuja fama, dia a dia, galgava, a passos largos, a almenara[5] do triunfo.

NOTAS

1 Chefe de caravana.

2 *Timão* ou tomão — Moeda persa de ouro.

3 Alá sobre ti, significa “Deus te proteja”.

4 Esse problema só pode ser resolvido, de modo completo, à luz da teoria das interpolações. Ver *Apêndice*.

5 Torre de que são providas as mesquitas. Das almenaras, ou minaretes, o muezim chama os fiéis à prece.

6. Do que ocorreu durante a nossa visita ao vizir Maluf. Encontramos o poeta Iezid, que não acreditava nos prodígios do Cálculo. O Homem que Calculava conta, de modo original, uma cáfila numerosa. A idade da noiva e um camelo sem orelha. Beremiz descobre a "amizade quadrática" e fala do rei Salomão.

Depois da segunda prece,[1] deixamos a Hospedaria do Marreco Dourado e seguimos, a passos rápidos, para a residência do vizir Ibrahim Maluf, ministro do rei.

Ao entrar na rica morada do nobre muçulmano fiquei, realmente, encantado.

Cruzamos pesada porta de ferro e percorremos um corredor estreito, e sempre guiados por um escravo núbio gigantesco (que trazia algemas de ouro no punho esquerdo) fomos conduzidos ao soberbo jardim interno do palácio.

Esse jardim, construído com fino gosto, era ensombrado por duas filas paralelas de laranjeiras. Para esse jardim abriam-se várias portas, algumas das quais deviam servir ao harém do palácio. Duas escravas kafiras que se achavam, descuidadas, colhendo flores, logo que os avistaram correram entre os canteiros e desapareceram atrás das colunas.

Do jardim, que me pareceu alegre e gracioso, passava-se por uma porta estreita, aberta em muro bastante alto, para o primeiro pátio da belíssima vivenda. Digo *primeiro* porque a residência dispunha de outro pátio na ala esquerda do edifício.

No meio desse primeiro pátio, todo coberto de esplêndido mosaico, relumbrava uma fonte com três repuxos. As três curvas líquidas,[2] formadas no espaço, rebrilhavam ao sol.

Atravessamos o pátio e, sempre guiados pelo escravo das algemas de ouro, fomos levados para o interior do palácio. Cruzamos várias salas ricamente enfeitadas com tapeçarias bordadas com fios de prata e chegamos, finalmente, ao aposento em que se achava o prestigioso ministro do rei.

Fomos encontrá-lo recostado em grandes almofadas, a palestrar com dois de seus amigos.

Um deles (logo reconheci) era o xeque Salém Nasair, nosso companheiro de aventuras no deserto; o outro era um homem baixo, de rosto redondo, fisionomia bondosa, a barba ligeiramente grisalha. Trajava com apurado gosto e ostentava no peito uma medalha de forma retangular, tendo uma das metades amarela, cor de ouro, e outra escura como bronze.

O vizir Maluf recebeu-nos com demonstrações de viva simpatia. Dirigindo-se ao homem da medalha, disse, risonho:

— Eis aí, meu caro Iezid, o nosso grande calculista. Este jovem que o acompanha é um bagdali que o descobriu, por acaso, quando jornadeava pelos caminhos de Alá.[3]

Dirigimos respeitoso salã ao nobre xeque. Soubemos, mais tarde, que se tratava de brilhante poeta — Iezid Abdul-Hamid — amigo e confidente do califa Al-Motacém. Aquela medalha singular ele a recebera, como prêmio, das mãos do califa, por ter escrito um poema com trinta mil e duzentos versos sem empregar uma única vez as letras *Kaf*, *Iam* e *ayn*.[4]

— Custa-me acreditar, amigo Maluf — declarou, em tom risonho, o poeta Iezid —, nas façanhas prodigiosas levadas a termo por esse calculista persa. Quando os números se combinam, aparecem, também, os artifícios de cálculo e as sutilezas algébricas. Ao rei El-Harit, filho de Modad, apresentou-se certa vez um mago, que afirmava poder ler na areia o destino dos homens. “O senhor faz cálculos?” — perguntou o rei. E antes que o mago despertasse do espanto em que se achava, o monarca ajuntou: “Se não faz cálculo, suas previsões nada valem: se as obtém pelo cálculo, duvido muito delas.” Aprendi na Índia um provérbio que diz: “É preciso desconfiar sete vezes do cálculo e cem vezes do matemático.”[5]

— Para pôr termo a essas desconfianças — sugeriu o vizir — vamos submeter o nosso hóspede a uma prova decisiva.

E dizendo isso, ergueu-se da cômoda almofada e, tomando delicadamente Beremiz pelo braço, conduziu-o até uma das varandas do palácio.

Abria essa varanda para o segundo pátio lateral que, no momento, desbordava de camelos. E que lindos espécimes! Quase todos pareciam de boa raça. Avistei, de pronto, dois ou três brancos, da mongólia, e vários *carehs*, de pelo claro.

— Eis aí — disse o vizir — a bela partida de camelos que comprei ontem e que pretendo enviar, como dote, ao pai de minha noiva. Sei precisamente, sem erro possível, quantos são!

E o vizir, para tornar mais interessante a prova, enunciou, em segredo, ao ouvido de seu amigo Iezid, o poeta, o número total das alimárias.

— Quero agora — prosseguiu, voltando-se para Beremiz — que o nosso calculista diga quantos camelos se acham no pátio, diante de nós.

Fiquei apreensivo com o caso. Os camelos eram numerosos e confundiam-se no meio da agitação em que se achavam. Se o meu amigo, por um descuido, errasse no cálculo, a nossa visita teria, como consequência, o mais doloroso fracasso. Depois de correr os olhos pela irrequieta cáfila, o inteligente Beremiz disse:

— Senhor Vizir! Quero crer que se encontram, agora, neste pátio, 257 camelos!

— É isso mesmo — confirmou o vizir. — Acertou. O total é realmente esse: 257! *Kelimet-Uallah*![6]

— E como chegou a esse resultado tão depressa, e com tanta precisão? — indagou, com indisfarçável curiosidade, o poeta Iezid.

— Muito simplesmente — explicou Beremiz. — Contar os camelos, um por um, seria, a meu ver, tarefa sem interesse, do valor de uma bagatela. Para tornar mais interessante o problema, procedi da seguinte forma: Contei primeiro todas as pernas e em seguida as orelhas: achei, desse modo, um total de 1.541. A este total juntei uma unidade, e dividi o resultado por 6. Feita essa pequena divisão, encontrei o quociente exato: 257!

— Pela glória da Caaba![7] — clamou, com alegria, o vizir. — Isso tudo é originalíssimo e estupendo! Quem pudera imaginar que esse calculista, para tornar mais interessante o problema, fosse capaz de contar todas as pernas e orelhas de 257 camelos!

E repetiu com sincero entusiasmo:

— Pela glória da Caaba!

— Devo dizer, senhor Vizir — retorquiu Beremiz —, que os cálculos se tornam, às vezes, complicados e difíceis em consequência do descuido ou da falta de habilidade do calculista. Certa vez, em Khói, na Pérsia, quando vigiava o rebanho de meu amo, passou pelo céu um bando de borboletas. Um pastor, a meu lado, perguntou-me se eu poderia contá-las. "São oitocentas e cinquenta e seis!" — respondi. "Oitocentas e cinquenta e seis!" — exclamou o meu companheiro, como se achasse exagerado aquele total. Só então verifiquei que por descuido havia contado não as borboletas, mas as suas asas. Feita a necessária divisão por 2, encontrei, a seguir, o resultado certo.

Ao ouvir o relato desse caso, expandiu-se o vizir em estrepitosa risada que soava, aos meus ouvidos, como se fora uma música deliciosa.

— Há nisso tudo — interveio, muito sério, o poeta Iezid — uma particularidade que me escapa ao raciocínio. A divisão por 6 é aceitável, uma vez que cada camelo tem 4 patas e 2 orelhas e a soma (4 + 2) é igual a 6.[8] Não compreendo, porém, é a razão que o levou a juntar 1 ao total antes de dividi-lo por 6!

— Nada mais simples — acudiu logo Beremiz. — Ao contar as orelhas, notei que um dos camelos era defeituoso (só tinha uma orelha). Para que a conta ficasse certa era preciso acrescentar 1 ao total obtido.

E, voltando-se para o vizir, perguntou:

— Seria indiscrição ou imprudência de minha parte perguntar-vos, ó Vizir, qual a idade daquela que tem a ventura de ser vossa noiva?

— De modo algum — respondeu, risonho, o ministro. — Astir tem 16 anos!

E acrescentou, sublinhando as palavras com um ligeiro tom de desconfiança:

— Mas não vejo relação alguma, senhor calculista, entre a idade da minha noiva e os camelos que vou oferecer, de presente, ao meu futuro sogro!

— Desejo apenas — refletiu Beremiz — fazer-vos uma pequena sugestão. Se retirardes da cáfila o tal camelo defeituoso (sem orelha) o total passará a ser de 256. Ora, 256 é o quadrado de 16, isto é, 16 vezes 16. O presente oferecido ao pai da encantadora Astir tomará, desse modo, feição altamente matemática: O número de camelos que formam o lote é igual ao quadrado da idade da noiva! Além do mais, o número 256 é potência exata do número 2 (que para os antigos é número simbólico), ao passo que 257 é primo.[9] Essas relações entre os números quadrados são de bom augúrio para os apaixonados. Há uma lenda muito interessante sobre os números quadrados. Quereis ouvi-la?

— Com muito prazer — respondeu o vizir. — As lendas famosas, quando bem narradas, são como brincos de ouro para os meus ouvidos.

Depois de ouvir palavras tão lisonjeiras, o calculista inclinou a cabeça, num gesto de agradecimento, e começou:

— Conta-se que o famoso rei Salomão,[10] para demonstrar a finura e a sabedoria de seu espírito, deu à sua noiva, a rainha de Sabá — a famosa Belquiss — uma caixa com 529 pérolas. Por que 529? Sabe-se que 529 é o quadrado de 23, isto, é, 529 é igual a 23 multiplicado por 23. E 23 era, exatamente, a idade da rainha. No caso da jovem Astir, o número 256 virá substituir, com muita vantagem, o número 529.

Todos olharam, com certo espanto, para o calculista. E este, em tom calmo e sereno, prosseguiu:

— Vamos somar os algarismos de 256. Obtemos a soma 13. O quadrado de 13 é 169. Vamos, agora, somar os algarismos de 169. A soma dos algarismos de 169 é 16. Existe, portanto, entre os números 13 e 16, uma curiosa relação que poderia ser chamada a "amizade quadrática". Realmente, se os números falassem, poderíamos ouvir o seguinte diálogo. O Dezesseis diria ao Treze:

— Quero prestar-te uma homenagem, meu caro. O meu quadrado é 256 e a soma dos algarismos desse quadrado é 13.

O Treze responderia:

— Agradeço a tua gentileza, meu amigo, e quero retribuí-la na mesma moeda. O meu quadrado é 169 e a soma dos algarismos desse quadrado é 16.

Parece-me que justifiquei cabalmente a preferência que deve ser dada ao número 256 que excede, por suas singularidades, o número 257.

— A sua ideia é bastante curiosa — concordou, prontamente, o vizir —, e vou executá-la, muito embora venha sobre mim pesar a acusação de plagiário do grande Salomão!

E, dirigindo-se ao poeta, Iezid, rematou:

— Noto que a inteligência desse calculista não é menor que a sua habilidade em descobrir analogias e inventar lendas. Muito acertado andei no momento em que resolvi convidá-lo para meu secretário.

— Sinto dizer-vos, ilustre Mirza[11] — tornou Beremiz —, que só poderia aceitar o vosso honroso convite se aqui houvesse também lugar para o meu bom amigo Hank-Tade-Maiá — o bagdali, que ora se vê desempregado e sem recursos.

Fiquei encantado com a delicada lembrança do calculista. Ele procurava, desse modo, atrair a meu favor a valiosa proteção do poderoso vizir.

— É muito justo o seu pedido — condescendeu o vizir. — O seu companheiro Hank-Tade-Maiá ficará exercendo aqui as funções de escriba, com o ordenado que lhe couber.

Aceitei, sem hesitar, a proposta, exprimindo logo ao vizir, e também ao bondoso Beremiz, o meu reconhecimento.

NOTAS

[1] Ver *Glossário*.

[2] Essas curvas são parábolas.

[3] Ir pelos caminhos de Alá significa jornadear pelo mundo sem destino certo.

[4] São três letras notáveis de uso corrente no alfabeto árabe.

[5] Era essa a denominação dada a falsos astrólogos e embusteiros.

[6] Palavra de Deus — Ver *Glossário*.

[7] Ver *Glossário*.

[8] Se os camelos fossem, por exemplo, em número de dez, o total de pernas e orelhas (seis para cada um) seria, é claro, 60. Importa, pois, dizer que o número de camelos é obtido dividindo-se por 6 o número total de pernas e orelhas.

[9] *Número primo* (entre os números naturais) é aquele que só é divisível por si mesmo e pela unidade. São primos os números 2, 3, 5, 7, 11, 13 etc.

[10] O leitor encontrará, no *Glossário*, o relato surpreendente da morte de Salomão.

[11] O vocábulo persa *mirza* quer dizer literalmente "nascidos de mir", isto é, nobre, fidalgo. Beremiz, por ser de origem persa, dava, ao xeque, o título honroso de *mirza*.

7. Nossa visita ao suque dos mercadores. Beremiz e o turbante azul. O caso dos quatro quatros. O problema dos cinquenta dinares. Beremiz resolve o problema e recebe um belíssimo presente.

Alguns dias depois, encerrados os trabalhos que fazíamos no palácio do vizir, fomos dar um giro pelo suque[1] e pelos jardins de Bagdá.

A cidade apresentava, naquela tarde, um movimento intenso, febril, fora do comum. É que, pela manhã, haviam chegado duas ricas caravanas de Damasco.

No bazar dos sapateiros, por exemplo, mal se podia entrar; havia sacos e caixas, com mercadorias, amontoados nos pátios das estalagens. Forasteiros damascenos, com imensos turbantes coloridos, ostentando nas cinturas suas armas, caminhavam descuidados, olhando com indiferença para os mercadores. Sentia-se um cheiro forte de incenso, de quife[2] e de especiarias. Vendedores de favas discutiam, quase se agrediam, proferindo pragas tremendas em sírio.

Um jovem guitarrista mossulense, sentado sobre grandes sacos de melancia, cantava uma toada monótona e triste:

Que importa a vida da gente,
Se a gente, por mal ou bem,
Vai vivendo simplesmente
A vida que a gente tem?[3]

Vendedores, nas portas de suas tendas, apregoavam suas mercadorias, exaltando-as com elogios exagerados e fantasiosos, no que é fértil a imaginação dos árabes.

— Este rico tecido é digno do nosso emir!

— Amigos! Eis um delicioso perfume que lembra os carinhos de vossa esposa!

— Reparai, ó xeque, nestas chinelas e neste lindo cafetã[4] que os djins[5] recomendam aos anjos!

Interessou-se Beremiz por um elegante e harmonioso turbante azul-claro que um sírio, meio corcunda, oferecia por 4 dinares. A tenda desse mercador era, aliás, muito original, pois tudo ali (turbantes, caixas, punhais, pulseiras etc.) era vendido por 4 dinares. Havia um letreiro, em letras vistosas, que dizia:

Os quatro quatros

Ao ver Beremiz interessado em adquirir o turbante azul, objetei:

— Julgo loucura comprar esse luxo. Estamos com pouco dinheiro e ainda não pagamos a hospedaria.

— Não é o turbante que me interessa — retorquiu Beremiz. — Repare que a tenda desse mercador é intitulada “Os quatro quatros”. Há nisso tudo espantosa coincidência digna de atenção.

— Coincidência? Por quê?

— Ora, bagdali — retornou Beremiz —, a legenda que figura nesse quadro recorda uma das maravilhas do Cálculo: podemos formar um número qualquer empregando quatro quatros!

E antes que eu o interrogasse sobre aquele enigma, Beremiz explicou, riscando na areia fina que cobria o chão:

— Quer formar o zero? Nada mais simples. Basta escrever:

$$44 - 44$$

Estão aí quatro quatros formando uma expressão que é igual a zero.

Passemos ao número 1. Eis a forma mais cômoda:

$$\frac{44}{44}$$

Representa, essa fração, o quociente da divisão de 44 por 44. E esse quociente é 1.

Quer ver, agora, o número 2? Podem-se aproveitar, facilmente, os quatro quatros e escrever:

$$\frac{4}{4} + \frac{4}{4}$$

A soma das duas frações é, exatamente, igual a 2. O três é mais fácil. Basta escrever a expressão:

$$\frac{4 + 4 + 4}{4}$$

Repare que a soma 12, dividida por quatro, dá um quociente 3. Eis, portanto, o 3 formado por quatro quatros.

— E como vai formar o próprio número 4? — perguntei.

— Nada mais simples — explicou Beremiz —, o 4 pode ser formado de várias maneiras diferentes. Eis uma expressão equivalente a 4:

$$4 + \frac{4 - 4}{4}$$

Observe que a segunda parcela $\frac{4-4}{4}$ é nula, e que a soma fica igual a quatro. A expressão escrita equivale a 4 + 0, ou 4.

Notei que o mercador sírio acompanhava atento, sem perder palavra, a explicação de Beremiz, como se muito lhe interessassem aquelas expressões aritméticas formadas por *quatro quatros*.[6]

Beremiz prosseguiu:

Quero formar, por exemplo, o número 5. Não há dificuldade. Escreveremos:

$$\frac{4 \times 4 + 4}{4}$$

Exprime esse arranjo numérico a divisão de 20 por 4. E o quociente é 5. Temos, desse modo, o 5 escrito com *quatro quatros*.

A seguir passemos ao 6, que apresenta uma forma muito elegante:

$$\frac{4 + 4}{4} + 4$$

Uma pequena alteração nesse interessante conjunto conduz ao resultado 7:

$$\frac{44}{4} - 4$$

É muito simples a forma que pode ser adotada para o número 8, escrito com quatro quatros:

$$4 + 4 + 4 - 4$$

O número 9 não deixa de ser também interessante:

$$4 + 4 + \frac{4}{4}$$

Eis agora uma expressão, muito elegante, igual a 10, formada com quatro quatros:[7]

$$\frac{44 - 4}{4}$$

Nesse momento o corcunda, dono da tenda, que estivera a acompanhar a explicação do calculista em atitude de respeitoso silêncio e interesse, observou:

— Pelo que acabo de ouvir, o senhor é exímio nas contas e nos cálculos. Dar-lhe-ei de presente o belo turbante azul se souber explicar certo mistério encontrado numa soma, que há dois anos me tortura o espírito.

E o mercador narrou o seguinte:

— Emprestei, certa vez, a quantia de 100 dinares, sendo 50 a um xeque de Medina e outros 50 a um judeu do Cairo.

O medinense pagou a dívida em quatro parcelas, do seguinte modo: 20, 15, 10 e 5. Assim:

Pagou 20	ficou devendo 30
Pagou 15	ficou devendo 15
Pagou 10	ficou devendo 5
Pagou 5	ficou devendo 0
—	—
Soma 50	Soma 50

Repare, meu amigo, que tanto a soma das quantias pagas como a dos saldos devedores são iguais a 50.

O judeu cairota pagou, igualmente, os 50 dinares em quatro prestações, do seguinte modo:

Pagou 20	ficou devendo 30
Pagou 18	ficou devendo 12
Pagou 3	ficou devendo 9
Pagou 9	ficou devendo 0
—	—
Soma 50	Soma 51

Convém observar, agora, que a primeira soma é 50 (como no caso anterior), ao passo que a outra dá um total de 51.

Não sei explicar essa diferença de 1 que se observa na segunda forma de pagamento. Bem sei que não fui prejudicado (pois recebi o total da dívida), mas como justificar o fato de ser a segunda soma igual a 51 e não a 50?

— Meu amigo — esclareceu Beremiz —, isto se explica com poucas palavras. Nas contas de pagamento, os saldos devedores não têm relação alguma com o total da dívida. Admitamos que uma dívida de 50 fosse paga em três prestações: a 1.ª de 10, a segunda de 5 e a terceira de 35. Eis a conta, com os saldos:

Pagou 10	ficou devendo 40
Pagou 5	ficou devendo 35
Pagou 35	ficou devendo 0
—	—
Soma 50	Soma 75

Neste exemplo, a primeira soma é ainda 50, ao passo que a soma dos saldos é, como se vê, 75; podia ser 80, 90, 100, 260, 800 ou um número qualquer. Só por acaso dará exatamente 50 (como no caso do xeque) ou 51 (como no caso do judeu).

O mercador alegrou-se por ter entendido a explicação dada por Beremiz e cumpriu a promessa feita, oferecendo ao calculista o turbante azul que valia quatro dinares.

NOTAS

[1] *Suque* ou *suk* — Rua ou praça em que se localizavam as tendas, os bazares e as lojas dos mercadores.

[2] *Quife* ou *kif* — Produto tirado do cânhamo, que os árabes usam como fumo.

[3] Trova de Anis Murad, poeta brasileiro (1904-1962).

[4] Túnica debruada. Entre os persas era o "roupão" ou a "camisola", que usavam habitualmente.

[5] Gênios sobrenaturais benfazejos, em cuja existência os árabes acreditavam. Atualmente essa crendice só existe nas classes incultas. Havia, também, os *efrites*, que eram gênios maléficos.

[6] Dada a natureza e a finalidade deste livro, admitimos o emprego de sinais matemáticos modernos. É evidente que na época em que viveu Beremiz a notação matemática era bem diferente (Malba Tahan).

[7] Com quatro quatros podemos escrever um número qualquer, desde 1 até 100. Ver, no *Apêndice*, a nota número 6, intitulada: *O problema dos quatro quatros*.

8. Ouvimos Beremiz discorrer sobre as formas geométricas. Encontramos o xeque Salém Nasair entre os criadores de ovelhas. Beremiz resolve o problema dos 21 vasos e mais outro que causa assombro aos mercadores. Como se explica o desaparecimento de um dinar numa conta de trinta dinares.

Mostrou-se Beremiz satisfeitíssimo ao receber o belo presente do mercador sírio.

— Está muito bem arranjado — disse, revirando o turbante e examinando-o de um lado e de outro, cuidadosamente. — Tem, entretanto, a meu ver, pequeno defeito que poderia ser evitado. A sua forma não é rigorosamente geométrica!

Fitei-o sem saber disfarçar a surpresa que suas palavras me levavam ao espírito.

Aquele homem, além de ser original calculista, tinha a mania de transformar as coisas mais vulgares de modo a dar forma geométrica até aos turbantes dos muçulmanos.

— Não se admire, meu amigo — prosseguiu o inteligente persa —, de que eu queira ver turbantes com formas geométricas. A Geometria existe por toda parte.[1] Procure observar as formas regulares e perfeitas que muitos corpos apresentam. As flores, as folhas e incontáveis animais revelam simetrias admiráveis que nos deslumbram o espírito.

A Geometria, repito, existe por toda parte. No disco do sol, na folha da tamareira, no arco-íris, na borboleta, no diamante, na estrela-do-mar e até num pequenino grão de areia. Há, enfim, infinita variedade de formas geométricas espalhadas pela Natureza. Um corvo a voar lentamente pelo céu descreve, com a mancha negra de seu corpo, figuras admiráveis; o sangue que circula nas veias do camelo não foge aos rigorosos princípios geométricos;[2] a pedra que se atira no chacal importuno desenha, no ar, uma curva perfeita![3] A abelha constrói seus alvéolos com a forma de prismas hexagonais e adota essa forma geométrica, segundo penso, para obter a sua casa com a maior economia possível de material.

A Geometria existe, como já disse o filósofo, por toda parte. É preciso, porém, olhos para vê-la, inteligência para compreendê-la e alma para admirá-la.

O beduíno rude vê as formas geométricas, mas não as entende; o sunita[4] entende-as, mas não as admira; o artista, enfim, enxerga a perfeição das figuras, compreende o Belo e admira a Ordem e a harmonia! Deus foi o grande geômetra. Geometrizou a Terra e o Céu.[5]

Existe, na Pérsia, uma planta muito apreciada como alimento, pelos camelos e ovelhas e cuja semente...

E sempre discorrendo, com entusiasmo, sobre as múltiplas belezas da Geometria, foi Beremiz caminhando pela extensa e poeirenta estrada que vai do suque dos mercadores até a Ponte da Vitória. Eu o acompanhava, em silêncio, ouvindo embevecido os seus curiosos ensinamentos.

Depois de cruzarmos a Praça Muazém, também chamada Refúgio dos Cameleiros, avistamos a velha Hospedaria das Sete Penas, muito procurada, nos dias quentes, pelos viajantes e beduínos vindos de Damasco e de Mossul.

A parte mais pitoresca dessa Hospedaria das Sete Penas era o seu pátio interno, com boa sombra para os dias de verão e cujas paredes se apresentavam totalmente cobertas de plantas coloridas, trazidas das montanhas do Líbano. Sentia-se, ali, um ar de tranquilidade e repouso.

Em velha tabuleta de madeira (junto à qual os caravaneiros amarravam seus camelos) podíamos ler, em letras bem talhadas, o título:

Sete penas

— Sete Penas! — murmurou Beremiz, observando a tabuleta. — É curioso! Conheces, por acaso, ó bagdali, o dono dessa hospedaria?

— Conheço-o muito bem — respondi. — É um velho cordoeiro de Trípoli, cujo pai serviu nas forças do sultão Queruã. É apelidado o Tripolitano. É bastante estimado por ser de natureza simples e comunicativa. É homem honrado e prestativo. Dizem que foi ao Sudão, numa caravana de aventureiros sírios, e trouxe, das terras africanas, cinco escravos negros que lhe servem com incrível fanatismo. Ao regressar do Sudão, deixou o seu ofício de cordoeiro e montou esta hospedaria, sempre auxiliado pelos cinco escravos.

— Com escravos, ou sem escravos — retorquiu Beremiz — esse homem, o Tripolitano, deve ser bastante original. Ligou o nome de sua hospedaria ao número *sete* e o *sete* foi sempre, para todos os povos, muçulmanos, cristãos, judeus, idólatras ou pagãos, um número sagrado, por ser a soma do número *três* (que é divino) com o número *quatro* (que simboliza o mundo material). E dessa relação resultam muitas coleções notáveis que totalizam *sete*:

> Sete as portas do Inferno;
> Sete os dias da semana;
> Sete os sábios da Grécia;
> Sete os céus que cobrem o mundo;
> Sete os planetas;
> Sete as maravilhas do mundo.[6]

Ia o eloquente calculista prosseguir em suas estranhas observações sobre o Número Sagrado, quando avistamos, à porta da hospedaria, nosso dedicado amigo o xeque Salém Nasair, que acenava, repetidas vezes, chamando por nós.

— Sinto-me feliz por tê-lo encontrado agora, ó Calculista! — disse risonho o xeque quando dele nos aproximamos. — Sua chegada, não só para mim, como para três amigos que se acham nesta hospedaria, foi altamente providencial.

E acrescentou, com simpatia e visível interesse:

— Venham! Venham comigo, que o caso é muito sério.

Levou-nos, a seguir, para o interior da hospedaria. Conduziu-nos por um corredor meio escuro, úmido, até o pátio interno, acolhedor e claro. Havia ali cinco ou seis mesas redondas. Junto a uma dessas mesas achavam-se três viajantes que me pareceram estranhos.

Os homens, quando o xeque e o calculista deles se aproximaram, levantaram-se e fizeram o salã. Um deles parecia muito moço; era alto, magro, tinha os olhos claros e ostentava belíssimo turbante amarelo cor de ovo, com uma barra branca, onde cintilava uma esmeralda de rara beleza; os dois outros eram baixos, ombros largos e tinham a pele escura como beduínos da África.

Disse o xeque, apontando para os três muçulmanos:

— Aqui estão, ó Calculista, os três amigos. São criadores de carneiros em Damasco. Enfrentam agora um dos problemas mais curiosos que tenho visto. E esse problema é o seguinte:

— Como pagamento de pequeno lote de carneiros, receberam aqui, em Bagdá, uma partida de vinho, muito fino, composta de 21 vasos iguais, sendo:

> 7 cheios
> 7 meio cheios e
> 7 vazios.

Querem, agora, dividir os 21 vasos de modo que cada um deles receba o mesmo número de vasos e a mesma porção de vinho.

Repartir os vasos é fácil. Cada um dos sócios deve ficar com sete vasos. A dificuldade, a meu ver, está em repartir o vinho sem abrir os vasos, isto é, conservando-os exatamente como estão. Será possível, ó Calculista, obter uma solução para este problema?

Beremiz, depois de meditar, em silêncio, durante dois ou três minutos, respondeu:

— A divisão dos 21 vasos, que acabais de apresentar, ó Xeque, poderá ser feita sem grandes cálculos. Vou indicar a solução que me parece mais simples.

Ao primeiro sócio caberão:

3 vasos cheios;
1 meio cheio;
3 vazios.

Receberá, desse modo, um total de 7 vasos.

Ao segundo sócio caberão:

2 vasos cheios;
3 meio cheios;
2 vazios.

Esse receberá, também, 7 vasos.

A cota que tocará ao terceiro sócio será igual à do segundo, isto é:

2 vasos cheios;
3 meio cheios;
2 vazios.

Segundo a partilha que acabo de indicar, cada sócio receberá 7 vasos e a mesma porção de vinho.

Com efeito. Chamemos 2 (dois) a porção de vinho de um vaso cheio, e 1 a porção de vinho do vaso meio vazio.

O primeiro sócio, de acordo com a partilha, receberá:

$$2+2+2+1$$

e essa soma é igual a 7 unidades de vinho. E cada um dos outros dois sócios receberá:

$$2+2+1+1+1$$

e essa soma é, também, igual a 7 unidades de vinho. E isso vem provar que a divisão, por mim sugerida, é certa e justa. O problema que, na aparência, é complicado, não oferece a menor dificuldade quando resolvido numericamente.[7]

A solução apresentada por Beremiz foi recebida com muito agrado, não só pelo xeque, como também pelos seus amigos damascenos.

— Por Alá! — exclamou o jovem da esmeralda. — Esse calculista é prodigioso! Resolveu de improviso um problema que nos parecia dificílimo.

E, voltando-se para o dono da hospedaria, perguntou em tom de muita camaradagem:

— Quanto gastamos aqui nesta mesa, ó Tripolitano?

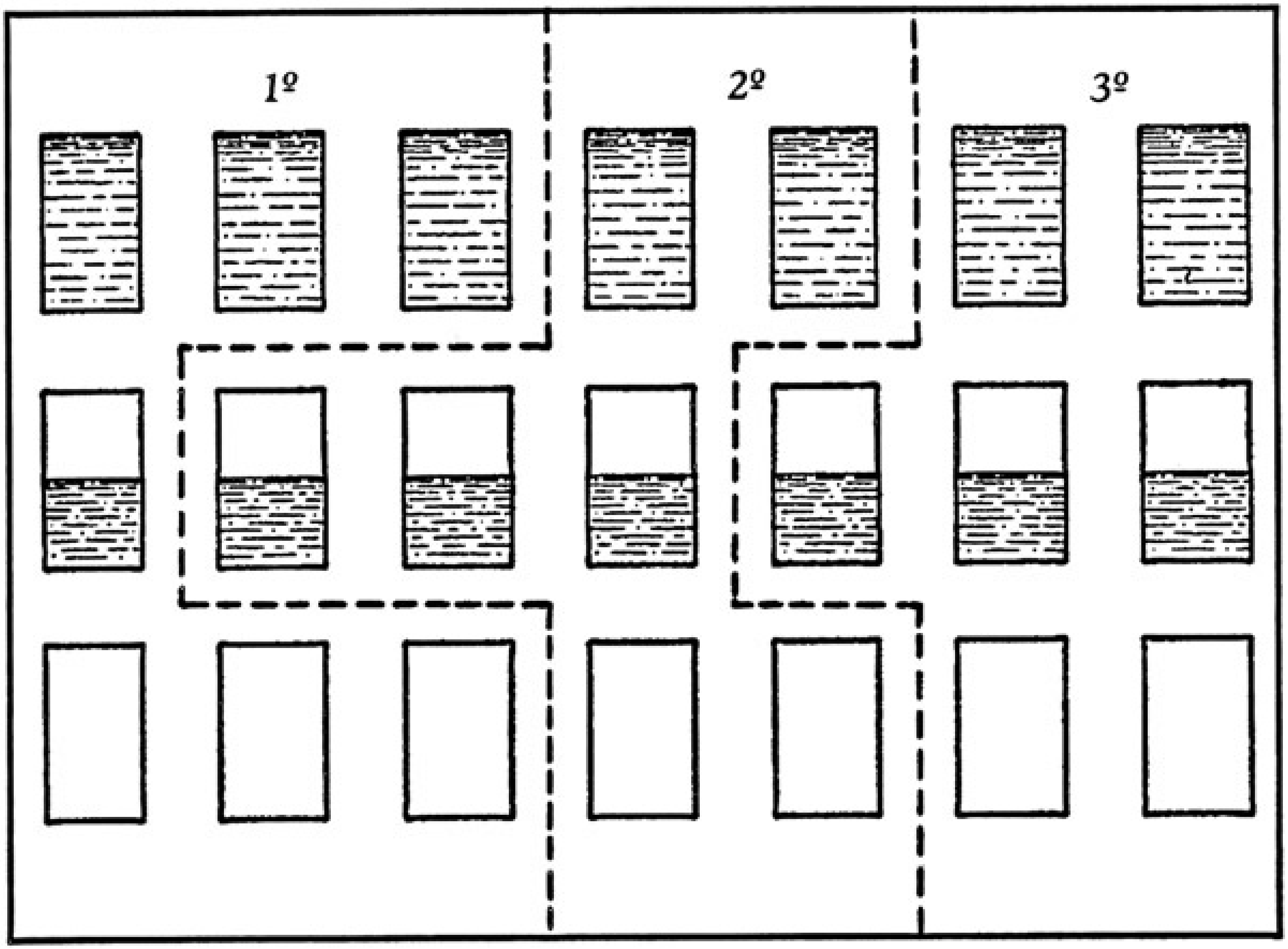
Respondeu o interpelado:

— A despesa total, com a refeição, foi de trinta dinares!

O xeque Nasair declarou que queria pagar sozinho. Os damascenos não concordaram. Estabeleceu-se pequena discussão, troca de gentilezas, durante a qual todos falavam e protestavam ao mesmo tempo. Afinal ficou resolvido que o xeque Nasair, tendo sido convidado para a reunião, não deveria contribuir para a despesa. E cada um dos damascenos pagou dez dinares. A quantia total de 30 dinares foi entregue a um escravo sudanês e levada ao Tripolitano.

Momentos depois o escravo voltou para a mesa com um recado do Tripolitano.

— O patrão enganou-se. A despesa foi, apenas, de 25 dinares. Ele mandou, pois, devolver estes cinco dinares!



Esta figura indica, de modo muito simples, a solução do problema dos 21 vasos. Os sete retângulos da 1.ª linha representam os vasos cheios. Os sete primeiros retângulos, a seguir, representam os vasos meio cheios, e os sete outros, os vasos vazios. Para que os três mercadores recebam o mesmo número de vasos e quantidade igual de vinho, a divisão deverá ser feita conforme indicam as linhas pontilhadas do desenho.

— Esse Tripolitano — observou o xeque Nasair — tem a preocupação de ser honesto. E muito honesto.

E tomando as cinco moedas que haviam sido devolvidas, deu uma a cada dos damascenos e, assim, das cinco moedas, sobravam duas. Depois de consultar, com um olhar, os damascenos, o xeque deu, de presente, as duas moedas restantes ao escravo sudanês que os havia servido.

Nesse momento, o jovem da esmeralda levantou-se e, dirigindo-se muito sério aos amigos, assim falou:

— Com esse caso do pagamento dos trinta dinares de despesa, ao Tripolitano, surgiu uma trapalhada muito grande.

— Trapalhada? — estranhou o xeque. — Não percebo complicação alguma!...

— Sim — confirmou o damasceno. — Uma trapalhada muito séria, ou um problema que parece absurdo. Desapareceu um dinar! Vejam bem. Cada um de nós pagou 10 dinares e recebeu um dinar de volta. Logo, cada um de nós pagou, na verdade, 9 dinares. Somos três. É claro que o total pago foi de 27 dinares; somando-se esses 27 dinares com os dois dinares dados, pelo xeque, ao escravo sudanês, obtemos 29 dinares. Dos 30 que foram entregues ao Tripolitano, só 29 aparecem. Onde se encontra o outro dinar? Como desapareceu? Que mistério é esse?

O xeque Nasair, ao ouvir aquela observação, refletiu:

— É verdade, damasceno. A meu ver o teu raciocínio está certo. Estás com a razão. Se cada um dos amigos pagou 9 dinares, houve, é claro, um total de 27 dinares; com os 2 dinares dados ao escravo, resulta um total de 29 dinares. Para 30 (total do pagamento inicial), falta 1. Como explicar esse mistério?

Nesse momento Beremiz, que se mantinha calado, procurou intervir nos debates; e disse, dirigindo-se ao xeque:

— Há um engano no vosso cálculo, ó Xeque! A conta não deve ser feita desse modo. Dos trinta dinares pagos ao Tripolitano, pela refeição, temos:

25 ficaram com o Tripolitano;
3 foram devolvidos;
2 dados ao escravo sudanês.

Não desapareceu coisa alguma e não pode existir em conta tão simples a menor atrapalhação. Em outras palavras: dos 27 dinares pagos (9 vezes 3), 25 ficaram com o Tripolitano e 2 foram dados, de gratificação, ao sudanês!

Os damascenos, ao ouvirem a explicação de Beremiz, expandiram-se em estrepitosas gargalhadas.

— Pelos méritos do profeta![8] — exclamou o que parecia mais velho. — Esse calculista acabou com o mistério do dinar desaparecido e salvou o prestígio desta velha hospedaria! Iallah![9]

NOTAS

[1] O asserto é atribuído a Platão, filósofo grego do século IV a.C. Platão foi discípulo de Sócrates e mestre de Aristóteles.

[2] O camelo apresenta uma singularidade: é o único mamífero que tem os glóbulos do sangue com a forma elíptica. Os naturalistas assinalam essa forma dos glóbulos como característica das aves e dos répteis.

[3] Essa curva é a parábola. É a curva descrita pelo jato d'água de um repuxo.

[4] Indivíduo de uma das seitas muçulmanas. Adepto da ortodoxia da "Sunnat", era, em geral, contrário a qualquer manifestação de arte. (Nota de Malba Tahan.)

[5] A frase é de Platão. Foi parodiada pelo notável analista alemão Karl Gustav Jacobi (1832-1891): "Deus aritmetizou o Céu e a Terra."

[6] O número sete é largamente citado na Bíblia e no Alcorão.

[7] Ver *Apêndice*.

[8] Refere-se a Maomé, fundador do Islamismo.

[9] Deus seja louvado. Exaltado seja Deus.

9 . No qual recebemos a visita de xeque Iezid, o Poeta. Estranha consequência das previsões de um astrólogo. A Mulher e a Matemática. Beremiz é convidado a ensinar Matemática a uma jovem. Situação singular da misteriosa aluna. Beremiz fala de seu amigo e mestre, o sábio Nô-Elin.

No último dia do Moharrã,[1] ao cair da noite, fomos procurados na hospedaria pelo prestigioso Iezid-Abul-Hamid, amigo e confidente do califa.

— Algum novo problema a resolver, ó Xeque? — perguntou sorridente Beremiz.

— Adivinhou! — respondeu o nosso visitante. — Vejo-me forçado a resolver sério problema. Tenho uma filha chamada Telassim,[2] dotada de viva inteligência e com acentuada inclinação para os estudos. Quando Telassim nasceu, consultei um astrológo famoso que sabia desvendar o futuro pela observação das nuvens e das estrelas. Esse mago afirmou que minha filha viveria perfeitamente feliz até aos 18 anos; a partir dessa idade seria ameaçada por um cortejo de lamentáveis desgraças. Havia, entretanto, meio de evitar que a infelicidade viesse esmagar-lhe tão profundamente o destino. Telassim — acrescentou o mago — deveria aprender as propriedades dos números e as múltiplas operações que com eles se efetuam. Ora, para dominar os números e fazer cálculos é preciso conhecer a ciência de Al-Kharismi, isto é, a Matemática. Resolvi, pois, assegurar para Telassim um futuro feliz, fazendo com que ela estudasse os mistérios do Cálculo e da Geometria.

Fez o generoso xeque ligeira pausa e logo prosseguiu:

— Procurei vários ulemás[3] da corte, mas não logrei encontrar um só que se sentisse capaz de ensinar Geometria a uma jovem de 17 anos. Um deles, dotado, aliás, de grande talento, tentou mesmo dissuadir-me de tal propósito. Quem quisesse ensinar canto a uma girafa, cujas cordas vocais não podem produzir o menor ruído, perderia o tempo e teria trabalho inútil. A girafa, por sua própria natureza, não poderá cantar. Assim, o cérebro feminino, explicou esse daroês,[4] é incompatível com as noções mais simples do Cálculo e da

Geometria. Baseia-se essa incomparável ciência no raciocínio, no emprego de fórmulas e na aplicação de princípios demonstráveis com os poderosos recursos da Lógica e das Proporções. Como poderá uma menina, fechada no harém de seu pai, aprender fórmulas de Álgebra e teoremas da Geometria? Nunca! É mais fácil uma baleia ir a Meca, em peregrinação, do que uma mulher aprender Matemática. Para que lutar contra o impossível? Maktub![5] Se a desgraça deve cair sobre nós, faça-se a vontade de Alá!

O xeque, muito sério, levantou-se da poltrona em que se achava sentado, caminhou cinco ou seis passos para um lado e para o outro, e prosseguiu, com acentuada melancolia:

— O desânimo, o grande corruptor, apoderou-se de meu espírito ao ouvir essas palavras. Indo, porém, certa vez visitar o meu bom amigo Salém Nasair, o mercador, ouvi elogiosas referências ao novo calculista persa que aparecera em Bagdá. Falou-me do episódio dos oito pães. O caso, narrado com todas as minúcias, impressionou-me. Procurei conhecer o calculista dos oito pães e fui, especialmente para esse fim, à casa do vizir Maluf. Fiquei pasmado com a original solução dada ao problema dos 257 camelos, reduzidos, afinal, a 256. Lembras-te?

E o xeque Iezid, erguendo o rosto e fitando, solene, o calculista, acrescentou:

— Serás capaz, ó Irmão dos Árabes,[6] de ensinar os artifícios do Cálculo à minha filha Telassim? Pagarei, pelas lições, o preço que exigires! Poderás, como tens feito até agora, continuar a exercer o cargo de secretário do vizir Maluf.

— Xeque generoso! — retorquiu prontamente Beremiz. — Não vejo motivo para deixar de atender ao vosso honroso convite. Em poucos meses poderei ensinar à vossa filha todas as operações algébricas e os segredos da Geometria. Erram duplamente os filósofos quando julgam medir com unidades negativas a capacidade intelectual da mulher. A inteligência feminina, quando bem orientada, pode acolher, com incomparável perfeição, as belezas e os segredos da ciência! Fácil tarefa seria desmentir os conceitos injustos formulados pelo daroês. Citam os historiadores vários exemplos de mulheres que se notabilizaram por sua cultura matemática. Em Alexandria, por exemplo, viveu Hipátia,[7] que lecionou a ciência do Cálculo a centenas de pessoas, comentou as obras de Diofante, analisou os dificílimos trabalhos de Apolônio e retificou todas as tabelas astronômicas então usadas. Não há motivo para temores e incertezas, ó Xeque! A vossa filha facilmente aprenderá a ciência de Pitágoras. *Inch'Allah*![8] Desejo apenas que determineis o dia e a hora em que deverei iniciar as lições.

Respondeu-lhe o nobre Iezid:

— O mais depressa possível! Telassim já completou 17 anos, e estou ansioso por livrá-la das tristes previsões do astrólogo.

E ajuntou:

— Devo, desde já, advertir-te de uma particularidade que não deixa de ter importância no caso. Minha filha vive encerrada no harém e jamais foi vista por homem algum estranho à nossa família. Só poderá, portanto, ouvir as tuas aulas de Matemática oculta por um espesso reposteiro com o rosto coberto por um haic e vigiada por duas escravas de confiança. Aceitas, ainda assim, minha proposta?

— Aceito-a com viva satisfação — respondeu Beremiz. — É evidente que o recato e o pudor de uma jovem valem mais que os cálculos e as fórmulas algébricas. Platão, filósofo, mandou colocar à porta de sua escola a seguinte legenda: "Não entre, se não é geômetra." Apresentou-se um dia um jovem de costumes libertinos e mostrou desejo de frequentar a Academia. O Mestre, porém, não o admitiu, dizendo: "A Geometria é toda pureza e simplicidade. O teu despudor ofende tão pura ciência." O célebre discípulo de Sócrates procurava, desse modo, demonstrar que a Matemática não se harmonizava com a depravação e com as torpes indignidades dos espíritos imorais. Serão, pois, encantadoras as lições dadas a essa jovem que não conheço e cujo rosto mimoso jamais terei a ventura de admirar. Se Alá quiser, poderei iniciar amanhã as aulas.

— Perfeitamente — concordou o xeque. — Um dos meus servos virá buscar-te amanhã (querendo Alá!) pouco depois da segunda prece. Uassalã!

Logo que o xeque Iezid deixou a hospedaria interpelei o calculista:

— Escuta, Beremiz. Há nisso tudo um ponto obscuro para mim. Como poderás, afinal, ensinar Matemática a uma jovem quando, na verdade, nunca estudaste essa ciência nos livros, nem frequentaste as lições dos ulemás? O cálculo que aplicas, com tanto brilho e oportunidade, como foi aprendido? Bem sei, ó Calculista, entre pastores persas, contando ovelhas, tâmaras e bandos de aves em voo pelo céu...

— Estás enganado, bagdali — reconsiderou, com serenidade, o calculista. — Ao tempo em que eu vigiava os rebanhos do meu amo, na Pérsia, conheci um velho dervixe chamado Nô-Elin. Certa vez, durante violenta tempestade de areia, salvei-o da morte. Desse dia em diante o bondoso ancião tornou-se meu amigo. Era um grande sábio e ensinou-me coisas úteis e maravilhosas.

Depois das lições que recebi desse mestre, sinto-me capaz de ensinar Geometria até o último livro do inesquecível Euclides, o alexandrino.[9]

NOTAS

[1] Mês do calendário árabe.

[2] Significa talismã.

[3] Homem dotado de grande cultura. Sábio.

[4] Ver *Glossário*.

[5] *Maktub!* (Estava escrito!) Particípio passado do verbo *Katab* (escrever). Expressão que exprime bem o fatalismo muçulmano.

[6] Amigo. Bom companheiro.

[7] Matemática que viveu no século V. Por ser pagã foi cruelmente assassinada por cristãos fanáticos. Sua morte ocorreu no ano 415.

[8] Queira Deus. O mesmo que *oxalá*!

[9] A obra de Euclides — *Os elementos* —, bastante conhecida dos árabes, é dividida em várias partes chamadas *livros*.

10. No qual vamos ao palácio de Iezid. O rancoroso Tara-Tir não confia no calculista. Os pássaros cativos e os números perfeitos. O Homem que Calculava exalta a caridade do xeque. Ouvimos uma terna e arrebatadora canção.

Pouco passava da quarta hora quando deixamos a hospedaria e seguimos para a casa do poeta Iezid-Abul-Hamid.

Guiados por um servo amável e diligente, depressa atravessamos as ruas tortuosas do bairro de Muassã e fomos ter a um luxuoso palácio construído em meio de atraente parque.

Beremiz ficou encantado com a feição distinta que o rico Iezid procurava dar à sua residência. Erguia-se, ao centro, uma grande cúpula prateada onde os raios solares se desfaziam em belíssimos efeitos coloridos. Um grande pátio, fechado por forte portão de ferro ornado com todos os requintes da arte, dava entrada para o interior.

Um segundo pátio interno, tendo no centro bem ordenado jardim, dividia o edifício em dois pavilhões. Um deles era ocupado pelos aposentos particulares; o outro destinava-se aos salões de reunião, e à sala onde o xeque vinha muitas vezes cear em companhia de poetas, vizires e ulemás.

O palácio do xeque, apesar da ornamentação artística das colunas, era triste, sombrio. Quem reparasse apenas nas janelas gradeadas não poderia avaliar as pompas de arte de que todos os aposentos eram interiormente revestidos.

Larga varanda corrida com arcarias sustentadas por nove ou dez colunas esbeltas e delgadas de mármore branco, com arcos recortados em ferradura, com as paredes forradas de azulejos em relevo e pisos de mosaicos, comunicava os corpos dos dois pavilhões; e duas soberbas escadarias, também do mesmo mármore, conduziam ao jardim, onde flores de formas e perfumes diversos cingiam manso lago.

Um viveiro, cheio de pássaros, ornado também de rosáceas e arabescos de mosaico, parecia ser a peça mais importante do jardim. Havia ali aves de cantos exóticos de formas singulares, de plumagem rutilante; algumas, de peregrina beleza, pertenciam a espécies para mim desconhecidas.

Recebeu-nos o dono da casa com muita simpatia, vindo ao nosso encontro no jardim. Em sua companhia achava-se um jovem moreno, magro, de ombros largos, que não nos pareceu muito amável. Ostentava na cintura riquíssimo punhal, com cabo de marfim. Tinha o olhar penetrante, agressivo e o modo agitado como falava era assaz desagradável.

— É esse, então, o tal calculista? — observou, sublinhando as palavras com tom de menoscabo. — Admira-me a tua boa-fé, meu caro Iezid! Vais permitir que um mísero garopeiro[1] se aproxime e dirija a palavra à nobre e encantadora Telassim? Não faltava mais nada! Por Alá! És muito ingênuo, meu caro!

E rompeu numa gargalhada de riso injurioso.

Aquela grosseria revoltou-me. Tive ímpetos de repelir a descortesia daquele atrevido. Beremiz, porém, não se perturbou. Era bem possível até que o algebrista, naquele mesmo momento, descobrisse, nas palavras insultuosas que ouvira, novos elementos para fazer cálculos ou para resolver problemas.

O poeta, mostrando-se constrangido com a atitude indelicada de seu amigo, observou:

— Queira desculpar, senhor Calculista, o juízo precipitado que acaba de ser feito pelo meu primo el-hadj Tara-Tir.[2] Ele não o conhece, não avalia a sua capacidade matemática, e está, mais do que ninguém, preocupado com o futuro de Telassim.

— Não o conheço, é claro! Não me empenho grande coisa em conhecer os camelos que passam por Bagdá em busca de sombra e alfafa — replicou o iracundo Tara-Tir, com insultuoso desabrimento, sorrindo torvamente.

E falando depressa, nervoso, atropelando as palavras:

— Posso provar, em poucos minutos, meu primo, que estás completamente iludido com relação à capacidade desse aventureiro. Se mo permitisses, eu o esborracharia com duas ou três banalidades que ouvi a um mestre-escola de Mossul.

— Decerto que sim — concordou Iezid. — Poderás interrogar o nosso Calculista e propor-lhe, agora mesmo, o problema que quiseres.

— Problema? Para quê? Queres meter em confronto o chacal que uiva e o ulemá que estuda? — atalhou o grosseirão. — Asseguro-te que não será necessário inventar problema para fazer voar a máscara ao sufita[3] ignorante. Chegarei ao resultado que pretendo sem fatigar a memória, mais rápido do que pensas.

E apontando para o grande viveiro, interpelou Beremiz, fixando em nós os olhos miúdos que dardejavam um brilho inexorável e frio:

— Responde-me, ó Calculista do Marreco,[4] quantos pássaros estão naquele viveiro?

Beremiz Samir cruzou os braços e pôs-se a observar com viva atenção o viveiro indicado. Seria prova de insânia, pensei, tentar contar tantos pássaros, que volitavam irrequietos por todos os lados, já substituindo-se nos poleiros com incrível ligeireza.

Ao cabo de alguns minutos o calculista voltou-se para o generoso Iezid e disse-lhe:

— Peço-vos, ó Xeque, mandeis imediatamente soltar três daqueles pássaros cativos. Será, desse modo, mais simples e mais agradável para mim anunciar o número total!

Aquele pedido tinha todos os visos de um disparate. É claro que quem conta certo número contará, facilmente, esse número mais 3.

Iezid, intrigadíssimo, embora, com o inesperado pedido do calculista, fez vir o encarregado do viveiro e deu prontas ordens para que a solicitação do calculista fosse atendida: libertos da prisão, três lindos colibris voaram rápidos, pelo céu afora.

— Acham-se agora, neste viveiro — declarou Beremiz em tom pausado —, quatrocentos e noventa e seis pássaros!

— Admirável! — exclamou Iezid com entusiasmo. — É isso mesmo! Tara-Tir sabia disso! Eu mesmo já o havia informado! A minha coleção era meio milheiro; feito o desconto dos três que agora soltei e de um rouxinol, mandado para Mossul, ficam precisamente 496!

— Acertou por acaso — regougou, estuante de rancor, o terrível Tara-Tir.

O poeta Iezid, instigado pela curiosidade, perguntou a Beremiz:

— Pode dizer-me, amigo, por que preferiu contar 496, quando era tão simples contar 496 + 3, ou melhor, 499?

— Posso explicar-vos, ó Xeque, a razão de meu pedido — respondeu Beremiz com altivez. — Os matemáticos procuram sempre dar preferência aos números notáveis e evitar os resultados inexpressivos e vulgares. Ora, entre 499 e 496 não há que hesitar. O número 496 é um número perfeito e deve merecer nossa preferência.

— E que vem a ser um número perfeito? — perguntou o poeta. — Em que consiste a perfeição de um número?

— Número perfeito — elucidou Beremiz — é o que apresenta a propriedade de ser igual à soma de seus divisores — excluindo-se, é claro, dentre esses, o próprio número. Assim por exemplo, o número 28 apresenta 5 divisores, menores que 28:

$$1, 2, 4, 7, 14.$$

A soma desses divisores

$$1 + 2 + 4 + 7 + 14$$

é precisamente igual a 28. Logo, 28 pertence à categoria dos números perfeitos.

Divisores de 496
(menores que 496)

$$\begin{array}{r} 1 \\ 2 \\ 4 \\ 8 \\ 16 \\ 31 \\ 62 \\ 124 \\ 248 \\ \hline \text{Soma } 496 \end{array}$$

Divisores de 28

(menores que 28)

1
2
4
7
14
—
Soma 28

O número 6 também é perfeito. Os divisores de 6 (menores que 6) são:

1, 2 e 3

cuja soma é 6. Ao lado do 6 e do 28, pode figurar o 496 que é também, como já disse, número perfeito.

O rancoroso Tara-Tir, sem querer ouvir novas explicações, despediu-se do xeque Iezid e retirou-se porejando raiva, pois não fora pequena a derrota sofrida ao investir contra a perícia do calculista. Ao passar por mim fitou-me acintoso, com ar de soberano desprezo.

— Peço-lhe, senhor Calculista — desculpou-se ainda o nobre Iezid —, que não se sinta ofendido com as palavras de meu primo Tara-Tir. Ele é de temperamento exaltado e depois que assumiu a direção das minas de sal, em Al-Derid, tornou-se irascível e violento. Já sofreu cinco atentados e várias agressões de escravos!

Era evidente que o inteligente Beremiz não queria causar constrangimento ao xeque. E respondeu, cheio de brandura e bondade:

— Dada a grande diversidade de temperamentos e caracteres, não nós é possível viver em paz com o próximo sem refrearmos a ira e cultivarmos a mansidão. Quando me sinto ferido pela injúria, procuro seguir o sábio preceito de Salomão:

Quem de repente se enfurece é estulto:
Quem é prudente dissimula o insulto.[5]

Jamais poderei esquecer os ensinamentos de meu bondoso pai. Sempre que me via exaltado, e desejoso de tomar desforço, dizia-me:

— Aquele que se humilha diante dos homens torna-se glorioso diante de Deus!

E, depois de pequena pausa, acrescentou:

— Sou, não obstante, muito grato ao rico Tara-Tir, e dele não posso guardar o menor ressentimento. Basta dizer que o seu turbulento primo me ofereceu o ensejo de praticar nove atos de caridade.

— Nove atos de caridade? — estranhou o xeque. — Como foi isso?

— Cada vez que pomos em liberdade um pássaro cativo — explicou o calculista — praticamos três atos de caridade. O primeiro para com a avezinha, restituindo-lhe a vida ampla, livre, que lhe havia sido roubada; o segundo para com a nossa consciência; o terceiro para com Deus!

— Quer dizer, então, que se eu der liberdade a todos os pássaros do viveiro...

— Asseguro-vos que praticareis, ó Xeque, mil quatrocentos e oitenta e oito atos de elevada caridade! — atalhou prontamente Beremiz, como se já soubesse, de cor, o número que exprimia o produto de 496 por 3.

Impressionado com essas palavras, o generoso Iezid determinou fossem postas em liberdade todas as aves que se achavam no viveiro.

Os servos e escravos quedaram estarrecidos ao ouvir aquela ordem. A coleção, organizada com paciência e trabalho, valia uma fortuna. Nela figuravam perdizes, colibris, faisões multicores, gaivotas negras, patos de Madagáscar, corujas do Cáucaso e várias andorinhas raríssimas da China e da Índia.

— Soltem os pássaros![6] — ordenou, novamente, o xeque, agitando a mão resplandecente de anéis.

As largas portas da tela metálica se abriram. Aos grupos, aos pares, os cativos deixavam a prisão e espalhavam-se pelos arvoredos do jardim.

— Cada ave com as asas estendidas é um livro de duas folhas aberto no céu. Feio crime é roubar ou destruir essa miúda biblioteca de Deus.[7]

Começamos, nesse momento, a ouvir o fraseio de uma canção; a voz era tão terna e suave que se confundia com o trinado das leves andorinhas e com o arrulhar dos mansos pombos.

A princípio era uma melodia meiga e triste, repassada de melancolia e saudade como as endechas de um rouxinol solitário; animava-se, depois, num crescendo vivo, em gorjeios complicados, em trilos argentinos, entrecortados por gritos de amor que contrastavam com a serenidade da tarde, e ressoavam pelo espaço como folhas que o vento leva. Depois retornou ao primeiro tom triste e dolente, e parecia ecoar pelo jardim como um leve suspiro de viração:

Falasse eu as línguas dos homens e dos anjos
E não tivesse caridade,
Seria como o metal que soa,
Ou como o sino que tine,
Nada seria!...
Nada seria!...
Tivesse eu o dom da profecia,

E toda a ciência;
De maneira tal que transportasse os montes
E não tivesse caridade,
Nada seria!...
Nada seria!...

Distribuísse todos os meus bens para o sustento dos pobres,
E entregasse o meu corpo para ser queimado,
E não tivesse caridade,
Nada seria!...
Nada seria!...

O encanto daquela voz parecia envolver a Terra numa onda de indefinível alegria. O dia tornara-se até mais claro.

— É Telassim quem canta — explicou o xeque ao reparar na atenção com que ouvíamos embevecidos a estranha canção.

O passaredo em revoada enchia os ares com o chilrear alegre da liberdade. Não passavam de 496, mas davam a impressão de que eram dez mil!

— E de quem são esses belíssimos versos?[8] — indaguei.

O xeque respondeu:

— Não sei. Uma escrava cristã ensinou-os a Telassim e ela jamais os esqueceu. Devem ser de algum poeta nazareno.[9] Essa informação eu a ouvi, há dias, da filha de meu tio,[10] mãe de Telassim.

NOTAS

1 *Pessoa* (em geral cigano) que ganhava a vida exibindo serpentes encantadas nas feiras e nos bazares.

2 A expressão *el-hadj*, quando precede um nome, indica que a pessoa já fez peregrinação a Meca. Note-se, na dedicatória deste livro (pág. 5), que o nome de M. T. é precedido do qualificativo *el-hadj*.

3 Pessoa que pertence a uma seita muçulmana na Pérsia.

4 Referia-se, por escárnio, à hospedaria onde se achava Beremiz.

5 *Provérbios*, 12-16.

6 A palavra "pássaro" é empregada para significar "ave cativa".

7 Este pensamento notável é de Humberto de Campos.

8 As palavras citadas, sob forma de versos, são da primeira epístola de São Paulo aos Coríntios. (Nota de Malba Tahan.)

9 Denominação que os árabes dão aos cristãos.

10 Filha de meu tio — Esposa.

11. Vamos aqui narrar como iniciou Beremiz o seu curso de Matemática. Uma frase de Platão. A unidade e Deus. Que é medir. As partes que formam a Matemática. A Aritmética e os Números. A Álgebra e as relações. A Geometria e as formas. A Mecânica e a Astronomia. Um sonho do rei Asad-Abu-Carib. A "aluna invisível" ergue a Alá uma prece.

O aposento em que devia Beremiz realizar o seu curso de Matemática era espaçoso. Dividia-o ao centro pesado e farto reposteiro de veludo vermelho que descia do teto até o chão. O teto era colorido e as colunas douradas. Achavam-se espalhadas sobre os tapetes grandes almofadas de seda com legendas do Alcorão.

Adornavam as paredes caprichosos arabescos azuis entrelaçados com lindos versos de Antar,[1] o poeta do deserto. Lia-se ao centro, entre duas colunas, em letras de ouro, em fundo azul, este dístico notável, colhido, certamente, na *moalakat*[2] de Antar:

"Quando Alá quer bem a um de seus servidores, abre para ele as portas da Inspiração."

Sentia-se um perfume suave de incenso e rosa. A tarde declinava.

As janelas de mármore polido estavam abertas e deixavam ver o jardim e os frondosos pomares que se estendiam até o rio pardacento e triste.

Uma escrava morena, tipo de formosura circassiana, mantinha-se de pé, imóvel, o rosto descoberto, junto à porta. As suas unhas eram pintadas de hena.

— A vossa filha já se acha presente? — perguntou Beremiz ao xeque.

— Decerto que sim — respondeu Iezid. — Mandei-a estar na outra parte deste aposento atrás do reposteiro, de onde poderá ver e ouvir; estará, porém, invisível para os que aqui se acham.

Realmente. As coisas eram dispostas de tal forma que nem mesmo se distinguia o vulto da jovem que ia ser discípula de Beremiz. Era bem possível que ela estivesse a observar-nos por algum pequenino orifício feito na peça de veludo, e para nós imperceptível.

— Penso que já é oportuno dar início à primeira lição — advertiu o xeque.

E indagou com meiguice:

— Estás atenta, Telassim, minha filha?

— Sim, meu pai — respondeu bem timbrada voz feminina do outro lado do aposento.

Diante disso preparou-se Beremiz para a aula: cruzou as pernas e sentou-se sobre uma almofada, no centro da sala; coloquei-me discretamente a um canto e acomodei-me como pude. A meu lado veio sentar-se o xeque Iezid.

Toda pesquisa de ciência é precedida pela prece. Foi, pois, com a prece que Beremiz iniciou:

— Em nome de Alá, Clemente e Misericordioso! Louvado seja o Onipotente criador de todos os mundos! A misericórdia é em Deus o atributo supremo! Nós Te adoramos, Senhor, e imploramos a Tua assistência! Conduze-nos pelo caminho certo! Pelo caminho dos esclarecidos e abençoados por Ti.[3]

Finda a prece, o calculista assim falou:

— Quando olhamos, senhora, para o céu em noite calma e límpida, sentimos que a nossa inteligência é franzina para conceber a obra maravilhosa do Criador. Diante dos nossos olhos pasmados, as estrelas são uma caravana luminosa a desfilar pelo deserto insondável do infinito, as nebulosas imensas e os planetas rolam, segundo leis eternas, pelos abismos do espaço! Uma noção, entretanto, surge logo, bem nítida, em nosso espírito: a noção de *número*.

Viveu outrora, na Grécia, quando esse país era dominado pelo paganismo, um filósofo notável chamado Pitágoras[4] (Alá, porém, é mais sábio!). Consultado por um discípulo sobre as forças dominantes dos destinos dos homens, o grande sábio respondeu: “Os números governam o mundo!”

Realmente. O pensamento mais simples não pode ser formulado sem nele se envolver, sob múltiplos aspectos, o conceito fundamental do número. O beduíno que no meio do deserto, no momento da prece, murmura o nome de Deus tem o espírito dominado por um número: a *Unidade*! Sim, Deus, segundo a verdade expressa nas páginas do Livro Santo e repetida pelos lábios do Profeta, é Um, Eterno e Imutável! Logo, o número aparece no quadro da nossa inteligência como o símbolo do Criador.

Do número, senhora, que é a base da razão e do entendimento, surge outra noção de indiscutível importância: é a noção de *medida*.

Medir, senhora, é comparar. Só são, entretanto, suscetíveis de medida as grandezas que admitem um elemento como base de comparação. Será possível medir-se a extensão do espaço? De modo nenhum. O espaço é infinito, e sendo assim, não admite termo de comparação. Será possível avaliar a Eternidade? De modo nenhum. Dentro das possibilidades humanas o tempo é sempre infinito, e no cálculo da Eternidade não pode o efêmero servir de unidade a avaliações.

Em muitos casos, entretanto, ser-nos-á possível representar uma grandeza que não se adapta aos sistemas de medidas por outra que pode ser avaliada com segurança e vigor. Essa permuta de grandeza, visando a simplificar os processos de medida, constitui o objeto principal de uma ciência que os homens denominam *Matemática*.[5]

Para atingir o seu objetivo, precisa a Matemática estudar os números, suas propriedades e transformações. Nessa parte ela toma o nome de Aritmética. Conhecidos os números é possível aplicá-los na avaliação das grandezas que variam ou que são desconhecidas, mas que se apresentam expressas por meio de relações e fórmulas. Temos assim a Álgebra. Os valores que medimos no campo da realidade são representados por corpos materiais ou por símbolos; em qualquer caso, entretanto, esses corpos ou símbolos são dotados de três atributos: forma, tamanho e posição. Importa, pois, que estudemos tais atributos. E esse estudo vai constituir o objeto da Geometria.

Interessa-se, ainda, a Matemática, pelas leis que regem os movimentos e as forças, leis que vão aparecer na admirável ciência que se denomina Mecânica.

A Matemática põe todos os seus preciosos recursos a serviço de uma ciência que eleva a alma e engrandece o homem. Essa ciência é a Astronomia.

Falam alguns nas Ciências Matemáticas, como se a Aritmética, a Álgebra e a Geometria formassem partes inteiramente distintas. Puro engano!

Todas se auxiliam mutuamente, se apoiam umas nas outras e, em certos pontos, se confundem.

A Matemática, senhora, que ensina o homem a ser simples e modesto, é a base de todas as ciências e de todas as artes.

Um episódio ocorrido com o famoso monarca iemenita[6] é bastante expressivo.

Vou narrá-lo.

Asad-Abu-Carib,[7] rei do Iêmen, ao repousar, certa vez, na larga varanda de seu palácio, sonhou que encontrara sete jovens que caminhavam por uma estrada. Em certo momento, vencidas pela fadiga e pela sede, as jovens pararam sob o sol causticante do deserto. Surgiu, nesse momento, uma famosa princesa que se aproximou das peregrinas, trazendo-lhes um grande cântaro cheio de água pura e fresca. A bondosa princesa saciou a sede que torturava as jovens e estas, reanimadas, puderam reiniciar a jornada interrompida.

Ao despertar, impressionado com esse inexplicável sonho, determinou Asad-Abu-Carib viesse à sua presença um astrólogo famoso, chamado Sanib, e consultou-o sobre a significação daquela cena a que ele — rei poderoso e justo — assistira no mundo das Visões e Fantasias. Disse Sanib, o astrólogo: “Senhor! As sete jovens que caminhavam pela estrada eram as artes divinas e as ciências humanas: a Pintura, a Música, a Escultura, a Arquitetura, a Retórica, a Dialética e a Filosofia. A princesa prestativa que as socorreu simboliza a grande e prodigiosa Matemática." "Sem o auxílio da Matemática — prosseguiu o sábio — as artes não podem progredir e todas as outras ciências perecem." Impressionado com tais palavras, determinou o rei que se organizassem em todas as cidades, oásis e aldeias do país centros de estudo de Matemática. Hábeis e eloquentes ulemás, por ordem do soberano, iam aos bazares e caravançarás lecionar Aritmética aos caravaneiros e beduínos. Ao termo de poucos meses, verificou que o país era agitado por um surto de incomparável prosperidade. Paralelamente ao progresso da ciência, cresciam os recursos materiais; as escolas viviam repletas; o comércio desenvolvia-se de maneira prodigiosa; multiplicavam-se as obras de arte; erguiam-se monumentos; as cidades viviam repletas de ricos forasteiros e curiosos.

O país do Iêmen teria aberto as portas do Progresso e da Riqueza se não viesse a fatalidade (Maktub!) pôr termo àquele fervilhar de trabalho e prosperidade. O rei Asad-Abu-Carib cerrou os olhos para o mundo e foi levado pelo impiedoso Asrail[8] para o céu de Alá. A morte do soberano fez abrir dois túmulos: um deles acolheu o corpo do glorioso monarca e ao outro foi atirada a cultura científica do povo. Subiu ao trono um príncipe vaidoso, indolente e de acanhados dotes intelectuais. Preocupavam-no mais os divertimentos do que os problemas administrativos do país. Poucos meses decorridos, todos os serviços públicos estavam desorganizados, as escolas fechadas e os artistas e ulemás forçados a fugir sob a ameaça dos perversos e ladrões. O tesouro público foi criminosamente dilapidado em ociosos festins e desenfreados banquetes. E o país, levado à ruína pelo desgoverno, foi atacado por inimigos ambiciosos e facilmente vencido.

A história de Asad-Abu-Carib, senhora, vem provar que o progresso de um povo se acha ligado ao desenvolvimento dos estudos matemáticos.[9] No Universo tudo é número e medida. A Unidade, símbolo do Criador, é o princípio de todas as coisas, que não existem senão em virtude das imutáveis proporções e relações numéricas. Todos os grandes enigmas da vida podem ser reduzidos a simples combinações de elementos variáveis ou constantes, conhecidos ou incógnitos.

Para que possamos compreender a Ciência, precisamos tomar por base o número. Vejamos como estudá-lo, com a ajuda de Alá, Clemente e Misericordioso!

— Uassalã!

Com essas palavras calou-se o calculista, dando por finda a sua primeira aula de Matemática.

Ouvimos, então, com agradável surpresa, a aluna, que o reposteiro tornava invisível, pronunciar a seguinte prece.

— Ó Deus Onipotente, Criador do Céu e da Terra, perdoa a pobreza, a pequenez, a puerilidade de nossos corações. Não escutes as nossas palavras, mas sim os nossos gemidos inexprimíveis; não atendas às nossas petições, mas ao clamor de nossas necessidades. Quanta vez pedimos aquilo que possuímos e deixamos desaproveitado! Quanta vez sonhamos possuir aquilo que nunca poderá ser nosso!

Ó Deus, nós Te agradecemos por este mundo, nosso grande lar; por sua vastidão e riqueza, e pela vida multiforme que nele estua e de que todos fazemos parte. Louvamos-Te pelo esplendor do céu azul e pela brisa da tarde, e pelas nuvens rápidas e pelas constelações nas alturas. Louvamos-Te pelos oceanos imensos, pela água corrente, pelas montanhas eternas, pelas árvores frondosas e pela relva macia em que os nossos pés repousam. Nós Te agradecemos os múltiplos encantos com que podemos sentir, em nossa alma, as belezas da Vida e do Amor!

Ó Deus, Clemente e Misericordioso, perdoa a pobreza, a pequenez, a puerilidade de nossos corações.

NOTAS

[1] Famoso poeta.

[2] Ver *Glossário*.

[3] Primeira surata do Alcorão.

[4] Um muçulmano ortodoxo, quando se refere, com certa ênfase, a um sábio, acrescenta a fórmula clássica: *Alá, porém, é mais sábio*.

[5] No tempo de Beremiz a ciência teria a denominação de Geometria.

[6] Natural do Iêmen.

[7] Ver Índice no final deste livro.

[8] Anjo da Morte. O rei Asad-Abu-Carib foi assassinado por conspiradores. Depois de sua morte subiu ao trono um aventureiro chamado Rébia-Ben-Nasr. O episódio do sonho é lendário.

[9] Cabe lembrar aqui a frase notável de Napoleão: "O progresso de um povo depende, exclusivamente, do desenvolvimento da cultura matemática."

12. No qual Beremiz revela grande interesse por um brinquedo de corda. A curva do maraçã e as aranhas. Pitágoras e o círculo. Encontramos Harim Namir. O problema dos 60 melões. Como o vequil perdeu a aposta. A voz do muezim cego chama os crentes para a oração do Mogreb.

Ao deixarmos o lindo palácio do poeta Iezid pouco faltava para a hora do ars.[1] Ao passarmos pelo marabu de Ramih ouvi o suave gorjear de pássaros entre os ramos de uma velha figueira.

— Eis, com certeza, um dos libertos de hoje — observei. — É um conforto ouvi-lo traduzir, nas melodias do canto, a alegria da liberdade conquistada!

Beremiz, porém, naquele momento não se interessava pelo canto da passarada que esvoaçava entre os ramos, ao pôr do sol. Absorvia-lhe a atenção um grupo de meninos que se divertiam na rua a pequena distância. Dois dos pequenos suspendiam, pelas extremidades, um pedaço de corda fina que devia ter quatro ou cinco côvados[2] de comprimento. Os outros esforçavam-se por transpor, de um salto, a corda colocada ora mais baixo, ora mais alto, conforme a agilidade do saltador.

— Repara na corda, ó Bagdali — disse o calculista segurando-me pelo braço. — Observa a curva perfeita. Não achas o caso digno de estudo?

— Que caso? Que curva? — exclamei. — Não vejo nada de extraordinário naquele ingênuo e banal brinquedo de crianças que aproveitam as últimas horas do dia para um recreio inocente.

— Pois, meu amigo — tornou Beremiz —, convence-te de que os teus olhos são cegos para as maiores belezas e maravilhas da natureza. Quando os meninos erguem a corda, segurando-a pelas extremidades, e deixando-a cair livremente sob a ação do próprio peso, ela forma uma curva que deve ser notável, pois surge como resultante de forças naturais. Já tive ocasião de observar essa curva — que o sábio Nô-Elin chamava maraçã[3] — nas teias e na forma que apresenta a corcova de certos dromedários! Terá tal curva alguma analogia com as derivadas da parábola? Futuramente, se Alá quiser, os geômetras descobrirão meios de traçar essa curva, ponto por ponto, e estudar-lhe-ão com absoluto rigor todas as propriedades.

— Há porém — prosseguiu — muitas outras curvas mais importantes. Em primeiro lugar devo citar o círculo.[4] Pitágoras, filósofo e geômetra grego, considerava o círculo como a curva mais perfeita ligando, assim, o círculo à perfeição. E o círculo, sendo a mais perfeita, é, entre todas, a que tem o traçado mais simples.

Beremiz, nesse momento, interrompendo a dissertação apenas iniciada, sobre as curvas, apontou para um rapaz que se achava a pequena distância e gritou:

— Harim Namir!

O jovem voltou rápido o rosto e encaminhou-se alegre ao nosso encontro. Verifiquei logo que se tratava de um dos três irmãos que encontráramos a discutir, certo dia, no deserto, por causa de uma herança de 35 camelos — partilha complicada, cheia de terços e nonos, que Beremiz resolveu por meio de um artifício curioso e a que já tive ocasião de aludir.

— Mac Allah! — exclamou Harim, dirigindo-se a Beremiz. — Foi o destino que mandou agora o grande calculista ao nosso encontro. Meu irmão Hamed acha-se atrapalhado com uma conta de 60 melões que ninguém sabe resolver.

E Harim levou-nos até uma pequena casa, onde se achava o seu irmão Hamed Namir em companhia de vários mercadores.

Mostrou-se Hamed muito satisfeito ao ver Beremiz e, voltando-se para os mercadores, disse-lhes:

— Este homem que acaba de chegar é um grande matemático. Graças ao seu valioso auxílio já conseguimos obter a solução perfeita de um problema que nos parecia impossível: dividir 35 camelos por três pessoas! Estou certo de que ele poderá explicar, em poucos minutos, a diferença encontrada na venda dos 60 melões.

Era preciso que Beremiz fosse minuciosamente informado do caso. Um dos mercadores tomou a palavra e narrou o seguinte:

— Os dois irmãos Harim e Hamed encarregaram-se de vender no mercado duas partidas de melões. Harim entregou-me 30 melões, que deviam ser vendidos à razão de 3 por 1 dinar; Hamed entregou-me, também, 30 melões para os quais estipulou preço mais caro, isto é, à razão de 2 por 1 dinar. Era claro que, efetuada a venda, Harim devia receber 10 e seu irmão 15 dinares. O total de venda seria, portanto, de 25 dinares.

Ao chegar, porém, à feira, uma dúvida surgiu-me no espírito.

Se eu começar a venda pelos melões mais caros, pensei, perderei a freguesia; se iniciar o negócio pelos melões mais baratos, encontrarei, depois, dificuldade em vender os outros trinta. O melhor que tenho a fazer (a única solução para o caso) é vender as duas partidas ao mesmo tempo.

Tendo chegado a essa conclusão reuni os 60 melões e comecei a vendê-los aos grupos de 5 por 2 dinares. O negócio era justificado por um raciocínio muito simples:

— Se eu devia vender 3 por 1 e depois 2 também por 1 dinar, seria mais simples vender, logo, 5 por 2 dinares.

Vendidos os 60 melões em 12 lotes de cinco cada um, apurei 24 dinares.

Como pagar aos dois irmãos, se o primeiro devia receber 10 e o segundo, 15 dinares?

Havia uma diferença de 1 dinar; não sei como explicar, pois o negócio foi feito, como disse, com o máximo cuidado.

Vender 3 por 1 dinar e, depois, vender 2 por 1 não é a mesma coisa que vender logo 5 por 2 dinares?

— O caso não teria, afinal, importância alguma — interveio Hamed Namir — se não fosse a intervenção absurda do vequil[5] que superintende a feira. Esse vequil, ouvido sobre o caso, não soube explicar a diferença na conta, e apostou 5 dinares como essa diferença era proveniente de falta de um melão que fora roubado por ocasião da venda.

— O vequil não tem razão alguma — acudiu Beremiz — e deve ser obrigado a pagar a aposta. A diferença a que chegou o vendedor resultou do seguinte:

A partida de Harim compunha-se de 10 lotes de 3 melões cada um. Cada lote devia ser vendido por 1 dinar. O total da venda seria de 10 dinares.

A partida de Hamed compunha-se de 15 lotes (com 2 melões cada um) que, vendido a 1 dinar cada lote, dariam o total de 15 dinares.

Reparem que o número de lotes de uma partida não é igual ao número de lotes da outra.

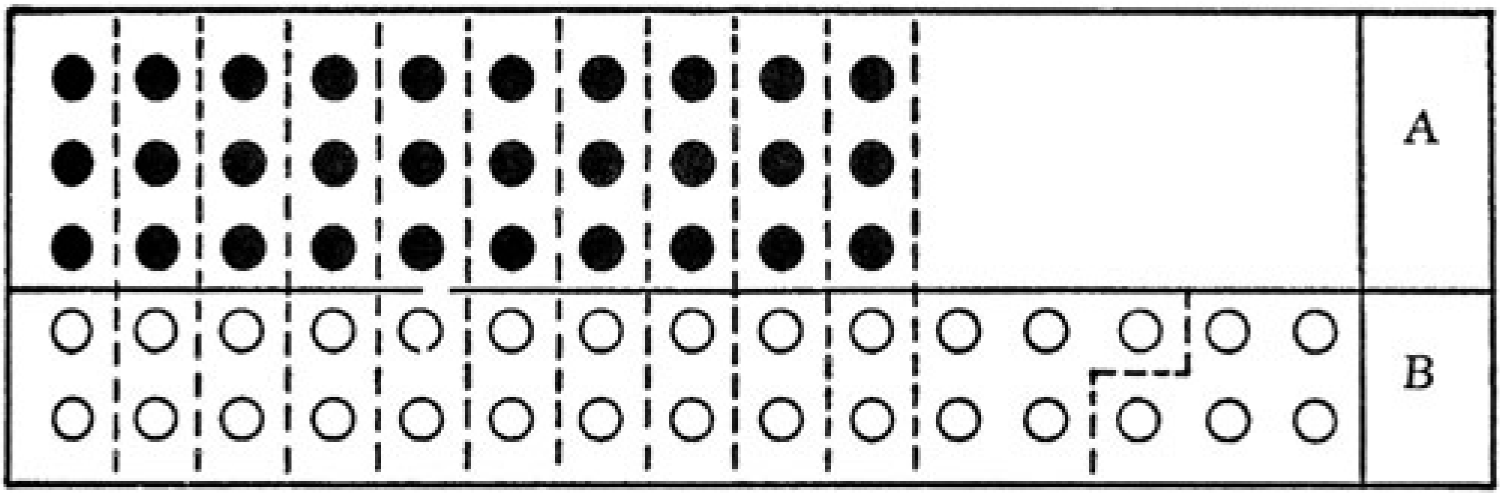
Para vender os melões em lotes de cinco cada, só os 10 primeiros lotes poderiam ser vendidos à razão de 5 por 2 dinares; vendidos esses 10 lotes, restam ainda 10 melões que pertencem exclusivamente à partida de Hamed e que, sendo de preço mais elevado, deveriam ser vendidos à razão de 2 por 1 dinar.

A diferença de um resultou, pois, da venda dos 10 últimos melões! Não houve roubo algum! Da desigualdade de preço entre as partilhas resultou o prejuízo de 1 dinar, que se verificou no resultado final.

Nesse momento fomos obrigados a interromper a reunião. A voz do muezim, cujo eco vibrava no espaço, chamava os fiéis para a prece da tarde!

— Hai al el-salah.[6] Hai al el-salah!

Cada um de nós procurou, sem perda de tempo, fazer segundo determina o Livro Santo, a *guci* do ritual.[7]



Eis uma figura que esclarece o problema dos 60 melões. Em A estão representados os 30 melões que deviam ser vendidos à razão de 3 por dinar; em B os 30 melões mais caros, cujo preço era de 2 por dinar. Como o gráfico nos mostra, só há dez lotes de cinco cada um (sendo 3 de A e 2 de B) que podem ser vendidos, sem prejuízo, à razão de 2 dinares cada um.

O sol já se achava na linha do horizonte. Era chegada a hora do *mogreb*.

Da terceira almenara da mesquita de Omar, o muezim cego, com voz pausada e rouca, chamava os crentes à oração:

— Alá é grande e Maomé, o profeta, é o verdadeiro enviado de Deus! Vinde à prece, ó muçulmanos! Vinde à prece! Lembrai-vos de que tudo é pó, exceto Alá!

Os mercadores, precedidos por Beremiz, estenderam os seus tapetes coloridos, retiraram as sandálias, voltaram-se em direção da Cidade Santa e exclamaram:

— Alá, Clemente e Misericordioso! Louvado seja o Onipotente Criador dos mundos visíveis e invisíveis! Conduz-nos pelo caminho certo, pelo caminho daqueles que são amparados e abençoados por ti![8]

NOTAS

1 Prece da tarde. Ver *Glossário*.

2 Antiga medida de comprimento. Equivalia a três palmos mais ou menos.

3 Essa curva é hoje perfeitamente conhecida. Chama-se *catenária*. A tradução de *maraçã* ou *maraçon*, segundo o dicionarista Frei João de Souza, é *corda* ou *cordel*. Vem do verbo árabe *maraça*, que significa "ligar com um cordel". Deu origem à palavra *baraço*.

4 Em linguagem vulgar, ou mesmo nas obras literárias, a palavra *círculo* designa a curva, isto é, a circunferência.

5 Intendente. Encarregado da administração de um bairro.

6 Preparai-vos para a prece! Em geral o muezim acrescentava: "Lembrai-vos de que tudo é pó, exceto Alá!"

7 Ablução do ritual.

8 São essas as primeiras palavras do Alcorão.

220
284

13 . Que trata da nossa visita ao palácio do califa. Beremiz é recebido pelo rei. Os poetas e a amizade. A amizade entre os homens e a amizade entre os números. Números amigos. O califa elogia o Homem que Calculava. É exigida, em palácio, a presença de um calígrafo.

Quatro dias depois, pela manhã, fomos informados de que seríamos recebidos em audiência solene pelo califa Abul-Abas-Ahmed Al-Motacém Billah, Emir dos Crentes, Vigário de Alá.[1] Aquela comunicação, tão grata para qualquer muçulmano, era, não só por mim, como também por Beremiz, ansiosamente esperada.

É bem possível que o soberano, ao ouvir o xeque Iezid narrar alguma das proezas praticadas pelo exímio matemático, tivesse mostrado interesse em conhecer o Homem que Calculava. Não se pode explicar de outro modo a nossa presença na corte, entre as figuras de mais prestígio da alta sociedade de Bagdá.

Fiquei deslumbrado ao entrar no rico palácio do Emir.

Longas arcarias sobrepostas, formando curvas em harmoniosas concordâncias, e sustentadas por altas e delgadas colunas geminadas, eram, nas porções de paredes que dominavam os pontos de nascença, ornamentadas por finíssimos mosaicos. Pude notar que esses mosaicos eram formados de fragmentos de louça branca e vermelha, alternadamente com faias de estuque.

Os tetos dos salões principais eram forrados de azul e ouro; as paredes de todos os compartimentos apresentavam-se cobertas de azulejos em relevo e os pavimentos, de mosaico.

Os reposteiros, as tapeçarias, os divãs, tudo enfim quanto constituía a mobília do palácio demonstrava a magnificência inexcedível de um príncipe das lendas hindus.

Lá fora, nos jardins, reinava a mesma pompa, realçada pela mão da Natureza, perfumada por mil odores diversos, alcatifada de verdes alfombras, banhada pelo rio, refrescada por inúmeras fontes de mármore branco, junto às quais um milheiro de escravos trabalhava sem cessar.

Fomos conduzidos ao divã das audiências por um dos auxiliares do vizir Ibraim Maluf.

Avistamos, ao chegar, o poderoso monarca sentado em riquíssimo trono de marfim e veludo. Perturbou-me, de certo modo, a beleza estonteante do grande salão. Todas as suas paredes eram adornadas com inscrições admiráveis feitas pela arte caprichosa de um calígrafo genial. As legendas apareciam, em relevo, sobre fundo azul-claro em letras pretas e vermelhas. Notei que eram versos dos mais brilhantes poetas de nossa terra! Jarras de flores por toda parte, flores desfolhadas sobre coxins, sobre alcatifas, ou em salvas de ouro e prata primorosamente cinzeladas.

Ricas e numerosas colunas ostentavam-se ali, orgulhosas, com os seus capitéis e pedestais, elegantemente ornadas pelo cinzel dos artistas árabes de Espanha, que sabiam, como ninguém, multiplicar, engenhosamente, as combinações das figuras geométricas associadas a folhas e flores de tulipas, de açucenas e de mil plantas diversas, numa harmonia maravilhosa e de inexcedível beleza.

Achavam-se presentes sete vizires, dois cádis, vários ulemás e diversos outros dignitários ilustres e de alto prestígio.

Ao honrado Maluf cabia fazer a nossa apresentação. No desempenho dessa tarefa o vizir, com os cotovelos colocados à cintura, as mãos magras espalmadas para fora, assim falou:

— Para atender a vosso pedido, ó Rei do Tempo, determinei que comparecessem hoje a esta excelsa audiência o calculista Beremiz Samir, meu atual secretário, e seu amigo Hank Tade-Maiá, auxiliar de escrita e funcionário do palácio.

— Sede bem-vindos, ó muçulmanos! — respondeu em tom simples e amistoso o sultão. — Admiro os sábios. Um matemático, sob o céu deste país, contará sempre com a minha simpatia e, se preciso for, com a minha decidida proteção.

— Alá badique, iá sidi![2] — exclamou Beremiz, inclinando-se diante do rei.

Fiquei imóvel, a cabeça inclinada, os braços cruzados, pois não tendo sido atingido pelos elogios do soberano, não podia ter a honra de dirigir-lhe o salã.

O homem que tinha nas mãos o destino do povo árabe parecia bondoso e despido de preconceitos. Tinha o rosto magro, crestado do sol do deserto, e avincado de rugas extemporâneas. Ao sorrir, o que fazia com relativa frequência, mostrava os dentes claros e regulares. Trajava com relativa simplicidade. Trazia à cintura, sob a faixa de seda, um lindo punhal, cujo cabo era adornado de preciosa gema. O seu turbante era verde com pequeninas barras brancas. A cor verde — como todos sabem — caracteriza os descendentes de Maomé, o Santo Profeta (com ele a paz e a glória!).

— Muitas coisas importantes pretendo resolver na audiência de hoje — começou o califa. — Não quero, porém, iniciar os trabalhos e discutir os altos problemas políticos, sem receber uma prova clara e precisa de que o matemático persa, recomendado pelo meu amigo, o poeta Iezid, é, realmente, um grande e hábil calculista.

Interpelado desse modo pelo glorioso monarca, Beremiz sentiu-se no dever imperioso de corresponder, com brilhantismo, à confiança que o xeque Iezid nele depositara.

Dirigindo-se, pois, ao sultão, assim falou:

— Não passo, ó Comendador dos Crentes, de rude pastor que acaba de ser distinguido com a vossa honrosa atenção.

E, após curta pausa:

— Acreditam, entretanto, os generosos amigos, ser justo incluir o meu nome entre os calculistas. Sinto-me lisonjeado com tão alta distinção. Penso, porém, que os homens são, em geral, bons calculistas. Calculista é o soldado que em campanha avalia com o olhar a distância de uma parasanga;[3] calculista é o poeta que conta as sílabas e mede a cadência dos versos; calculista é o músico que aplica na divisão dos compassos as leis da perfeita harmonia; calculista é o pintor que traça as figuras segundo proporções invariáveis para atender os princípios da perspectiva; calculista é o humilde esteireiro que dispõe, um por um, os cem fios de seu trabalho — todos, enfim, ó Rei, são bons e hábeis calculistas!

E, depois de correr os olhos pelos nobres que rodeavam o trono, Beremiz prosseguiu:

— Noto, com infinita alegria, que estais rodeado de ulemás e doutores. Vejo, à sombra de vosso trono poderoso, homens de valor que cultivam os estudos e engrandecem a ciência. A companhia dos sábios, ó Rei, é para mim o mais caro tesouro! O homem só vale pelo que sabe. Saber é poder. Os sábios educam pelo exemplo e nada há que avassale o espírito humano mais suave e profundamente do que o exemplo. Não deve, porém, o homem cultivar a ciência senão para utilizá-la na prática do bem. Sócrates, filósofo grego, afirmava com o peso da sua autoridade:

“Só é útil o conhecimento que nos faz melhores.”

Sêneca, outro pensador famoso, indagava descrente:

“Que importa saber o que é a linha reta quando não se sabe o que seja retidão?”

Permiti, pois, ó Rei generoso e justo, que eu renda a minha desvaliosa homenagem aos doutores e ulemás que se acham neste divã!

Neste ponto o calculista fez uma pausa muito rápida e logo recomeçou, eloquente, em tom solene:

— Nos trabalhos de cada dia, observando as coisas que Alá tirou do Não-ser para a realidade do Ser, aprendi a avaliar os números e transformá-los por meio de regras práticas e seguras. Sinto-me, entretanto, em dificuldade para apresentar a prova que acabais de exigir. Confiando, porém, na vossa proverbial generosidade, cumpre-me dizer-vos que não vejo, neste rico divã, senão demonstrações admiráveis e eloquentes de que a Matemática existe por toda parte. Adornam as paredes deste belo salão vários versos que encerram precisamente um total de 504 palavras, sendo uma parte dessas palavras traçada em caracteres pretos e a restante em caracteres vermelhos! O calígrafo que desenhou estes versos fazendo a decomposição das 504 palavras demonstra ter tanto talento e imaginação quanto os poetas que escreveram essas imortais poesias!

— Sim, ó Rei magnânimo! — prosseguiu Beremiz. — E a razão é simples. Encontro nos versos incomparáveis que enfeitam este esplêndido divã grandes elogios sobre a *Amizade*. Posso reler, ali, perto da coluna, a frase inicial da célebre *cassida* de Mohalhil:[4]

Se os meus amigos me fugirem, muito infeliz serei, pois de mim fugirão todos os tesouros.

Um pouco abaixo encontro o eloquente pensamento de Tarafa:

O encanto da vida depende unicamente das boas amizades que cultivamos.

À esquerda, destaca-se o incisivo conceito de Labid, da tribo de Amir-Ibn-Sassoa:

A boa amizade é para o homem o que a água pura e límpida é para o beduíno sedento.

Sim, tudo isto é sublime, profundo e eloquente. A maior beleza, porém, reside no engenhoso artifício empregado pelo calígrafo para demonstrar que a amizade que os versos exaltam não existe só entre os seres dotados de vida e sentimento! A Amizade apresenta-se, também, até entre números!

— Como descobrir — perguntareis, certamente — entre os números aqueles que estão presos pelos laços da amizade matemática? De que meios se utiliza o geômetra para apontar, na série numérica, os elementos ligados pela estima?

Em poucas palavras poderei explicar em que consiste o conceito de números amigos, em Matemática.

Consideremos, por exemplo, os números 220 e 284.

O número 220 é divisível exatamente pelos seguintes números:

1, 2, 4, 5, 10, 11, 20, 22, 44, 55 e 110.

São esses os divisores de 220 menores que 220.

O número 284 é — por sua vez — divisível, exatamente, pelos seguintes números:

1, 2, 4, 71, e 142.

São esses os divisores de 284 menores que 284.

Pois bem. Há entre esses números coincidência realmente notável. Se somarmos os divisores de 220, acima indicados, vamos obter uma soma igual a 284; se somarmos os divisores de 284 o resultado será, precisamente, 220.

Divisores de 220

1
2
4
5
10
11
20
22
44
55
110
Soma 284

Divisores de 284

1
2
4
71
142
Soma 220

Dessa relação os matemáticos chegaram à conclusão de que os números 220 e 284 são "amigos," isto é, cada um deles parece existir para servir, alegrar, defender e honrar o outro!

E o calculista concluiu:

— Pois bem, ó Rei generoso e justo; observei que as 504 palavras que formam o elogio poético da Amizade foram escritas da seguinte forma:

220 em caracteres pretos e 284 em caracteres vermelhos! E 220 e 284 são, como já expliquei, números amigos!

E reparai, ainda, numa relação não menos impressionante. As 50 palavras completam, como é fácil verificar, 32 legendas diferentes. Pois bem. A diferença entre 284 e 220 é 64, número que, além de ser quadrado e cubo, é precisamente igual ao dobro do número de legendas desenhadas.

O infiel dirá que se trata de simples coincidência. Aquele, porém, que acredita em Deus e tem a glória de seguir os ensinamentos do Santo Profeta Maomé (com ele a oração e a paz!) sabe que as chamadas coincidências não seriam possíveis se Alá não as escrevesse no livro do Destino! Afirmo, pois, que o calígrafo, ao decompor o número 504 em duas parcelas (220 e 284), escreveu sobre a amizade um poema que enleva todos os homens de alma e espírito esclarecido!

Ao ouvir as palavras do calculista o califa ficou extasiado. Era espantoso que aquele homem contasse, num relance, as 504 palavras dos 30 versos e, ao contá-las, verificasse logo que havia 220 em preto e 284 em letras vermelhas!

— As tuas palavras, ó Calculista — declarou o rei —, trouxeram-me a certeza de que és em verdade um geômetra de alto porte. Fiquei encantado com essa interessante relação que os algebristas denominam de “amizade numérica”, e estou, agora, interessado em descobrir qual foi o calígrafo que escreveu, ao fazer a decoração deste divã, os versos que servem de adorno a estas paredes. É fácil verificar se a decomposição das 504 palavras, em parcelas que correspondem a números amigos, foi feita de propósito ou se resultou de um capricho do Destino (obra exclusiva de Alá, o Exaltado!).

E fazendo aproximar-se do trono um dos seus secretários, o sultão Al-Motacém perguntou-lhe:

— Lembras-te, ó Nuredim Zarur, do calígrafo que trabalhou neste palácio?

— Conheço-o muito bem, ó Rei — respondeu prontamente o xeque. — Reside junto à mesquita de Otmã.

— Traze-o, pois, aqui, ó Sejid,[5] o mais depressa possível! — ordenou o califa. — Quero interrogá-lo.

— Escuto e obedeço!

E saiu, rápido como uma flecha, a cumprir a ordem do soberano.

NOTAS

[1] São vários os títulos honrosos conferidos ao rei ou ao califa: Vigário de Alá, Comendador dos Crentes, Xeque do Islã, Rei dos Árabes, Emir dos Crentes etc.

[2] Deus vos conduza, senhor!

[3] Medida itinerária dos antigos persas. Valia 5.250 metros.

[4] Poeta árabe do VI século. *Cassida* é um poema.

[5] Título honroso que é concedido aos príncipes descendentes de Mafoma. Aqueles que se dizem descendentes do fundador do Islamismo julgam-se com direito ao título de *Xerife* ou *sejid*. O *Xerife*, quando exerce cargo de alto prestígio, recebe o título de *emir*. *Xerife* é, em geral, qualquer pessoa de origem nobre. À pág. 5 deste livro, conforme se pode observar, o nome de M. T. aparece precedido desse título.

14 . Narra o que se passou no divã real. Os músicos e as bailarinas gêmeas. Como Beremiz identificou Iclímia e Tabessã. Surge um vizir invejoso que critica Beremiz. O elogio dos teóricos e sonhadores, feito por Beremiz. O rei proclama a vitória da Teoria sobre o imediatismo grosseiro.

Logo que o xeque Nuredim Zarur — o emissário do rei — partiu em busca do calígrafo que desenhara as 32 legendas do divã, deram entrada na magnífica sala do trono cinco músicos egípcios que executaram, com grande sentimento, as mais ternas canções e melodias árabes. Enquanto os músicos faziam vibrar seus alaúdes, harpas, cítaras e flautas, duas graciosas bailarinas djalicianas,[1] para maior deslumbramento de todos, dançavam sobre o vasto tablado de forma circular.

Era de causar espanto a semelhança que se observava entre as duas jovens escravas.

Tinham ambas o mesmo talhe esbelto, a mesma face morena, os mesmos olhos pintados de khol negro; ostentavam brincos, pulseiras e colares exatamente iguais. E, para completar a confusão, apresentavam-se com trajes em que não se percebia a menor diferença.

Em dado momento o califa, que parecia de bom humor, dirigiu-se a Beremiz a quem disse:

— Que achas, ó Calculista, das minhas lindas adjamis? Já reparaste, com certeza, que são parecidíssimas. Uma delas chama-se Iclímia; tem a outra o mavioso nome de Tabessã.[2] São gêmeas e valem um tesouro. Não encontrei, até hoje, quem fosse capaz de distinguir, com segurança, uma da outra quando elas reaparecem no tablado, depois da dança. Iclímia (repara bem!) é a que se acha agora à direita; Tabessã, à esquerda, junto à coluna, dirige-nos, neste momento, seu melhor sorriso! Pela cor de sua pele lisa, pelo perfume delicado que exala, ela se assemelha à haste odorante do aloés.

— Confesso, ó xeque do Islã[3] — respondeu Beremiz —, que as vossas bailarinas são, realmente, irresistíveis. Louvado seja Alá, o Único, que criou a Beleza para com ela modelar as sedutoras formas femininas. Da mulher formosa já disse o poeta:

E para teu luxo a teia que os poetas fabricam com o fio de ouro das imagens; e os pintores o que fazem é criar para tua formosura nova imortalidade.

Para adornar-te, para vestir-te, para fazer-te mais preciosa, o mar dá as suas pérolas, a terra o seu ouro, os jardins suas flores.

Sobre a tua mocidade o desejo do coração dos homens derramou a sua glória.[4]

— Parece-me, entretanto — ponderou o calculista —, relativamente fácil distinguir-se Iclímia de sua irmã Tabessã. Basta reparar na feitura dos trajes de cada uma!

— Como assim? — atalhou o sultão. — Pelos trajes não se poderá descobrir a menor diferença, pois determinei que ambas usassem véus, blusas e mahzmas[5] rigorosamente iguais!

— Peço perdão, ó Rei generoso — contraveio Beremiz —, mas a vossa ordem as costureiras não a acataram com o devido cuidado. Verifico que a mahzma de Iclímia tem, na barra, 312 franjas, ao passo que na mahzma de Tabessã só cheguei a contar 309 franjas. Essa diferença de 3 no número total das franjas é suficiente para evitar qualquer confusão entre as duas irmãs gêmeas!

Ao ouvir tais palavras o califa bateu palmas, fez parar imediatamente o bailado, e determinou que um haquim[6] fosse contar, uma por uma, todas as franjas que apareciam nos saiotes das bailarinas.

O resultado veio confirmar o cálculo de Beremiz. A formosa Iclímia tinha, no vestido, 312 franjas e Tabessã, apenas 309!

— Mac Allah! — exclamou o califa. — O xeque Iezid, apesar de poeta, não exagerou. Esse calculista Beremiz é, realmente, prodigioso! Contou todas as franjas dos saiotes enquanto as bailarinas volteavam rapidamente sobre o tablado. Isso parece incrível! Por Alá!

A inveja quando se apodera de um homem abre em sua alma caminho a todos os sentimentos desprezíveis e torpes.

Havia na corte de Al-Motacém um vizir chamado Nahum Ibn-Nahum, tipo invejoso e mau. Vendo crescer perante o califa o prestígio de Beremiz, como onda de pó erguida pelo simum, aguilhoado pelo despeito deliberou embaraçar o meu talentoso amigo e colocá-lo em situação ridícula e falsa. Assim foi que se aproximou do rei e disse-lhe destilando as palavras:

— Acabo de observar, ó Emir dos Crentes, que o calculista persa, nosso hóspede desta tarde, é exímio na contagem de elementos ou figuras de uma coleção. Contou as quinhentas e tantas palavras escritas na parede do salão, citou dois números amigos, falou da diferença (64 que é cubo e quadrado) e acabou por contar, uma por uma, as franjas dos saiotes das lindas bailarinas.

Mal servidos ficaríamos nós se os nossos matemáticos se dispusessem a cuidar de coisas tão pueris, sem utilidade prática de espécie alguma. Realmente! Que nos adianta saber se há, nos versos que nos enlevam, 220 ou 284 palavras e se esses números são amigos ou não? A preocupação de quantos admiram um poeta não é contar as letras dos versos ou calcular o número de palavras pretas ou vermelhas de um poema. Tampouco nos interessa saber se no vestido desta bela e graciosa bailarina há 312, 309 ou 1.000 franjas. Tudo isso é ridículo e de mui escasso interesse para os homens de sentimentos que cultivam a Beleza e a Arte.

O engenho humano, amparado pela ciência, deve consagrar-se à resolução dos grandes problemas da Vida. Os sábios — inspirados por Alá, o Exaltado — não ergueram o deslumbrante edifício da Matemática para que essa nobre ciência viesse ter a aplicação que lhe quer atribuir o calculista persa. Parece-me, pois, um crime reduzir a ciência de um Euclides, de um Arquimedes ou de um maravilhoso Omar Khayya-m (Alá o tenha em sua glória!) a essa mísera situação de avaliadora numérica de coisas e seres. Interessa-nos, pois, ver esse calculista aplicar as teorias (que diz possuir) na solução de problemas de serventia real, isto é, problemas que se relacionem com as necessidades e os reclamos da vida corrente!

— Há um pequeno engano de vossa parte, senhor vizir — acudiu prontamente Beremiz —, e eu teria grande honra em esclarecer esse insignificante equívoco se o generoso califa, nosso amo e senhor, me concedesse permissão para dirigir-lhe mais longamente a palavra, neste divã!

— Não deixa de parecer, até certo ponto, judiciosa — replicou o rei — a censura feita pelo vizir Nahum-Ibn-Nahum. Um esclarecimento sobre o caso torna-se indispensável. Fala, pois! Tua palavra poderá orientar a opinião dos que aqui se acham!

Fez-se no divã real profundo silêncio.

O calculista assim falou:

— Os doutores e ulemás, ó Rei dos Árabes, não ignoram que a Matemática surgiu com o despertar da alma humana; mas não surgiu com fins utilitários. Foi a ânsia de resolver o mistério do Universo, diante do qual o homem é simples grão de areia, que lhe deu o primeiro impulso. Seu verdadeiro desenvolvimento resultou, antes de tudo, do esforço em penetrar e compreender o Infinito. E ainda hoje, depois de havermos passado séculos a tentar, em vão, afastar o espesso velário, ainda hoje é a busca do Infinito que nos leva para diante. O progresso material dos homens depende das pesquisas abstratas ou científicas do presente, e será aos homens de ciência que trabalham para fins puramente científicos, sem nenhum intuito de aplicação de suas doutrinas, que a humanidade ficará devedora em tempos futuros.[7]

Beremiz fez uma pequena pausa, e logo prosseguiu, com um sorriso fino e espiritual:

— Quando o matemático efetua seus cálculos, ou procura novas relações entre os números, não busca a verdade para fins utilitários. Cultivar a ciência pela utilidade prática, imediata, é desvirtuar a alma da própria ciência!

A teoria estudada hoje, e que nos parece inútil, terá aplicações no futuro? Quem poderá esclarecer esse enigma na sua projeção através dos séculos? Quem poderá, da equação do presente, resolver a grande incógnita dos tempos vindouros? Só Alá sabe a verdade! É bem possível que as investigações teóricas de hoje forneçam, dentro de mil ou dois mil anos, recursos preciosos para a prática.[8]

É preciso, ainda, não esquecer que a Matemática, além do objetivo de resolver problemas, calcular áreas e medir volumes, tem finalidades muito mais elevadas.

Por ter alto valor no desenvolvimento da inteligência e do raciocínio, é a Matemática um dos caminhos mais seguros por onde podemos levar o homem a sentir o poder do pensamento, a mágica do espírito.

A Matemática é, enfim, uma das verdades eternas e, como tal, produz a elevação do espírito — a mesma elevação que sentimos ao contemplar os grandes espetáculos da Natureza, através dos quais sentimos a presença de Deus, Eterno e Onipotente! Há, pois, ó ilustre vizir Nahum Ibn-Nahum, como já disse, um pequeno erro de vossa parte. Conto os versos de um poema, calculo a altura de uma estrela, avalio o número de franjas, meço a área de um país, ou a força de uma torrente — aplico, enfim, fórmulas algébricas e princípios geométricos — sem me preocupar com os louros que possa tirar de meus cálculos e estudos! Sem o sonho e a fantasia a ciência se abastarda. É ciência morta! Uassalã!

As palavras eloquentes de Beremiz impressionaram profundamente os nobres e ulemás que rodeavam o trono. O rei aproximou-se do calculista, ergueu-lhe a mão direita e exclamou com decidida autoridade:

— A teoria do cientista sonhador venceu e vencerá sempre o imediatismo grosseiro do ambicioso sem ideal filosófico! Kelimet-Oullah![9]

Ao ouvir tal sentença, ditada pela justiça e pela razão, o rancoroso Nahum Ibn-Nahum inclinou-se, dirigiu um salã ao rei, e sem dizer palavra retirou-se cabisbaixo do divã das audiências.

Muita razão tinha o poeta ao escrever:

> “Deixa voar bem alto a Fantasia:
> Sem ilusões a vida que seria?”[10]

NOTAS

[1] Escravas de origem espanhola. Em geral eram cristãs.

[2] *Adjamis* significa "jovens de outras terras". Iclímia é o nome atribuído à filha mais velha de Eva. Segundo a tradição árabe, ela é mais moça do que Caim. Tabessã quer dizer pequenina.

[3] Título dado, exclusivamente, aos descendentes de Maomé.

[4] Rabindranath Tagore, poeta indiano.

[5] Espécie de saiote que usam as bailarinas.

[6] Médico a quem o rei confia a saúde de suas esposas.

[7] Já Condorcet observa: "O marinheiro a quem a exata determinação da longitude preserva do naufrágio deve a vida a uma teoria concebida, vinte séculos mais cedo, por homens de gênio que tinham em vista meras especulações geométricas."

[8] Veja, *Apêndice*, *Elogio da Matemática*.

[9] Palavra de Deus.

[10] Esses versos são do grande poeta lírico espanhol Ramon de Campoamor (1817-1901), em tradução de Alípio de Figueiredo.

15. No qual Nuredim, o comissário, regressa ao palácio do rei. A informação que obteve de um imã. Como vivia o pobre calígrafo. O quadrado cheio de números e o tabuleiro de xadrez. Beremiz fala sobre os quadrados mágicos. A consulta do ulemá. O rei pede a Beremiz que lhe conte a lenda do jogo de xadrez.

Nuredim não fora favorecido pela sorte ao dar desempenho à sua missão. O calígrafo que o rei queria, com tanto empenho, interrogar sobre o caso dos “números amigos” não se encontrava mais entre os muros de Bagdá.

Ao relatar as providências que tomara a fim de dar cumprimento à ordem do califa, assim falou o nobre muçulmano:

— Deste palácio parti, acompanhado de três guardas, para a mesquita de Otmã (Alá que a nobilite cada vez mais!). Informou-me um velho imã que zela pela conservação desse templo que o homem procurado residira, realmente, durante vários meses, numa casa próxima. Poucos dias antes, porém, seguira para Báçora em uma caravana de vendedores de tapetes e velas. Soube ainda que o calígrafo (cujo nome o imã ignorava) vivia só, e raras vezes deixava o pequeno e modesto aposento em que morava. Achei que devia examinar a antiga habitação do calígrafo, pois era bem provável que fosse lá encontrar alguma aplicação que me facilitasse as pesquisas.

O aposento achava-se abandonado desde o dia em que fora deixado pelo seu antigo morador. Tudo ali demonstrava lamentável pobreza! Um leito grosseiro, atirado ao canto, era todo o mobiliário. Havia, entretanto, sobre uma caixa tosca de madeira, um tabuleiro de xadrez, acompanhado de alguma peças desse nobilitante jogo e, na parede, um quadro cheio de números. Achei estranho que um homem paupérrimo, que arrastava uma vida tão cheia de privações, cultivasse o jogo de xadrez e adornasse a parede de sua casa com figuras feitas de expressões matemáticas. Resolvi trazer comigo o tabuleiro e o tal quadrado numérico, para que os nossos dignos ulemás pudessem observar essas relíquias deixadas pelo velho calígrafo.

6	1	8
7	5	3
2	9	4

Quadrado mágico de 9 casas

O sultão, tomado, entretanto, de viva curiosidade pelo caso, mandou que Beremiz examinasse com a devida atenção o tabuleiro e a figura, que mais parecia trabalho de um discípulo de Al-Kharismi[1] do que enfeite para quarto de pobre.

Depois de ter observado com meticuloso cuidado o tabuleiro e o quadro, disse o Homem que Calculava:

— Esta interessante figura numérica, encontrada no quarto abandonado pelo calígrafo, constitui o que chamamos um “quadrado mágico”.

— Tomemos um quadrado e dividamo-lo em 4, 9 ou 16 quadrados iguais, a que chamaremos *casas*.

Em cada uma dessas casas coloquemos um número inteiro. A figura obtida será um quadrado mágico quando a soma dos números que figuram numa coluna, numa linha ou em qualquer das diagonais for sempre a mesma. Esse resultado invariável é denominado *constante* do quadrado e o número de casas de uma linha é o módulo do quadrado.

Os números que ocupam as diferentes casas do quadrado mágico devem ser todos diferentes e tomados na ordem natural.

É obscura a origem dos quadrados mágicos. Acredita-se que a construção dessas figuras constituía, já em época remota, um passatempo que prendia a atenção de grande número de curiosos.

Como os antigos atribuíam a certos números propriedades cabalísticas, era muito natural que vissem virtudes mágicas nos arranjos especiais desses números.

Os matemáticos chineses, que viveram 45 séculos antes de Maomé, já conheciam os quadrados mágicos.

O quadrado mágico com 4 casas não pode ser construído.

Na Índia muitos reis usavam o quadrado mágico como amuleto; um sábio do Iêmen afirmava que os quadrados mágicos eram preservativos de certas moléstias. Um quadrado mágico de prata, preso ao pescoço, evitava, segundo a crença de certas tribos, o contágio da peste.

4	5	16	9
14	11	2	7
1	8	13	12
15	10	3	6

Quadrado mágico de 16 casas que os matemáticos denominam "diabólico". Esse quadrado continua mágico quando transportamos uma linha ou uma coluna de um lado para o outro.

Quando um quadrado mágico apresenta certa propriedade, como, por exemplo, a de ser decomponível em vários quadrados mágicos, leva o nome de hipermágico.

Entre os quadrados hipermágicos podemos citar os diabólicos. Assim se denominam os quadrados que continuam mágicos quando transportamos uma coluna que se acha à direita para a esquerda, ou quando passamos uma linha que está embaixo para cima.

As indicações dadas por Beremiz sobre os quadrados mágicos foram ouvidas com a maior atenção pelo rei e pelos nobres muçulmanos.

Um velho ulemá, de olhos claros e nariz achatado, mas muito risonho e simpático, depois de dirigir palavras elogiosas ao "eminente Beremiz Samir, do país do Irã", declarou que desejava fazer uma consulta ao sábio calculista.

A consulta do ulemá risonho e simpático era a seguinte:

— Seria possível, a um geômetra, calcular a relação exata entre uma circunferência e o seu diâmetro? Em outras palavras: "Quantas vezes uma circunferência contém o seu diâmetro?"

A resposta a essa pergunta formulou-a o calculista nos seguintes termos:

— Não é possível obter a medida exata de uma circunferência mesmo quando conhecemos o seu diâmetro. Dessa medida deveria resultar um número, mas o verdadeiro valor desse número os geômetras ignoram.[2] Acreditavam os antigos astrólogos que a circunferência fosse três vezes o seu diâmetro. Mas isso não é certo. O grego Arquimedes achou que, medindo 22 côvados a circunferência, o seu diâmetro deveria medir, aproximadamente, 7 côvados. O tal número resultaria, assim, da divisão de 22 por 7. Os calculistas hindus não concordam com essa conta, e o grande Al-Kharismi afirmou que a regra de Arquimedes, na vida prática, está muito longe de ser verdadeira.[3]

E Beremiz concluiu, dirigindo-se ao ulemá do nariz achatado:

— Esse número parece envolver alto mistério, por ser dotado de atributos que só Alá poderá revelar.

A seguir, o brilhante calculista tomou do tabuleiro de xadrez e disse, voltando-se para o rei:

— Este velho tabuleiro, dividido em 64 casas pretas e brancas, é empregado, como sabeis, no interessante jogo que um hindu chamado Lahur Sessa, inventou, há muitos séculos, para recrear um rei da Índia. A descoberta do jogo de xadrez acha-se ligada a uma lenda que envolve cálculos, números, e notáveis ensinamentos.

— Deve ser interessante ouvi-la! — atalhou o califa. — Quero conhecê-la!

— Escuto e obedeço — respondeu Beremiz.

E narrou a seguinte história:

NOTAS

1 Ver Geômetra árabe. Está citado na *Dedicatória*. Ver *Apêndice*.

2 Esse número famoso é o número p.

3 Ver *Apêndice*.

16 . Onde se conta a famosa lenda sobre a origem do jogo de xadrez. A lenda é narrada ao califa de Bagdá, Al-Motacém Bilah, Emir dos Crentes, por Beremiz Samir, o Homem que Calculava.

Difícil será descobrir, dada a incerteza dos documentos antigos, a época precisa em que viveu e reinou na Índia um príncipe chamado Iadava, senhor da província da Taligana. Seria, porém, injusto ocultar que o nome desse monarca vem sendo apontado por vários historiadores hindus como dos soberanos mais ricos e generosos de seu tempo.

A guerra, com o cortejo fatal de suas calamidades, muito amargou a existência do rei Iadava, transmutando-lhe o ócio e gozo da realeza nas mais inquietantes atribulações. Adstrito ao dever, que lhe impunha a coroa, de zelar pela tranquilidade de seus súditos, viu-se o nosso bom e generoso monarca forçado a empunhar a espada para repelir, à frente de pequeno exército, um ataque insólito e brutal do aventureiro Varangul, que se dizia príncipe de Caliã.

O choque violento das forças rivais juncou de mortos os campos de Dacsina e tingiu de sangue as águas sagradas do Rio Sandhu. O rei Iadava possuía — pelo que nos revela a crítica dos historiadores — invulgar talento para a arte militar; sereno em face da invasão iminente, elaborou um plano de batalha, e tão hábil e feliz foi em executá-lo, que logrou vencer e aniquilar por completo os pérfidos perturbadores da paz do seu reino.

O triunfo sobre os fanáticos de Varangul custou-lhe, infelizmente, pesados sacrifícios; muitos jovens quichatrias[1] pagaram com a vida a segurança de um trono para prestígio de uma dinastia; e entre os mortos, com o peito varado por uma flecha, lá ficou no campo de combate o príncipe Adjamir, filho do rei Iadava, que patrioticamente se sacrificou no mais aceso da refrega, para salvar a posição que deu aos seus a vitória final.

Terminada a cruenta campanha e assegurada a nova linha de suas fronteiras, regressou o rei ao suntuoso palácio de Andra, baixando, porém, formal proibição de que se realizassem as ruidosas manifestações com que os hindus soíam festejar os grandes feitos guerreiros. Encerrado em seus aposentos, só aparecia para atender aos ministros e sábios brâmanes quando algum grave problema nacional o chamava a decidir, como chefe de Estado, no interesse e para felicidade de seus súditos.

Com o andar dos dias, longe de se apagarem as lembranças da penosa campanha, mais se agravaram a angústia e a tristeza que, desde então, oprimiam o coração do rei. De que lhe poderiam servir, na verdade, os ricos palácios, os elefantes de guerra, os tesouros imensos, se já não mais vivia a seu lado aquele que fora sempre a razão de ser de sua existência? Que valor poderiam ter, aos olhos de um pai inconsolável, as riquezas materiais que não apagam nunca a saudade do filho estremecido?

As peripécias da batalha em que pereceu o príncipe Adjamir não lhe saíam do pensamento. O infeliz monarca passava longas horas traçando, sobre uma grande caixa de areia, as diversas manobras executadas pelas tropas durante o assalto. Com um sulco indicava a marcha da infantaria; ao lado, paralelo ao primeiro, outro traço mostrava o avanço dos elefantes de guerra; um pouco mais abaixo, representada por pequenos círculos dispostos em simetria, perfilava a destemida cavalaria chefiada por um velho radj[2] que se dizia sob a proteção de Techandra, a deusa da Lua. Ainda por meio de gráficos esboçava o rei a posição das colunas inimigas desvantajosamente colocadas, graças à sua estratégia, no campo em que se feriu a batalha decisiva.

Uma vez completado o quadro dos combatentes, com as minudências que pudera evocar, o rei tudo apagava, para recomeçar novamente, como se sentisse íntimo gozo em reviver os momentos passados na angústia e na ansiedade.

À hora matinal em que chegavam ao palácio os velhos brâmanes para a leitura dos Vedas,[3] já o rei era visto a riscar na areia os planos de uma batalha que se reproduzia interminavelmente.

— Infeliz monarca! — murmuravam os sacerdotes penalizados. — Procede como um sudra[4] a quem Deus privou da luz da razão. Só Dhanoutara,[5] poderosa e clemente, poderá salvá-lo!

E os brâmanes erguiam preces, queimavam raízes aromáticas, implorando à eterna zeladora dos enfermos que amparasse o soberano de Taligana.

Um dia, afinal, foi o rei informado de que um moço brâmane — pobre e modesto — solicitava uma audiência que vinha pleiteando havia já algum tempo. Como estivesse, no momento, com boa disposição de ânimo, mandou o rei que trouxessem o desconhecido à sua presença.

Conduzido à grande sala do trono, foi o brâmane interpelado, conforme as exigências da praxe, por um dos vizires do rei.

— Quem és, de onde vens e que desejas daquele que, pela vontade de Vichnu,[6] é rei e senhor de Taligana?

— Meu nome — respondeu o jovem brâmane — é Lahur Sessa[7] e venho da aldeia de Namir, que trinta dias de marcha separam desta bela cidade. Ao recanto em que eu vivia chegou a notícia de que o nosso bondoso rei arrastava os dias em meio de profunda tristeza, amargurado pela ausência de um filho que a guerra viera roubar-lhe. Grande mal será para o país, pensei, se o nosso dedicado soberano se enclausurar, como um brâmane cego, dentro de sua própria dor. Deliberei, pois, inventar um jogo que pudesse distraí-lo e abrir em seu coração as portas de novas alegrias. É esse o desvalioso presente que desejo neste momento oferecer ao nosso rei Iadava.

Como todos os grandes príncipes citados nesta ou naquela página da História, tinha o soberano hindu o grave defeito de ser excessivamente curioso. Quando o informaram da prenda de que o moço brâmane era portador, não pôde conter o desejo de vê-la e apreciá-la sem mais demora.

O que Sessa trazia ao rei Iadava consistia num grande tabuleiro quadrado, dividido em sessenta e quatro quadradinhos, ou casas, iguais; sobre esse tabuleiro colocavam-se, não arbitrariamente, duas coleções de peças que se distinguiam, uma da outra, pelas cores branca e preta, repetindo, porém, simetricamente, os engenhosos formatos e subordinados a curiosas regras que lhes permitiam movimentar-se por vários modos.

Sessa explicou pacientemente ao rei, aos vizires e cortesãos que rodeavam o monarca em que consistia o jogo, ensinando-lhes as regras essenciais:

— Cada um dos partidos dispõe de oito peças pequeninas — os *peões*. Representam a infantaria, que ameaça avançar sobre o inimigo para desbaratá-lo. Secundando a ação dos peões vêm os *elefantes de guerra*,[8] representados por peças maiores e mais poderosas; a *cavalaria*, indispensável no combate, aparece, igualmente, no jogo, simbolizada por duas peças que podem saltar, como dois corcéis, sobre as outras; e, para intensificar o ataque, incluem-se — para representar os guerreiros cheios de nobreza e prestígio — os dois *vizires*[9] do rei. Outra peça, dotada de amplos movimentos, mais eficiente e poderosa do que as demais, representará o espírito de nacionalidade do povo e será chamada a *rainha*. Completa a coleção uma peça que isolada pouco vale, mas se torna muito forte quando amparada pelas outras. É o *rei*.

O rei Iadava, interessado pelas regras do jogo, não se cansava de interrogar o inventor:

— E por que é a rainha mais forte e mais poderosa que o próprio rei?

— É mais poderosa — argumentou Sessa — porque a rainha representa, nesse jogo, o patriotismo do povo. A maior força do trono reside, principalmente, na exaltação de seus súditos. Como poderia o rei resistir ao ataque dos adversários, se não contasse com o espírito de abnegação e sacrifício daqueles que o cercam e zelam pela integridade da pátria?

Dentro de poucas horas o monarca, que aprendera com rapidez todas as regras do jogo, já conseguia derrotar os seus dignos vizires em partidas que se desenrolavam impecáveis sobre o tabuleiro.

Sessa, de quando em quando, intervinha respeitoso, para esclarecer uma dúvida ou sugerir novo plano de ataque ou de defesa.

Em dado momento, o rei fez notar, com grande surpresa, que a posição das peças, pelas combinações resultantes dos diversos lances, parecia reproduzir exatamente a batalha de Dacsina.

— Reparai — ponderou o inteligente brâmane — que para conseguirdes a vitória, indispensável se torna, de vossa parte, o sacrifício deste vizir!

E indicou precisamente a peça que o rei Iadava, no desenrolar da partida — por vários motivos —, grande empenho pusera em defender e conservar.

O judicioso Sessa demonstrava, desse modo, que o sacrifício de um príncipe é, por vezes, imposto como uma fatalidade, para que dele resultem a paz e a liberdade de um povo.

Ao ouvir tais palavras, o rei Iadava, sem ocultar o entusiasmo que lhe dominava o espírito, assim falou:

— Não creio que o engenho humano possa produzir maravilha comparável a este jogo interessante e instrutivo! Movendo essas tão simples peças, aprendi que um rei nada vale sem o auxílio e a dedicação constante de seus súditos. E que, às vezes, o sacrifício de um simples peão vale mais, para a vitória, do que a perda de uma poderosa peça.

E, dirigindo-se ao jovem brâmane, disse-lhe:

— Quero recompensar-te, meu amigo, por este maravilhoso presente, que de tanto me serviu para alívio de velhas angústias. Dize-me, pois, o que desejas, para que eu possa, mais uma vez, demonstrar o quanto sou grato àqueles que se mostram dignos de recompensa.

As palavras com que o rei traduziu o generoso oferecimento deixaram Sessa imperturbável. Sua fisionomia serena não traía a menor agitação, a mais insignificante mostra de alegria ou surpresa. Os vizires olhavam-no atônitos e entreolhavam-se pasmados diante da apatia de uma cobiça a que se dava o direito da mais livre expansão.

— Rei poderoso! — redargüiu o jovem com doçura e altivez. — Não desejo, pelo presente que hoje vos trouxe, outra recompensa além da satisfação de ter proporcionado ao senhor de Taligana um passatempo agradável que lhe vem aligeirar as horas dantes alongadas por acabrunhante melancolia. Já estou, portanto, sobejamente aquinhoado e outra qualquer paga seria excessiva.

Sorriu, desdenhosamente, o bom soberano ao ouvir aquela resposta que refletia um desinteresse tão raro entre os ambiciosos hindus. E, não crendo na sinceridade das palavras de Sessa, insistiu:

— Causa-me assombro tanto desdém e desamor aos bens materiais, ó jovem! A modéstia, quando excessiva, é como o vento que apaga o archote cegando o viandante nas trevas de uma noite interminável. Para que possa o homem vencer os múltiplos obstáculos que se lhe deparam na vida, precisa ter o espírito preso às raízes de uma ambição que o impulsione a um ideal qualquer. Exijo, portanto, que escolhas, sem mais demora, uma recompensa digna de tua valiosa oferta. Queres uma bolsa cheia de ouro? Desejas uma arca repleta de joias? Já pensaste em possuir um palácio? Almejas a administração de uma província? Aguardo a tua resposta, por isso que à minha promessa está ligada a minha palavra!

— Recusar o vosso oferecimento depois de vossas últimas palavras — acudiu Sessa — seria menos descortesia do que desobediência ao rei. Vou, pois, aceitar, pelo jogo que inventei, uma recompensa que corresponde à vossa generosidade; não desejo, contudo, nem ouro, nem terras ou palácios. Peço o meu pagamento em grãos de trigo.

— Grãos de trigo? — estranhou o rei, sem ocultar o espanto que lhe causava semelhante proposta. — Como poderei pagar-te com tão insignificante moeda?

— Nada mais simples — elucidou Sessa. — Dar-me-eis um grão de trigo pela primeira casa do tabuleiro; dois pela segunda, quatro pela terceira, oito pela quarta, e assim dobrando sucessivamente, até a sexagésima quarta e última casa do tabuleiro. Peço-vos, ó Rei, de acordo com a vossa magnânima oferta, que autorizeis o pagamento em grãos de trigo, e assim como indiquei!

Não só o rei como os vizires e venerandos brâmanes presentes riram-se, estrepitosamente, ao ouvir a estranha solicitação do jovem. A desambição que ditara aquele pedido era, na verdade, de causar assombro a quem menos apego tivesse aos lucros materiais da vida. O moço brâmane, que bem poderia obter do rei um palácio em uma província, contentava-se com grãos de trigo!

— Insensato! — clamou o rei. — Onde foste aprender tão grande desamor à fortuna? A recompensa que me pedes é ridícula. Bem sabes que há, num punhado de trigo, número incontável de grãos. Devemos compreender, portanto, que com duas ou três medidas de trigo eu te pagarei folgadamente, consoante o teu pedido, pelas sessenta e quatro casas do tabuleiro. É certo, pois, que pretendes uma recompensa que mal chegará para distrair, durante alguns dias, a fome do último pária[10] do meu reino. Enfim, visto que minha palavra foi dada, vou expedir ordens para que o pagamento se faça imediatamente, conforme teu desejo.

Mandou o rei chamar os algebristas mais hábeis da corte e ordenou-lhes calculassem a porção de trigo que Sessa pretendia.

Os sábios calculistas, ao cabo de algumas horas de acurados estudos, voltaram ao salão para submeter ao rei o resultado completo de seus cálculos.

Perguntou-lhes o rei, interrompendo a partida que então jogava:

— Com quantos grãos de trigo poderei, afinal, desobrigar-me da promessa que fiz ao jovem Sessa?

— Rei magnânimo! — declarou o mais sábio dos matemáticos. — Calculamos o número de grãos de trigo que constituirá o pagamento pedido por Sessa, e obtivemos um número[11] cuja grandeza é inconcebível para a imaginação humana. Avaliamos, em seguida, com o maior rigor, a quantas ceiras[12] corresponderia esse número total de grãos, e chegamos à seguinte conclusão: a porção de trigo que deve ser dada a Lahur Sessa equivale a uma montanha que, tendo por base a cidade de Taligana, seria cem vezes mais alta do que o Himalaia! A Índia inteira, semeados todos os seus campos, taladas todas as suas cidades, não produziria em dois mil séculos a quantidade de trigo que, pela vossa promessa, cabe, em pleno direito, ao jovem Sessa!

Como descrever aqui a surpresa e o assombro que essas palavras causaram ao rei Iadava e a seus dignos vizires? O soberano hindu via-se, pela primeira vez, diante da impossibilidade de cumprir a palavra dada.

Lahur Sessa — rezam as crônicas do tempo —, como bom súdito, não quis deixar aflito o seu soberano. Depois de declarar publicamente que abriria mão do pedido que fizera, dirigiu-se respeitosamente ao monarca e assim falou:

— Meditai, ó Rei, sobre a grande verdade que os brâmanes prudentes tantas vezes repetem: os homens mais avisados iludem-se, não só diante da aparência enganadora dos números, mas também com a falsa modéstia dos ambiciosos. Infeliz daquele que toma sobre os ombros o compromisso de uma dívida cuja grandeza não pode avaliar com a tábua de cálculo de sua própria argúcia. Mais avisado é o que muito pondera e pouco promete!

E, após ligeira pausa, acrescentou:

— Menos aprendemos com a ciência vã dos brâmanes do que com a experiência direta da vida e das suas lições de todo dia, a toda hora desdenhadas! O homem que mais vive mais sujeito está às inquietações morais, mesmo que não as queira. Achar-se-á ora triste, ora alegre; hoje fervoroso, amanhã tíbio; já ativo, já preguiçoso; a compostura alternará com a leviandade. Só o verdadeiro sábio, instruído nas regras espirituais, se eleva acima dessas vicissitudes, paira por sobre todas essas alternativas!

Essas inesperadas e tão sábias palavras calaram fundo no espírito do rei. Esquecido da montanha de trigo que, sem querer, prometera ao jovem brâmane, nomeou-o seu primeiro-vizir.

E Lahur Sessa, distraindo o rei com engenhosas partidas de xadrez e orientando-o com sábios e prudentes conselhos, prestou os mais assinalados benefícios ao povo e ao país, para maior segurança do trono e maior glória de sua pátria.

Encantado ficou o califa Al-Motacém quando Beremiz concluiu a história singular do jogo de xadrez. Chamou o chefe de seus escribas e determinou que a lenda de Sessa fosse escrita em folhas especiais de algodão e conservada em valioso cofre de prata.

E, a seguir, o generoso soberano deliberou se entregasse ao calculista um manto de honra e 100 cequins de ouro.

Bem disse o filósofo:

— Deus fala ao mundo pelas mãos dos generosos![13]

A todos causou grande alegria o ato de magnanimidade do soberano de Bagdá. Os cortesãos que permaneciam no divã eram amigos do vizir Maluf e do poeta Iezid: era, pois, com simpatia que ouviam as palavras do calculista persa, por quem muito se interessavam.

Beremiz, depois de agradecer ao soberano os presentes com que acabava de ser distinguido, retirou-se do divã. O califa ia iniciar o estudo e julgamento de diversos casos, ouvir os honrados cádis[14] e proferir suas sábias sentenças.

Deixamos o palácio real ao cair da noite. Ia começar o mês de Chá-band.[15]

NOTAS

[1] Militares, uma das quatro castas em que se divide o povo hindu. As demais são formadas pelos brâmanes (sacerdotes), vairkas (operários) e sudras (escravos).

[2] Chefe militar.

[3] Livro sagrado dos hindus.

[4] Escravo.

[5] Deusa.

[6] Segundo membro da trindade bramânica.

[7] Nome do inventor do jogo de xadrez. Significa "natural de Lahur".

[8] Os elefantes foram mais tarde substituídos pelas torres.

[9] Os vizires são as peças chamadas bispos. A rainha não tinha, a princípio, movimentos tão amplos.

[10] Indivíduo pertencente a uma das castas mais ínfimas da costa de Coromandel. Corresponde, na escala social, à casta dos *poleás*. Na Europa emprega-se o termo no sentido de "homem expulso de sua casta ou classe".

[11] Para se obter esse total de grãos de trigo, devemos elevar o número 2 ao expoente 64, e do resultado tirar uma unidade. Trata-se de um número verdadeiramente astronômico, de vinte algarismos, que é famoso em Matemática:

$$18\ 446\ 744\ 073\ 709\ 551\ 615$$

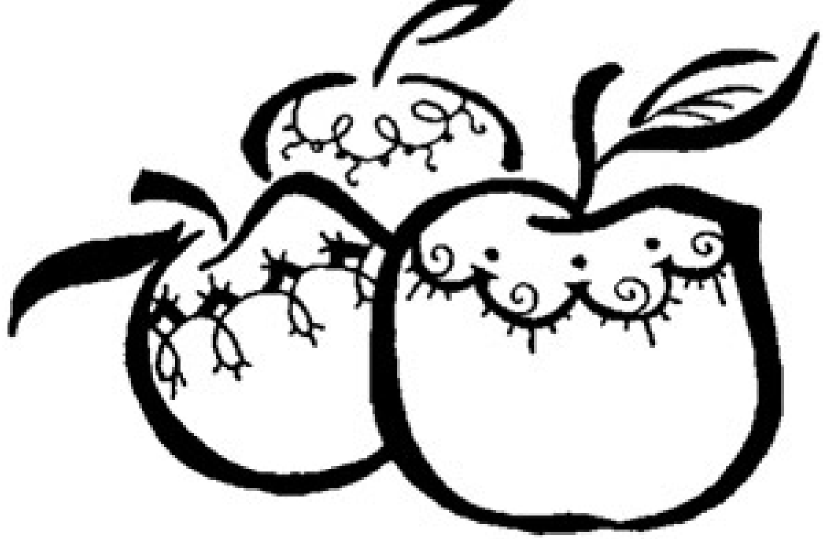
Chamamos especialmente a atenção dos matemáticos para a nota do Apêndice, intitulada *O Problema do Jogo de Xadrez*.

[12] *Ceira* ou cer — Unidade de capacidade e peso usada na Índia. Seu valor variava de uma localidade para outra.

[13] Esse pensamento é de Gibran Khalil Gibran.

[14] Juízes. Denominação dada aos magistrados.

[15] Um dos meses do calendário árabe.



17 . Recebe o Homem que Calculava inúmeras consultas. Crendices e superstições. Unidades e figuras. O contador de histórias e o calculista. O caso das 90 maçãs. A Ciência e a Caridade.

A partir do célebre dia em que estivemos, pela primeira vez, no divã do califa, a nossa vida sofreu profundas modificações. A fama de Beremiz ganhou realce excepcional. Na modesta hospedaria em que morávamos, os visitantes e conhecidos não perdiam oportunidade de lisonjear-nos com repetidas demonstrações de simpatia e respeitosos salãs.

Todos os dias o calculista via-se obrigado a atender a dezenas de consultas. Ora era um cobrador de impostos que precisava conhecer o número de ratls contidos em um abás e a relação entre essas unidades e o cate;[1] aparecia, a seguir, um haquim ansioso por ouvir de Beremiz uma explicação sobre a cura de certas febres por meio de sete nós feitos numa corda; mais de uma vez o calculista foi procurado por cameleiros, ou vendedores de incenso que indagavam quantas vezes devia um homem saltar uma fogueira, para se livrar do Demônio. Apareciam, por vezes, ao cair da noite, soldados turcos, de olhar iracundo, que desejavam aprender meios seguros de ganhar no jogo de dados. Esbarrei, muitas vezes, com mulheres — ocultas por espessos véus — que vinham, tímidas, consultar o matemático sobre os números que deviam escrever no antebraço esquerdo para obter boa sorte, alegria e riqueza! Queriam conhecer os segredos que asseguram a baraka[2] para uma esposa feliz.

A todos Beremiz Samir atendia com paciência e bondade. Esclarecia alguns, dava conselhos a outros. Procurava destruir as superstições e crendices dos fracos e ignorantes, mostrando-lhes que nenhuma relação poderá existir, pela vontade de Deus, entre os números e as alegrias, tristezas e angústias do coração.

E procedia dessa forma, guiado por elevado sentimento de altruísmo, sem visar a lucro ou recompensa. Recusava sistematicamente o dinheiro que lhe ofereciam e quando um xeque rico, a quem ensinara, insistia em pagar a consulta, Beremiz recebia a bolsa cheia de dinares, agradecia a esmola e mandava distribuir, integralmente, a quantia entre os pobres do bairro.

Certa vez um mercador, chamado Aziz Nemã, empunhando um papel cheio de números e contas, veio queixar-se de um sócio a quem tratava de "ladrão miserável", "chacal imundo", e outros epítetos, não menos insultuosos. Beremiz procurou acalmar o ânimo exaltadíssimo do homem e chamá-lo ao caminho da mansidão.

— Acautelai-vos — aconselhou — contra os juízos arrebatados pela paixão porque esta desfigura muitas vezes a verdade. Aquele que olha por um vidro de cor vê todos os objetos da cor desse vidro: se o vidro é vermelho, tudo lhe parece rubro; se é amarelo, tudo se lhe apresenta completamente amarelado. A paixão está para nós como a cor do vidro para os olhos. Se alguém nos agrada, tudo lhe louvamos e desculpamos; se, ao contrário, nos aborrece, tudo lhe condenamos, ou interpretamos de modo desfavorável.

E, a seguir, examinou com paciência as contas, e descobriu nelas vários enganos que desvirtuavam os resultados. Aziz certificou-se de que havia sido injusto para com o sócio, e tão encantado ficou com a maneira inteligente e conciliadora de Beremiz, que nos convidou, naquela noite, a um passeio pela cidade.

Fomos levados, pelo nosso delicado companheiro, até o café Bazarique, no extremo da praça de Otmã.

Um famoso contador de histórias, no meio da sala invadida por fumo negro e espesso, prendia a atenção de um grupo numeroso de ouvintes.

Tivemos a sorte de chegar exatamente no momento em que o xeque el-medah,[3] tendo terminado a costumada prece inaugural, começava a narrativa. Era um homem de seus cinquenta anos, quase negro, a barba negríssima, e dois grandes olhos cintilantes; trazia, como quase todos os outros narradores de Bagdá, um amplíssimo pano branco apertado em torno da cabeça por uma corda de pelo de camelo, que lhe dava a majestade de um sacerdote antigo. Falava com voz alta e vagarosa, ereto no meio do círculo dos ouvintes, acompanhado submissamente por dois tocadores de alaúde e de tambor. Narrava, com entusiasmo, uma história de amor, intercalada com as vicissitudes da vida de um sultão. Os ouvintes não lhe perdiam uma só palavra. O gesto do xeque era tão arrebatado, a sua voz tão expressiva, o seu rosto tão eloquente, que às vezes deixava a impressão de viver as aventuras que sua fantasia criava. Falava de uma longa viagem. Imitava o passo lento do cavalo fatigado. Aqui encarnava o beduíno sedento procurando, em torno de si, uma gota d'água; ali deixava pender os braços e a cabeça como um homem prostrado.

Que admiração me causava o xeque contador de histórias!

Árabes, armênios, egípcios, persas e nômades bronzeados no Hedjaz, imóveis, sem respirar, refletiam na expressão do rosto todas as palavras do orador. Naquele momento, com a alma toda nos olhos, deixavam ver, claramente, a ingenuidade e a frescura de sentimentos que ocultavam sob a aparência de uma dureza selvagem. O contador de histórias andava para a direita e para a esquerda, parava, retrocedia aterrado, cobria o rosto com as mãos, erguia os braços para o céu, e, à medida que se ia afervorando e levantando a voz, os músicos tocavam e batiam com mais fúria.

A narrativa empolgava os beduínos; terminada que foi, os aplausos estrugiram no ar. Seguiu-se um linguarejar surdo dos presentes; comentavam todos os episódios mais emocionantes da narrativa.

O mercador Aziz Nemã, que parecia muito popular naquela barulhenta sociedade, adiantou-se para o centro da roda e comunicou ao xeque, em tom solene e decidido:

— Acha-se presente, ó Irmão dos Árabes, o célebre Beremiz Samir, o calculista persa, secretário do vizir Maluf.

Centenas de olhos convergiram para Beremiz, cuja presença era uma honra para os frequentadores do café.

O contador de histórias, depois de dirigir um respeitoso salã ao Homem que Calculava, disse com voz clara e timbrada:

— Meus amigos! Tenho contado muitas histórias maravilhosas de gênios, reis e efrites.[4] Em homenagem ao luminoso calculista que acaba de chegar, vou narrar uma história que envolve um problema cuja solução, até agora, não foi descoberta.

— Muito bem! Muito bem! — conclamaram os ouvintes.

O xeque, depois de evocar o nome de Alá (com ele a oração e a glória!), contou o seguinte caso:

— Vivia outrora, em Damasco, um bom e esforçado camponês que tinha três filhas. Um dia, conversando com o cádi, declarou o camponês que suas filhas eram dotadas de alta inteligência e de raro poder imaginativo.

O cádi, invejoso e implicante, irritou-se ao ouvir o rústico elogiar o talento das jovens e declarou:

— Já é a quinta vez que ouço de tua boca elogios exagerados que exaltam a sabedoria de tuas filhas. Vou apurar se elas são, como afirmas, dotadas de engenho e perspicácia de espírito.

Mandou o cádi chamar as três raparigas e disse-lhes:

— Aqui estão 90 maçãs que vocês deverão vender no mercado. Fátima, que é a mais velha, levará 50. Cunda levará 30 e Siha, a caçula, será encarregada de vender as 10 restantes.

Se Fátima vender as maçãs a 7 por um dinar, as outras deverão vender, também, pelo mesmo preço, isto é, a 7 por um dinar; se Fátima fizer a venda das maçãs a três dinares cada uma, será esse o preço pelo qual Cunda e Siha deverão vender as que levam. O negócio deve fazer-se de sorte que as três apurem, com a venda das respectivas maçãs, a mesma quantia.

— E não posso desfazer-me de algumas maçãs que levo? — perguntou Fátima.

— De modo algum — obstou, de pronto, o impertinente cádi. — A condição, repito, é essa: Fátima deve vender 50. Cunda venderá 30 e Siha só poderá vender as 10 que lhe tocaram. E pelo preço que Fátima as vender, pelo mesmo preço deverão as outras negociar as frutas. Façam a venda de modo que apurem, ao final, quantias iguais.

Aquele problema, assim posto, afigurava-se absurdo e disparatado. Como resolvê-lo? As maçãs, segundo a condição imposta pelo cádi, deviam ser vendidas pelo mesmo preço. Ora, nessas condições, é claro que a venda de 50 maçãs devia produzir quantia muito maior que a venda de 30 ou de 10 apenas.

E, como as moças não atinassem com a forma de resolver o caso, foram consultar, sobre o complicado problema, um imã[5] que morava nas vizinhanças.

O imã, depois de encher várias folhas de números, fórmulas e equações, concluiu:

— Meninas! Esse problema é de uma simplicidade cristalina. Vendam as noventa maçãs, conforme o cádi ordenou, e chegarão, sem erro, ao resultado que ele mesmo determinou.

A indicação dada pelo imã em nada esclarecia o intrincado enigma das 90 maçãs proposto pelo cádi.

As jovens foram ao mercado e venderam todas as maçãs, isto é, Fátima vendeu 50, Cunda vendeu 30 e Siha encontrou logo comprador para as dez que levara. O preço foi sempre o mesmo para as três moças e, por fim, cada uma delas apurou a mesma quantia. Aqui termina a história. Cabe agora ao nosso calculista explicar como foi resolvido o problema.

Mal acabara de ouvir o apelo do inteligente narrador, Beremiz encaminhou-se para o centro do círculo formado pelos curiosos ouvintes, e assim falou:

— Não deixa de ser interessante esse problema apresentado sob forma de história. Já tenho visto muitas vezes exatamente o contrário; simples histórias mascaradas sob o disfarce de verdadeiros problemas de Lógica ou de Matemática! A solução para o enigma com que o malicioso cádi de Damasco quis atormentar as jovens camponesas parece ser a seguinte:

Fátima iniciou a venda fixando o preço de 7 maçãs por um dinar. Vendeu, desse modo, 49 maçãs, ficando com uma de resto. Cunda, obrigada a ceder as 30 maçãs por esse mesmo preço, vendeu 28 por 4 dinares ficando com duas de resto. Siha, que dispunha de uma dezena, vendeu sete por um dinar, ficando com 3 de resto.

Temos, assim, na primeira fase do problema:

Fátima vendeu 49 e ficou com 1.
Cunda vendeu 28 e ficou com 2.
Siha vendeu 7 e ficou com 3.

A seguir, Fátima resolveu vender a maçã que lhe restava por 3 dinares. Cunda, segundo a condição imposta pelo cádi, vendeu as duas maçãs, que ainda possuía, pelo mesmo preço, isto é, 3 dinares cada uma, obtendo 6 dinares, e Siha vendeu as três maçãs de resto por 9 dinares, isto é, também a três dinares cada uma:

Fátima:	49 por 7 dinares
	1 por 3 dinares
Total	por 10 dinares
Cunda:	28 por 4 dinares
	2 por 6 dinares
Total	por 10 dinares
Siha:	7 por 1 dinar
	3 por 9 dinares
Total	por 10 dinares

E, terminado o negócio, como é fácil verificar, cada uma das moças apurou 10 dinares. Eis como foi resolvido o problema do cádi. Queira Alá que os perversos sejam castigados e os bons recompensados.

O xeque el-medah, encantado com a solução apresentada por Beremiz, exclamou, erguendo o braço:

— Pela segunda sombra de Maomé! Esse jovem calculista é, realmente, um gênio! É o primeiro ulemá que descobre, sem fazer contas complicadas, a solução exata e perfeita para o problema do cádi!

A multidão que enchia o café de Otmã, sugestionada pelos elogios do xeque, vozeou:

— Bravos! Bravos! Alá esclareça o jovem ulemá!

É bem possível que muitos dos homens não tivessem entendido a explicação de Beremiz. Não obstante essa pequena restrição, os aplausos foram gerais e vibrantes.

Beremiz, depois de impor silêncio à rumorosa sociedade, disse-lhe com veemência:

— Meus amigos, vejo-me forçado a confessar que não mereço o honroso título de ulemá. Louco é aquele que se considera sábio quando mede a extensão de sua ignorância. Que pode valer a ciência dos homens diante da ciência de Deus?

E antes que um dos assistentes o interrompesse, narrou o seguinte:

— Era uma vez uma formiguinha que, andando a vagar pelo mundo, encontrou uma grande montanha de açúcar. Muito contente com a sua descoberta, retirou da montanha um pequeno grão, levou-o ao formigueiro. “Que é isto?”, perguntaram as companheiras. “Isto”, replica a pretensiosa, “é uma montanha de açúcar! Encontrei-a no caminho e resolvi trazê-la para aqui!”

E Beremiz acrescentou, com uma vivacidade muito fora da sua habitual placidez:

— É assim o sábio orgulhoso. Traz a pequenina migalha, apanhada no caminho, e julga conduzir o próprio Himalaia. A Ciência é uma grande montanha de açúcar; dessa montanha só conseguimos retirar insignificantes pedacinhos.

E insistiu, compenetrado:

— A única Ciência que deve ter valor para os homens é a ciência de Deus.

Um barqueiro iemenita, de bochechas largas, que se achava na roda, interpelou Beremiz:

— E qual é, ó Calculista, a ciência de Deus?

— A ciência de Deus é a Caridade!

Lembrei-me, nesse momento, da poesia admirável que ouvira, pela voz de Telassim, nos jardins do xeque Iezid, quando os pássaros foram postos em liberdade:

Falasse eu a língua dos homens
E dos anjos
E não tivesse caridade,
Seria como o metal que soa,
Ou como o sino que tine.

Nada seria!
Nada seria!

Por volta da meia-noite, quando deixamos o Café Bazarique, vários homens, para testemunhar a consideração que nos dispensavam, vieram oferecer-nos suas pesadas lanternas, pois a noite ia escura e as ruas estavam esburacadas e desertas.

Olhei para o céu. No alto, destacando-se no meio da imensa caravana de estrelas, brilhava a inconfundível Al-Schira.6

Iallah![7]

NOTAS

[1] O ratl vale um centésimo da arroba e a arroba um quarto do quintal. O abás é a unidade de peso empregada na avaliação de pérolas. O cate é um peso usado na China. Corresponde a 255 gramas.

[2] Boa sorte. Qualquer sortilégio aplicado no sentido de evitar a desgraça.

[3] Xeque el-medah é o chefe dos contadores de histórias. Cf. De Amicis, *Marrocos*, Rio, s./d.

[4] Gênio poderoso. Os efrites, em geral, eram perigosos e maléficos.

[5] Homem religioso encarregado de ler o Alcorão na mesquita.

[6] Nome dado pelos árabes à estrela Sirius, Alfa do Cão Maior.

[7] Louvado seja Deus!

18. Que trata de nossa volta ao palácio do xeque Iezid. Uma reunião de poetas e letrados. A homenagem ao marajá de Laore. A Matemática na Índia. A pérola de Lilaváti. Os problemas de Aritmética dos hindus. O valor da escrava de 20 anos.

No dia seguinte, à primeira hora da sobh,[1] um egípcio veio, com uma carta do poeta Iezid, buscar-nos em nossa modesta hospedaria.

— Ainda é muito cedo para a aula — advertiu tranquilo Beremiz. — Receio que a minha paciente aluna não esteja avisada.

O egípcio explicou que o xeque, antes da aula de Matemática, desejava apresentar o calculista persa a um grupo de amigos. Convinha, pois, chegássemos mais cedo ao palácio do poeta.

Desta vez, por precaução, fomos acompanhados por três escravos negros, fortes e decididos, pois era muito possível que o terrível e ciumento Tara-Tir tentasse, em caminho, assaltar o nosso grupo e assassinar o calculista no qual, ao que parece, vislumbrava odiento rival.

Uma hora depois, sem que nada de anormal nos sucedesse, chegamos à deslumbrante residência do xeque Iezid. O servo egípcio conduziu-nos, através de interminável galeria, até um rico salão azul adornado com frisos dourados. Ali se encontrava o pai de Telassim, rodeado de vários letrados e poetas.

— *Salam aleicum!*

— *Massa al-quair!*

— *Venda azzaiac!*[2]

Trocadas as delicadas saudações, o dono da casa dirigiu-nos amistosas palavras e convidou-nos a tomar assento naquela reunião.

Sentamo-nos sobre fartos coxins de seda. Uma escrava morena, de olhos negros e vivos, trouxe-nos frutas, doces e água com rosa.

Notei uma túnica de cetim branco de Gênova, apertada por um cinto azul todo constelado de brilhantes, de onde pendia lindo punhal com o cabo marchetado de lápis-lazúli e safiras. Coroava-o vistoso turbante de seda cor-de-rosa semeado de gemas preciosas e enfeitado de fios negros. A mão trigueira e fina realçava o brilho dos valiosos anéis que lhe pesavam nos dedos esguios.

— Ilustre geômetra — disse o xeque Iezid, dirigindo-se ao calculista —, bem sei que estás surpreendido com a reunião que promovi hoje nesta modestíssima tenda. Cabe-me, portanto, dizer-te que esta reunião não envolve outra finalidade senão homenagear o nosso ilustre hóspede, o príncipe Cluzir-el-din-Mubarec-Schá, senhor de Laore e Délhi!

Beremiz, com leve inclinação do busto, fez um salã ao grande marajá de Laore, que era o jovem de cinto de brilhantes.

Já sabíamos, das palestras habituais com que nos divertiam os forasteiros na hospedaria, que o príncipe deixara os seus ricos domínios na Índia para cumprir um dos deveres do bom muçulmano — fazer a peregrinação a Meca, a Pérola do Islã. Poucos dias, portanto, ficaria entre os muros de Bagdá; muito breve partiria, com seus numerosos servos e ajudantes, para a Cidade Santa.

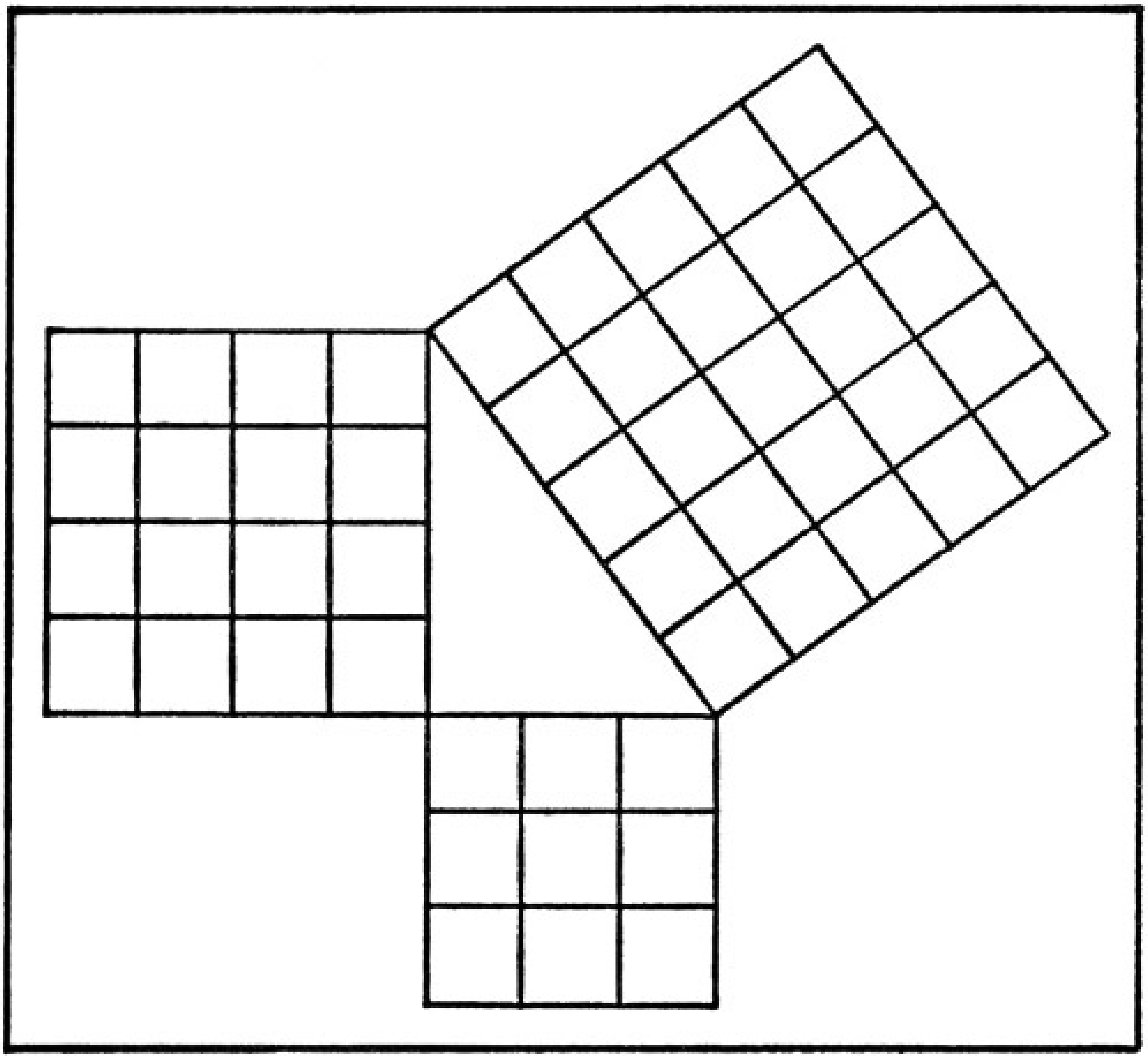
— Desejamos, ó Calculista — prosseguiu Iezid —, o vosso auxílio para que possamos esclarecer uma dúvida sugerida pelo príncipe Cluzir Schá. Qual foi a contribuição com que a ciência dos hindus enriqueceu a Matemática? Quais os principais geômetras que mais se destacaram, na Índia, por seus estudos e pesquisas?

— Xeque generoso! — respondeu Beremiz. — Sinto que a tarefa que acabais de lançar-me sobre os ombros é daquelas que exigem erudição e serenidade. Erudição para conhecer, com todos os pormenores, os fatos apontados pela História das Ciências e serenidade para analisá-los e julgá-los com elevação e discernimento. Os vossos menores desejos, ó Xeque, são, entretanto, ordens para mim. Vou, pois, expor nesta brilhante reunião, como tímida homenagem ao príncipe Cluzir Schá (que acabo de ter a honra de conhecer), as pequenas noções que aprendi nos livros sobre o desenvolvimento da Matemática no país do Ganges.

E o Homem que Calculava assim começou:

— Nove ou dez séculos antes de Maomé, viveu na Índia um brâmane ilustre que se chamava Apastamba. Com o intuito de esclarecer os sacerdotes sobre os processos para construir os altares e orientar os templos, elaborou esse sábio uma obra intitulada *Suba-Sultra*, que contém numerosos ensinamentos matemáticos. É pouco provável que essa obra tenha recebido influência dos pitagóricos,[3] pois a Geometria do sacerdote hindu não segue o método dos pesquisadores gregos. Encontram-se, entretanto, nas páginas de *Suba-Sultra* vários teoremas de Matemática e pequenas regras sobre construções de figuras. Para ensinar a transformação conveniente de um altar, o judicioso Apastamba é levado a construir um triângulo retângulo cujos lados medem respectivamente 39, 36 e 15 polegadas. Para a solução desse curioso problema, aplicava o brâmane um princípio que era atribuído ao grego Pitágoras:

O quadrado construído sobre a hipotenusa é equivalente à soma dos quadrados construídos sobre os catetos.



Demonstração Gráfica do
Teorema de Pitágoras

Os lados do triângulo medem respectivamente três, quatro e cinco centímetros. A relação pitagórica se verifica com a igualdade:

$$5^2 = 4^2 + 3^2;$$
$$25 = 16 + 9$$

E, voltando-se para o xeque Iezid, que tudo ouvia com a maior atenção, o calculista assim falou:

— Melhor poderia esclarecer, por meio de figuras, essa proposição famosa que todos devem conhecer.

O xeque Iezid ergueu a mão e fez um sinal aos seus auxiliares. Dentro de poucos instantes dois escravos trouxeram para o salão uma grande caixa com areia. Sobre a superfície clara da areia, poderia Beremiz traçar figuras e esboçar cálculos e problemas a fim de esclarecer o Príncipe de Laore.

— Aqui está — explicou Beremiz, traçando na areia com o auxílio de uma haste de bambu —, aqui está um triângulo retângulo. O lado maior é denominado *hipotenusa* e os outros dois lados chamaremos *catetos*.

Vamos, agora, construir três quadrados: um sobre a *hipotenusa*, outro sobre o primeiro *cateto* e o terceiro sobre o segundo *cateto*. Será fácil provar que o quadrado maior (construído sobre a hipotenusa) tem a área exatamente igual à soma das áreas dos dois outros quadrados (construídos sobre os catetos).

Perguntou o príncipe se aquela relação era verdadeira para todos os triângulos.

Com ar grave, respondeu Beremiz:

— Essa proposição é verdadeira para todos os triângulos retângulos. Direi, sem receio de errar, que a lei de Pitágoras exprime uma verdade eterna. Mesmo antes de brilhar o sol que os ilumina, antes de existir o ar que respiramos, já o quadrado construído sobre a hipotenusa era igual à soma dos quadrados construídos sobre os catetos.

Mostrava-se o príncipe interessadíssimo com os esclarecimentos que ouvia do calculista. E falando ao poeta Iezid, observou com simpatia:

— Coisa maravilhosa, meu amigo, é a Geometria! Que ciência notável! Percebemos em seus ensinamentos duas faces que encantam o homem mais rude e mais desinteressado pelas coisas do pensamento: clareza e simplicidade.

E tocando de leve com a mão esquerda no ombro de Beremiz, interpelou o calculista com honrosa naturalidade.

— E essa proposição, que os gregos estudaram, já aparece no tal livro *Suba-Sultra* do velho brâmane Apastamba?

Respondeu Beremiz sem hesitar:

— Sim, ó Príncipe, a chamada *Lei de Pitágoras* pode ser lida nas folhas do *Suba-Sultra* sob uma forma um pouco diferente. Pela leitura dos escritos de Apastamba aprendiam, ainda, os sacerdotes, para o cálculo dos altares, a transformar um retângulo num quadrado equivalente, isto é, num quadrado que tivesse a mesma área.

— E surgiram, na Índia, outras obras de cálculo dignas de destaque? — indagou o príncipe.

— Várias outras — acudiu, prontamente, Beremiz. — Citarei a curiosa *Suna-Sidauta*, obra de autor desconhecido, mas de muito valor, pois expõe, de forma muito singela, as regras da numeração decimal e mostra que o zero é de alta importância no cálculo. Não menos notáveis, para a Ciência dos Brâmanes, foram os escritos de dois sábios que são hoje apontados pela admiração dos geômetras: Aria-Bata e Brama-Gupta. O tratado de Aria-Bata era dividido em quatro partes: *Harmonias Celestes*, *O Tempo e suas Medidas*, *As Esferas* e *Elementos de Cálculo*. Não poucos foram os erros apontados nos escritos de Aria-Bata. Esse geômetra ensinava, por exemplo, que o volume da pirâmide se obtém multiplicando-se a metade da base pela altura.

— E essa regra não está certa? — interrompeu o príncipe.

— Está, na verdade, errada — respondeu Beremiz. — Totalmente errada. Para o cálculo do volume de uma pirâmide devemos multiplicar não a *metade*, mas a *terça* parte da área da base (avaliada em polegadas quadradas) pela altura (avaliada em polegadas).

Achava-se ao lado do Príncipe de Laore um homem alto, magro, ricamente trajado, de barba grisalha, meio avermelhado. Tipo estranho nos meios dos hindus. Julguei que era um caçador de tigres; enganei-me. Era um astrólogo hindu que acompanhava o príncipe em sua peregrinação a Meca. Ostentava um turbante azul de três voltas, bastante escandaloso. Chamava-se Sadhu Gang e mostrava-se muito interessado em ouvir as palavras do calculista.

Em dado momento o astrólogo Sadhu resolveu intervir nos debates. Falando mal, com sotaque estrangeiro, perguntou a Beremiz:

— É verdade que a Geometria, na Índia, foi cultivada por um sábio que conhecia os segredos dos astros e os altos mistérios dos céus?

Aquela pergunta não perturbou o calculista. Depois de meditar durante alguns instantes, tomou Beremiz a sua haste de bambu, desmanchou todas as figuras que se achavam no tabuleiro de areia e escreveu apenas um nome:

Bháskara, o Sábio.

E disse com certa ênfase:

— Eis o nome do mais famoso geômetra da Índia. Conhecia Bháskara os segredos dos astros e estudava os altos mistérios dos céus. Nasceu esse astrônomo em Bidom, na província de Deca, cinco séculos depois de Maomé. A primeira obra de Bháskara intitulava-se *Bija-ganita*.

— *Bija-ganita*? — repetiu o homem do turbante azul. — *Bija* quer dizer *semente*, e *ganita*, num dos nossos velhos dialetos, significa *contar*, *avaliar*, *medir*.

— É isso mesmo — confirmou Beremiz numa sinceridade veemente. — É isso mesmo.

A melhor tradução para o título dessa obra de Bháskara seria: a *Arte de Contar Sementes*. Mas, além do *Bija-ganita*, elaborou o judicioso Bháskara outra obra que se tornou famosa: *Lilaváti*. Sabemos que era esse o nome da filha de Bháskara.

O astrólogo do turbante azul voltou a interromper:

— Dizem que há um romance, ou uma lenda, em torno de Lilaváti. Conhece, ó Calculista, esse romance ou essa lenda?

— Sim, sim — acudiu Beremiz. — Conheço-o perfeitamente e, se for do agrado do nosso príncipe, poderei contá-la.

— Por Alá! — interveio prontamente o Príncipe de Laore. — Vamos ouvir a lenda de Lilaváti. Ponho todo o empenho em conhecê-la! A mim, palpita-me que deve ser muito interessante.

Nesse momento, a um sinal do poeta Iezid, o dono da casa, surgiram na sala cinco ou seis escravos, oferecendo, aos seus convidados, bolos de faisão, doces de leite, bebidas e tâmaras.

Logo que terminou aquela deliciosa refeição (e feitas as abluções do ritual) foi dada, novamente, a palavra ao calculista.

Beremiz ergueu-se, correu o olhar por todos os presentes, e assim começou:

— Em nome de Alá, Clemente e Misericordioso![4] Conta-se que o famoso geômetra Bháskara, o Sábio, tinha uma filha chamada Lilaváti.

A origem do *Lilaváti* é muito interessante. Vou recordá-la. Bháskara tinha uma filha chamada Lilaváti. Quando essa menina nasceu, consultou ele as estrelas e verificou, pela disposição dos astros, que sua filha, condenada a permanecer solteira toda a vida, ficaria esquecida pelo amor dos jovens patrícios. Não se conformou Bháskara com essa determinação do Destino e recorreu aos ensinamentos dos astrólogos mais famosos do tempo. Como fazer para que a graciosa Lilaváti pudesse obter marido, sendo feliz no casamento?

Um astrólogo, consultado por Bháskara, aconselhou-o a levar a filha para a província de Dravira, junto ao mar. Havia em Dravira um templo escavado na pedra, no qual era venerada uma imagem de Buda, que trazia na mão uma estrela. Só em Dravira (assegurou o astrólogo) poderia Lilaváti encontrar um noivo, mas o casamento só seria feliz se a cerimônia do enlace fosse marcada, em certo dia, no cilindro do tempo.

Lilaváti foi, afinal, com agradável surpresa para seu pai, pedida em casamento por um jovem rico, trabalhador, honesto, e de boa casta. Fixado o dia, e marcada a hora, reuniram-se os amigos para assistir à cerimônia.

Os hindus mediam, calculavam e determinavam as horas do dia com auxílio de um cilindro colocado num vaso cheio d'água. Esse cilindro, aberto apenas em cima, apresentava pequeno orifício no centro da superfície da base. À proporção que a água, entrando pelo orifício da base, invadia lentamente o cilindro, este afundava no vaso e de tal modo que chegava a desaparecer por completo em hora previamente determinada.

Colocou Bháskara o cilindro das horas em posição adequada, com o máximo cuidado, e aguardou que a água chegasse ao nível marcado. A noiva, levada por irreprimível curiosidade, verdadeiramente feminina, quis observar a subida da água no cilindro. Aproximou-se para acompanhar a determinação do tempo. Uma das pérolas de seu vestido desprendeu-se e caiu no interior do vaso. Por uma fatalidade, a pérola, levada pela água, foi obstruir o pequeno orifício do cilindro, impedindo que nele pudesse entrar a água do vaso. O noivo e os convidados esperaram com paciência largo período de tempo. Passou-se a hora propícia sem que o cilindro indicasse o tempo como previra o sábio astrólogo. O noivo e os convidados retiraram-se para que fosse fixado, depois de consultados os astros, outro dia para o casamento. O jovem brâmane, que pedira Lilaváti em casamento, desapareceu semanas depois e a filha de Bháskara ficou para sempre solteira.

Reconheceu o sábio geômetra que é inútil lutar contra o Destino e disse à filha:

— Escreverei um livro que perpetuará o teu nome e ficarás na lembrança dos homens mais do que viveriam os filhos que viessem a nascer do teu malogrado casamento.

A obra de Bháskara tornou-se célebre e o nome de Lilaváti, a noiva malograda, surge imortal na História da Matemática.

Pelo que se refere à Matemática, *Lilaváti* faz exposição metódica da numeração decimal e das operações aritméticas sobre números inteiros; estuda minuciosamente as quatro operações, o problema da elevação ao quadrado e ao cubo, ensina a extração da raiz quadrada e chega até mesmo ao estudo da raiz cúbica de um número qualquer. Aborda depois as operações sobre números fracionários, com a conhecida regra da redução das frações ao mesmo denominador.

Para os problemas, adotava Bháskara enunciados graciosos e até românticos.

Eis um dos problemas do livro de Bháskara:

> *Amável e querida Lilaváti, de olhos doces como os da tenra e delicada gazela, dize-me qual o número que resulta da multiplicação de 135 por 12.*

Outro problema, igualmente interessante, que figura no livro de Bháskara, refere-se ao cálculo de um enxame de abelhas:

> *A quinta parte de um enxame de abelhas pousou na flor de Kadamba, a terça parte numa flor de Silinda, o triplo da diferença entre estes dois números voa sobre uma flor de Krutaja, e uma abelha adeja sozinha, no ar, atraída pelo perfume de um jasmim e de um pandnus. Dize-me, bela menina, qual o número de abelhas.*[5]

Bháskara mostrou em seu livro que os problemas mais complicados podem ser apresentados de uma forma viva e até graciosa.

E Beremiz, sempre traçando figuras no tabuleiro de areia, apresentou ao Príncipe de Laore vários problemas curiosos, colhidos na obra *Lilaváti*.

Infeliz Lilaváti!

Ao repetir o nome da desditosa menina, lembrei-me do poeta.

> *Como o oceano rodeia a Terra, assim tu, mulher, rodeias o coração do mundo com o abismo das tuas lágrimas.*[6]

NOTAS

1 Parte da manhã.

2 As frases citadas são formas usuais de saudação entre árabes amigos.

3 Geômetras gregos, discípulos de Pitágoras.

4 Essa frase faz parte do ritual. Ao iniciar uma narrativa, em público, deve o muçulmano, previamente, exaltar o nome de Deus.

5 A solução é 15. Ver *Apêndice: O Problema das Abelhas.*

6 O verso é de Tagore. Figura no livro *Pássaros Perdidos*.

19. No qual o príncipe Cluzir elogia o Homem que Calculava. O problema dos três marinheiros. Beremiz descobre o segredo de uma medalha. A generosidade do marajá de Laore.

O elogio que Beremiz fez da ciência dos hindus, recordando uma página da História da Matemática, causou ótima impressão no espírito do príncipe Cluzir Schá. O jovem soberano, impressionado pela dissertação, declarou que considerava o calculista um sábio completo, capaz de ensinar a Álgebra de Bháskara a uma centena de brâmanes.

— Fiquei encantado — ajuntou ainda — ao ouvir essa lenda da infeliz Lilaváti, que perdeu o noivo por causa de uma pérola do vestido. Os problemas de Bháskara, citados pelo eloquente calculista, são, realmente, interessantes e apresentam, nos seus enunciados, esse "espírito poético" que tão raro se encontra nas obras de Matemática. Lamentei, apenas, que o ilustre matemático não tivesse feito a menor referência ao famoso problema dos *três marinheiros*, incluído em muitos livros e que se encontra, até agora, sem solução.

— Príncipe magnânimo — respondeu Beremiz —, entre os problemas de Bháskara por mim citados não figura, na verdade, o problema dos *três marinheiros*. Omiti esse problema pela simples razão de não o conhecer senão por uma citação, vaga, incerta e duvidosa, e ignorar o seu enunciado rigoroso.

— Conheço-o perfeitamente — retorquiu o príncipe. — E teria grande prazer em recordar, agora, essa questão matemática que tem embaraçado tantos algebristas.

E o príncipe Cluzir Schá narrou o seguinte:

— Um navio que voltava de Serendibe,[1] trazendo grande partida de especiarias, foi assaltado por violenta tempestade. A embarcação teria sido destruída pela fúria das ondas se não fosse a bravura e o esforço de três marinheiros que, no meio da tormenta, manejaram as velas com extrema perícia. O comandante, querendo recompensar os denodados marujos, deu-lhes certo número de catis.[2] Esse número, superior a duzentos, não chegava a trezentos. As moedas foram colocadas numa caixa para que no dia seguinte, por ocasião do desembarque, o almoxarife as repartisse entre os três corajosos marinheiros. Aconteceu, porém, que, durante a noite, um dos marinheiros acordou, lembrou-se das moedas e pensou: “Será melhor que eu tire a minha parte. Assim não terei ocasião de discutir ou brigar com os meus amigos.” E, sem nada dizer aos companheiros, foi, pé ante pé, até onde se achava guardado o dinheiro, dividiu-o em três partes iguais, mas notou que a divisão não era exata e que sobrava um catil. “Por causa desta mísera moedinha é capaz de haver amanhã discussão e rixa. O melhor é jogá-la fora.” E o marinheiro atirou a moeda ao mar, retirando-se cauteloso. Levava a sua parte e deixava no mesmo lugar a que cabia aos companheiros. Horas depois o segundo marinheiro teve a mesma idéia. Foi à arca em que se depositara o prêmio coletivo e dividiu-o em três partes iguais. Sobrava uma moeda. Ao marujo, para evitar futuras dúvidas, veio à lembrança atirá-la ao mar. E dali voltou levando consigo a parte a que se julgava com direito. O terceiro marinheiro, ignorando, por completo, a antecipação dos colegas, teve o mesmo alvitre. Levantou-se de madrugada e foi, pé ante pé, à caixa dos catis. Dividiu as moedas que lá encontrou em três partes iguais; a divisão não foi exata. Sobrou um catil. Não querendo complicar o caso, o marujo atirou ao mar a moedinha excedente, retirou a terça parte para si e voltou tranquilo para o seu leito. No dia seguinte, na ocasião do desembarque, o almoxarife do navio encontrou um punhado de catis na caixa. Soube que essas moedas pertenciam aos três marinheiros. Dividiu-as em três partes iguais, dando a cada um dos marujos uma dessas partes. Ainda dessa vez a divisão não foi exata. Sobrava uma moeda, que o almoxarife guardou como paga do seu trabalho e de sua habilidade. É claro que nenhum dos marinheiros reclamou, pois cada um deles estava convencido de que já havia retirado da caixa a parte que lhe cabia do dinheiro. Pergunta-se, afinal: Quantas eram as moedas? Quanto recebeu cada um dos marujos?

O Homem que Calculava, notando que a história narrada pelo príncipe despertara grande curiosidade entre os nobres presentes, achou que devia dar solução completa ao problema. E assim falou:

— As moedas, uma vez que eram em número superior a 200 e não chegaram a 300, deviam ser a princípio em número de 241. O 1º marinheiro dividiu-as em três partes iguais; jogou um catil ao mar e levou um terço de 240, isto é, 80 moedas, deixando 160.

241	3
01	80

Divisão feita pelo 1.º marinheiro. Dividindo 241 por 3 dá 80 e sobra 1.

O 2º marinheiro encontrou, portanto, 160; jogou uma moeda no mar e dividiu as restantes (159) em três partes. Retirou uma terça parte (53) e deixou, de resto, 106. O 3.º marinheiro encontrou, na caixa, 106 moedas, dividiu esse resto em três partes iguais, deitando ao mar a moeda que sobrava. Retirou uma terça parte de 105, isto é, 35 moedas, deixando um resto de 70.

O almoxarife encontrou 70 moedas; retirou uma e dividiu as 69 restantes em três partes, cabendo, dessa forma, um acréscimo de 23 moedas a cada um dos marujos. A divisão foi, portanto, a seguinte:

1.º marujo (80+23)....................103
2.º marujo (53+23)......................76
3.º marujo (35+23)......................58
Almoxarife......................................1
Atiradas no mar...............................3

Total 241

160 : 3 = 53 quociente 1 resto

Divisão feita pelo 2º marinheiro. Dividindo 160 por 3 dá 53 e sobra 1.

106 : 3 = 35 quociente 1 resto

Divisão feita pelo 3º marinheiro. Dividindo 106 por 3 dá 35 e sobra 1.

Enunciada a parte final da solução[3] do problema dos três marinheiros, calou-se Beremiz.[4]

O príncipe de Lahore tirou da sua bolsa uma medalha de prata e, dirigindo-se ao calculista, assim falou:

— Pela interessante solução dada ao problema dos três marinheiros, vejo que és capaz de dar explicação aos enigmas mais intrincados que envolvem números e cálculos. Quero, pois, que me deslindes o significado desta medalha.

Esta peça — continuou o príncipe, segurando a medalha na ponta dos dedos — foi gravada por um artista religioso que viveu vários anos na corte de meu avô. Deve encerrar um enigma que até hoje magos e astrólogos não conseguiram decifrar. Numa das faces aparece o número cento e vinte e oito rodeado por sete pequenos rubis. Na outra face (dividida em quatro partes) apresenta quatro números:

$$7, 21, 2, 98$$

Nota-se que a soma desses quatro números é igual a 128. Mas qual é, na verdade, a significação dessas quatro parcelas em que foi dividido o número 128? Que relação poderá existir entre o número 7 e o número 128?

Recebeu Beremiz a estranha medalha das mãos do príncipe, examinou-a em silêncio, durante algum tempo, e depois assim falou:

— Esta medalha, ó Príncipe, foi gravada por um profundo conhecedor do misticismo numérico. Acreditavam os antigos no poder mágico de certos números. O *três* era divino; o *sete* era o número sagrado. Os sete rubis que vemos aqui revelam a preocupação do artista em relacionar o número 128 com o número 7. O número 128, como sabemos, é decomponível num produto de 7 fatores iguais a 2:

$$2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$$

Esse número 128 pode ser decomposto em quatro partes:

$$7, 21, 2 \text{ e } 98$$

que apresentam a seguinte propriedade:

A primeira aumentada de 7, a segunda diminuída de 7, a terceira multiplicada por 7 e a quarta dividida por 7 darão o mesmo resultado. Veja bem:

$$7 + 7 = 14$$
$$21 - 7 = 14$$
$$2 \times 7 = 14$$
$$98 \div 7 = 14$$

Essa medalha deve ter sido usada como talismã, pois contém relações que envolvem o número sete, que, para os religiosos, era um número sagrado.[5]

Mostrou-se o príncipe de Lahore encantado com a solução apresentada por Beremiz e ofereceu-lhe, como presente, não só a medalha dos sete rubis como uma bolsa com cem moedas de ouro.

O príncipe era generoso e bom.

Passamos, a seguir, para uma grande sala onde o poeta Iezid ia oferecer riquíssimo banquete aos seus convidados.

NOTAS

1 Nome antigo de Ceilão, atual Sri Lanka.

2 *Catil*, moeda; unidade de peso.

3 No enunciado de Bháskara, o número 79 resolve o problema.

4 Ver *Apêndice*: O Problema dos Três Marinheiros.

5 Ver *Apêndice*: O Problema do Número Quadripartido.

20. No qual Beremiz dá a segunda aula de Matemática. Número e sentido de número. Os algarismos. Os sistemas de numeração. Numeração decimal. O zero. Ouvimos novamente a voz da aluna invisível. O gramático Doreid cita um poeta.

Terminada a refeição, a um sinal do xeque Iezid, levantou-se o calculista. Era chegada a hora marcada para a segunda aula de Matemática. A "aluna invisível" já se achava à espera do professor.

Depois de saudar o príncipe e os xeques que palestravam no salão, Beremiz, acompanhado de uma escrava, encaminhou-se para o aposento já preparado para a lição.

Levantei-me também, e acompanhei o calculista, pois pretendia valer-me da autorização que me fora concedida e que me permitia assistir às preleções feitas à jovem Telassim.

Um dos presentes, o gramático Doreid, amigo do dono da casa, mostrou, também, desejo de ouvir a preleção de Beremiz, e seguiu-nos deixando a companhia do príncipe Cluzir Schá. Era Doreid homem de meia-idade, muito risonho, de rosto anguloso e expressivo.

Atravessamos uma riquíssima galeria forrada por lindos tapetes persas e, guiados por uma escrava circassiana de estonteante beleza, chegamos afinal à sala onde devia realizar-se a aula de Matemática. O primitivo reposteiro vermelho que ocultava Telassim fora substituído por outro, azul, que apresentava, no centro, grande heptágono estrelado.

Eu e o gramático Doreid sentamo-nos ao canto da sala, perto da janela que abria para o jardim. Beremiz acomodou-se, como da primeira vez, bem no centro, sobre amplo coxim de seda. A seu lado, sobre uma mesinha de ébano, repousava um exemplar do Alcorão. A escrava circassiana da confiança do xeque Iezid e uma outra, persa, de olhos doces e ridente, postaram-se junto à porta. O egípcio, encarregado da guarda pessoal de Telassim, encostou-se a uma coluna.

Depois da prece, Beremiz assim falou:

— Ignoramos, senhora, quando a atenção do homem foi despertada pela ideia do número. As investigações feitas pelos filósofos remontam aos tempos que já não mais se percebem através da neblina do passado.

Aqueles que estudam a evolução do número demonstram que, mesmo entre os homens primitivos, já era a inteligência humana dotada de faculdade especial a que chamaremos o "*sentido do número*" Essa faculdade permite reconhecer, de forma puramente visual, se uma reunião de objetos foi aumentada ou diminuída, isto é, se sofreu modificações numéricas.

Não se deve confundir o *sentido do número* com a faculdade de contar. Só a inteligência humana pode atingir o grau de abstração capaz de permitir a *conta*, ao passo que o sentido do número é observado entre muitos animais.

Alguns pássaros, por exemplo, na contagem dos ovos que deixam no ninho, podem distinguir *dois* de *três*. Certas vespas chegam a reconhecer os números *cinco* e *dez*.

Os selvagens de uma tribo do norte africano conheciam todas as cores do arco-íris e designavam cada cor por um nome. Pois bem, essa tribo não conhecia palavra correspondente a *cor*. Assim, também, muitos idiomas primitivos apresentam palavras para designar um, dois, três etc., e não encontramos, nesses idiomas, um vocábulo especial para designar *números*, de modo geral.

Mas qual é a origem do número?

Não sabemos, senhora, responder a essa pergunta.

Caminhando pelo deserto o beduíno avista, ao longe, uma caravana.

A caravana desfila vagarosamente. O camelos caminham transportando homens e mercadorias.

Quantos camelos são? Para atender a essa dúvida ele é levado a empregar o *número*.

São quarenta? São cem?

Para chegar ao resultado, precisa o beduíno pôr em exercício uma certa atividade, isto é, o beduíno precisa *contar*.

Para contar, ele relaciona cada objeto da coleção com um certo símbolo:

Um, *dois*, *três*, *quatro*...

Para dar um resultado da *conta*, ou melhor, o *número*, ele precisa inventar um *sistema de numeração*.

O mais antigo sistema de numeração é o *quinário*, isto é, sistema em que as unidades se agrupam de cinco em cinco.

Uma vez contadas cinco unidades, obtínhamos uma coleção denominada *quina*. Assim, 8 unidades seriam 1 quina e mais 3 e escreveríamos 13. Importa pois dizer que nesse sistema o segundo algarismo à esquerda valia cinco vezes mais do que se estivesse na primeira casa. O matemático diz, por isso, que a *base* desse sistema era 5.

Desse sistema ainda se encontram vestígios nos poemas antigos.

Adotavam os caldeus um sistema de numeração cuja base era o número 60.

0 0 0 0 0
0 0 0 0 0
0 0 0 0 0
0 0

No primitivo sistema *quinário*, o número de discos acima seria 32.

E assim, na antiga Babilônia, o símbolo

1.5

indicaria o número 65.

O sistema de base vinte também teve a preferência de vários povos.

No sistema de base vinte, o número 90 seria indicado pela notação

4.10

que seria lido: quatro vinte e mais dez.[1]

Surgiu, depois, senhora, o sistema de base 10, que se apresentava melhor para a expressão dos grandes números. A origem desse sistema é explicada pelo número total de dedos das duas mãos. Em certas classes de mercadores encontramos decidida preferência pela base *doze*, isto é, a contagem pela dúzia, meia dúzia, quarto de dúzia etc.

A dúzia apresenta, sobre a dezena, uma grande vantagem: o número 12 tem mais divisores do que o número 10.[2]

O sistema decimal é, entretanto, universalmente adotado. Desde o tuaregue,[3] que conta com os dedos, até o matemático, que maneja instrumentos de cálculo, todos contamos de dez em dez. Dadas as divergências profundas entre os povos, semelhante universalidade é surpreendente: não se pode jactar de outro tanto nenhuma religião, código moral, forma de governo, sistema econômico, princípio filosófico, artístico, nem a linguagem, nem mesmo alfabeto algum. Contar é um dos poucos assuntos em torno do qual os homens não divergem, pois o têm como a coisa mais simples e natural.

Observando, senhora, as tribos selvagens e a forma de agir das crianças, é óbvio que os dedos são base de nosso sistema numérico. Por serem 10 os dedos de ambas as mãos, começamos a contar até esse número e baseamos todo o nosso sistema em grupos de 10. Um pastor que necessitava estar seguro de que tinha as suas ovelhas ao anoitecer teve que exceder, ao contar o rebanho, a sua primeira dezena. Numerava as ovelhas que desfilavam por sua frente, dobrando para cada uma um dedo, e quando já tinha dobrado os dez dedos, atirava um calhau no chão limpo. Terminada a tarefa, os calhaus[4] representavam o número de "mãos completas" (dezenas) de ovelhas do rebanho. No dia seguinte podia refazer a conta comparando os montinhos de calhaus. Logo ocorreu a algum cérebro propenso ao abstrato que se podia aplicar aquele processo a outras coisas úteis, como as tâmaras, o trigo, os dias, as distâncias e as estrelas. E se, em vez de atirar calhaus, fazia marcas diferentes e duradouras, então já se tinha um sistema de *numeração escrita*.

Todos os povos adotaram na sua linguagem falada o sistema decimal; os outros sistemas foram abolidos e rejeitados. Mas a adaptação de tal sistema à numeração escrita só se fez muito lentamente.

Foi necessário o esforço de vários séculos para que a humanidade descobrisse uma solução perfeita para o problema de representação gráfica dos números.

Para representá-los imaginou o homem caracteres especiais chamados *algarismos*, representando cada um desses sinais os vocábulos: *um*, *dois*, *três*, *quatro*, *cinco*, *seis*, *sete*, *oito* e *nove*. Outros sinais auxiliares tais como *d*, *c*, *m* etc. indicavam que o algarismo que o acompanhava representava dezena, centena, milhar, etc. Assim, um matemático antigo representava o número 9.765 pela notação 9m7c6d5. Os fenícios, que foram os grandes mercadores da antiguidade, em vez de letras, usavam acentos: 9'"7"6'5.

Os gregos, a princípio, não adotaram esse sistema. A cada letra do alfabeto, acrescida de um acento, atribuíam um valor: assim, a primeira letra (alfa) era 1; a segunda letra (beta) era 2; a terceira (gama) era 3, e assim por diante, até o número 19. O 6 fazia exceção; esse número era representado por um sinal especial (estigma).[5]

Combinando, depois, as letras duas a duas, representavam, 20, 21, 22 etc.

O número 4.004 era representado, no sistema grego, por dois algarismos; o número 2.022, por três algarismos diferentes; o número 3.333 era representado por 4 algarismos que diferiam por completo uns dos outros.

Menor prova de imaginação deram os romanos, contentando-se com três caracteres I, V e X, para formarem os dez primeiros números e com os caracteres *L* (cinquenta), *C* (cem), *D* (quinhentos), *M* (mil), que combinavam, a seguir, com os primeiros.

Os números escritos em algarismos romanos eram, assim, de uma complicação absurda e prestavam-se tão mal às operações mais elementares da Aritmética, que uma simples adição era um tormento. Com a escrita púnica, a adição podia, na verdade, fazer-se no papel (ou antes, no papiro, porque não se inventara ainda o papel), mas era preciso dispor os números uns debaixo de outros, de tal sorte que os algarismos com o mesmo final ficassem na mesma coluna, o que obrigava a manter entre os algarismos os intervalos necessários para levar em conta a ausência de qualquer ordem que faltasse.

Estava a ciência dos números neste pé havia quatrocentos anos, quando um hindu, o qual a ciência não conservou o nome, imaginou empregar um caráter especial, o zero,[6] para marcar, num número escrito, a falta de toda unidade de ordem decimal, não efetivamente representada por algarismos. Graças a esta invenção, todos os sinais, índices e letras tornaram-se inúteis; ficaram apenas os nove algarismos e o zero. A possibilidade de escrever um número qualquer por meio de dez caracteres somente foi o primeiro milagre do zero.

Os geômetras árabes apoderaram-se da invenção do hindu e notaram que, acrescentando um zero à direita de um número, se elevava, automaticamente, a ordem decimal a que pertenciam seus diferentes algarismos. Fizeram do zero um operador, que efetua, instantaneamente, toda multiplicação por dez.

E ao caminhar, senhora, pela longa e luminosa estrada da Ciência, devemos ter sempre, diante de nós, o sábio conselho do poeta e astrônomo Omar Khayyám (que Alá o tenha em sua glória!). Eis o que ensinava Omar Khayyám:

> *Que a tua sabedoria não seja humilhação para o teu próximo. Guarda domínio sobre ti mesmo e nunca te abandones à tua cólera. Se esperas a paz definitiva, sorri ao destino que te fere; não firas a ninguém.*[7]

E aqui termino, senhora, à sombra de um poeta famoso, as pequenas indicações que pretendia desenvolver sobre a origem dos números e dos algarismos. Veremos na próxima aula (se Alá quiser!) quais as principais operações que podemos efetuar com os números e as propriedades que estes apresentam!

Calou-se Beremiz. Findara a segunda aula de Matemática.

Ouvimos, então, pela voz cristalina de Telassim, os seguintes versos:

> *Dá-me, ó Deus, forças para tornar o meu amor frutuoso e útil.*
> *Dá-me forças para jamais desprezar o pobre nem curvar o joelho ante o poder insolente.*
> *Dá-me forças para levantar o espírito bem alto, acima das futilidades de todo dia.*
> *Dá-me forças para que me humilhe, com amor, diante de ti.*
> *Não sou mais que um farrapo de nuvens de outono, vagando inútil pelo céu, ó Sol glorioso!*
> *Se é teu desejo e teu aprazimento, toma do meu nada, pinta-o de mil cores, irisa-o de ouro, fá-lo flutuar no vento, e espalha-o pelo céu em múltiplas maravilhas...*
> *E depois, se for teu desejo terminar à noite tal recreio, eu desaparecerei, esvaecendo-me em treva, ou talvez em um sorriso de alvorada, na frescura da pureza transparente.*[8]

— É admirável! — balbuciou, a meu lado, o gramático Doreid.

— Sim — concordei. — A Geometria é admirável.

— Qual Geometria, qual nada! — protestou o meu importuno vizinho. — Não vim aqui para ouvir essa história infindável de números e algarismos! Isso não me interessa! Qualifiquei de admirável a voz de Telassim!

E como eu o fitasse muito espantado, diante daquela franqueza rude, ele ajuntou, num trejeito malicioso:

— Sempre julguei que, ao permanecer nesta sala, durante a aula, pudesse ver o rosto da jovem. Dizem que ela é formosa como a quarta lua do mês de Ramadã! É uma verdadeira Flor do Islã!

E levantou-se, cantarolando baixinho:

> *Se estás ociosa e te quedas negligente, deixando o cântaro boiar sobre a água, vem, oh! vem para o meu lago!*
> *Verdeja na encosta a relva espessa, e as flores silvestres são sem conta.*
>
> *Os teus pensamentos voarão dos teus olhos negros, como os pássaros voam dos seus ninhos.*
> *E o teu véu cair-te-á aos pés.*
> *Vem, oh! vem para o meu lago!*[9]

Deixamos, com plácida tristeza, a sala cheia de luz.

Notei que Beremiz não trazia mais no dedo o anel que havia ganho na hospedaria no dia de nossa chegada. Teria perdido a sua joia de estimação?

A escrava circassiana olhava vigilantíssima, como se temesse o sortilégio de algum djim invisível.

NOTAS

[1] Observe o que ocorre no francês: *quatre-vingt-dix* e no inglês: *one score*, *two score* etc.

[2] Os divisores de 12 são seis, a saber: 12, 6, 4, 3, 2 e 1. Os divisores de 10 são apenas quatro: 10, 5, 2 e 1.

[3] Nômade do norte da África.

[4] *Calhau*, em latim, é *calculus*.

[5] Os gregos criaram dois outros sinais além do *estigma*. Para representar 90 empregavam o *copa* e para representar o número 900, o *sampi*.

[6] A palavra zero vem do árabe, *sifr*, vazio, que é tradução do sânscrito *súnia*.

O vocábulo *sifr* deu, propriamente, *cifra* em português, isto é, sinal numérico, algarismo. A forma zero vem dos vocábulos *zefro* e *zéfiro*, sendo esta última encontrada na obra de Leonardo Pisano, geômetra notável que viveu no século XII.

[7] Versos de Omar Khayyám, tradução de Otávio Tarquínio de Souza.

[8] Estes versos são de Tagore. Ver *Índice de Autores*.

[9] Versos de Tagore.

21. No qual começo a copiar livros de Medicina. Grandes progressos da aluna invisível. Beremiz é chamado a resolver um problema. A metade do "x" da vida. O rei Mazim e as prisões de Korassã. Um verso, um problema e uma lenda. A justiça do rei Mazim.

Nossa vida, na bela cidade dos califas, tornava-se, dia a dia, cada vez mais agitada e trabalhosa. O vizir Maluf encarregou-me de copiar dois livros do filósofo Rhazer.[1] São livros que encerram conhecimentos de Medicina. Leio em suas páginas indicações de alto valor sobre o tratamento do sarampo, a cura das enfermidades da infância, dos rins, das articulações e de mil outros males que afligem os homens. Preso por esse trabalho, fiquei impossibilitado de continuar a assistir às aulas de Beremiz em casa do cheique Iezid.

Pelas informações que ouvi do meu amigo calculista, a "aluna invisível", nas últimas semanas, fizera extraordinários progressos na ciência de Bháskara. Já conhecia quatro operações com os números, os três primeiros livros de Euclides e calculava as frações com numerador 1, 2 ou 3.[2]

Certo dia, ao cair da tarde, íamos iniciar a nossa modesta refeição, que consistia apenas em meia dúzia de pastéis de carneiro com cebolas, mel, farinha e azeitonas, quando ouvimos na rua grande tropel de cavalos e, em seguida, gritos, vozes de comando e pragas de soldados turcos.

Levantei-me um pouco assustado. Que teria acontecido? Tive a impressão de que a hospedaria fora cercada por tropa e que outra violência ia ser levada a efeito por ordem do intolerante chefe de Polícia.

A algazarra inesperada não perturbou Beremiz. Inteiramente alheio aos acontecimentos da rua, continuou, como se achava, a traçar, com um pedaço de carvão, figuras geométricas numa grande prancha de madeira. Extraordinário, aquele homem! As agitações mais graves, o perigo, as ameaças dos poderosos não conseguiam desviá-lo de seus estudos matemáticos. Se Asrail, o Anjo da Morte, surgisse ali, de repente, trazendo na lâmina do candjar a sentença do Irremediável, ele continuaria impassível a traçar curvas, ângulos e a estudar as propriedades das figuras, das relações e dos números.

O pequeno aposento em que nos achávamos foi invadido pelo velho Salim, que se fazia acompanhar de dois servos negros e um cameleiro. Mostravam-se todos assustadíssimos, como se algo muito grave tivesse ocorrido.

— Por Alá! — gritei impaciente. — Não perturbem o nosso calculista! Que algazarra é essa? Temos nova revolta em Bagdá? Desabou a mesquita de Colimã?

— Senhor — gaguejou o velho Salim, com voz trêmula de susto —, a escolta... Uma escolta de soldados turcos acaba de chegar!

— Pelo santo nome de Maomé! Que escolta é essa, ó Salim?

— É a escolta do poderoso grão-vizir Ibraim Maluf el Barad (que Alá o cubra de benefícios!). Os soldados vieram com ordem de levar, imediatamente, o calculista Beremiz Samir!

— Para que tanta bulha, ó chacais! — bradei, exaltado. — Isso não tem importância alguma! Naturalmente o vizir, nosso bom amigo e protetor, deseja resolver, com urgência, um problema de matemática, e precisa do valioso auxílio do nosso sábio calculista!

As minha previsões saíram certas como os cálculos mais perfeitos de Beremiz.

Momentos depois, levados pelos oficiais da escolta, chegamos ao palácio do vizir Maluf.

Encontramos o poderoso ministro no rico salão das audiências, acompanhado de três auxiliares de sua confiança. Tinha na mão uma folha cheia de números e cálculos.

Que novo problema seria aquele que viera perturbar tão profundamente o espírito do digno auxiliar do califa?

— O caso é grave, ó Calculista! — começou o vizir, dirigindo-se a Beremiz. — Acho-me, no momento, embaraçado com um dos mais complicados problemas que tenha visto em toda a minha vida. Quero informar-vos minuciosamente dos antecedentes do caso, pois só com vosso auxílio poderemos, talvez, descobrir uma solução.

E o vizir narrou o seguinte:

— Anteontem, poucas horas antes de nosso glorioso califa Al-Motacém, Emir dos Crentes, partir para Báçora (onde vai ficar três semanas), houve um incêndio na prisão. Durante muitas horas a violência do fogo ameaçou destruir tudo. Os detentos, fechados em suas celas, sofreram, por muito tempo, tremendo suplício, torturados por indizíveis angústias. Diante disso, o nosso generoso soberano determinou fosse reduzida à metade a pena de todos os condenados! A princípio não demos importância alguma ao caso, pois parecia muito simples ordenar se cumprisse, com todo o rigor, a sentença do rei. No dia seguinte, porém, quando a caravana do Príncipe dos Crentes já se achava longe, verificamos que a tal sentença de última hora envolvia problema extremamente delicado, sem a solução do qual não poderia ter perfeita execução.

— Entre os detentos — prosseguiu o ministro — beneficiados pela lei, existe um contrabandista de Báçora, chamado Sanadique, preso há quatro anos, condenado a prisão perpétua. A pena desse homem deve ser reduzida à metade. Ora, como ele foi condenado à prisão por toda a vida, segue-se que deverá agora, em virtude da lei, ser perdoado da metade da pena, ou melhor, da metade do tempo que ainda lhe resta viver. Viverá ele, ainda, certo tempo "x", desconhecido! Como dividir por dois um período de tempo que ignoramos? Como calcular a metade do "x" da vida?

Depois de meditar alguns minutos, Beremiz respondeu:

— Esse problema parece-me extremamente delicado, por envolver questão de pura Matemática e interpretação de lei. É um caso que interessa à justiça dos homens e à verdade dos números. Não posso discuti-lo, com os prodigiosos recursos da Álgebra e da Análise, antes de visitar a cela em que se acha o condenado Sanadique. É possível que o "x" da vida esteja calculado pelo Destino, na parede da cela do próprio condenado.

— Julgo infinitamente estranho o vosso alvitre — observou o vizir. — Não me entra na cabeça a relação que possa existir entre as pragas com que os loucos e os condenados adornam os muros das prisões e a resolução algébrica de tão delicado problema.

— Sidi! — atalhou Beremiz. — Encontram-se, muitas vezes, nas paredes das prisões, legendas interessantes, fórmulas, versos e inscrições que nos esclarecem o espírito e nos orientam os sentimentos de bondade e clemência. Conta-se que, certa vez, o rei Mazim, senhor da rica província de Korassã, foi informado de que um presidiário hindu escrevera palavras mágicas na parede de sua cela. O rei Mazim chamou um escriba diligente e hábil e determinou-lhe copiasse todas as letras, figuras, versos ou números que encontrasse nas paredes sombrias da prisão. Muitas semanas gastou o escriba para cumprir, na íntegra, a ordem extravagante do rei. Afinal, depois de pacientes esforços, levou ao soberano dezenas de folhas cheias de símbolos, palavras ininteligíveis, figuras disparatadas, blasfêmias de loucos e números inexpressivos. Como traduzir ou decifrar aquelas páginas repletas de coisas incompreensíveis? Um dos sábios do país, consultado pelo monarca, disse: "Rei! Essas folhas contêm maldições, pragas, heresias, palavras cabalísticas, lendas e até um problema de Matemática com cálculos e figuras."

Respondeu o rei: "As maldições, pragas e heresias não acordam a curiosidade que me vive no espírito. As palavras cabalísticas deixam-me indiferente; não acredito no poder oculto das letras nem na força misteriosa dos símbolos humanos. Interessa-me, entretanto, conhecer o verso, o problema e a lenda, pois são produções que nobilitam o homem e podem trazer consolo ao aflito, ensinamento ao leigo e advertência ao poderoso."

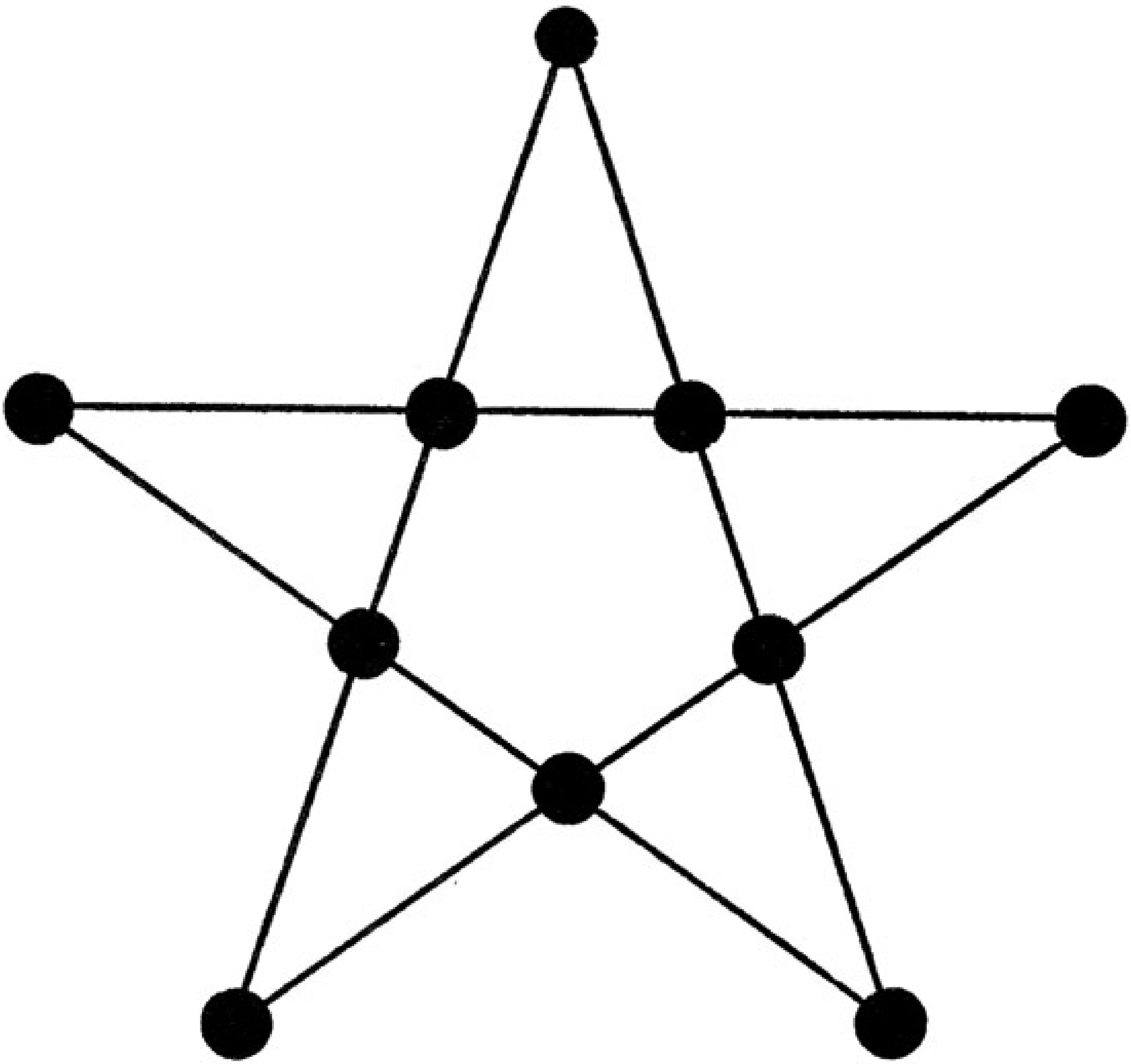
Diante do pedido do monarca, disse o ulemá:

— Eis os versos escritos por um dos condenados:

A felicidade é difícil porque somos muito difíceis em matéria de felicidade.
Não fales da tua felicidade a alguém menos feliz do que tu.
Quando não se tem o que se ama é preciso amar o que se tem.[3]

Eis agora o problema escrito a carvão na cela de um condenado.

Colocar 10 soldados em cinco filas, tendo cada fila 4 soldados.



A figura acima indica a única solução que pode ser dada ao seguinte problema: "Colocar 10 soldados em 5 filas, tendo cada fila 4 soldados."

Colocados sobre os lados e os vértices do pentágono estrelado, cada soldado figura em duas filas.

Esse problema, aparentemente impossível, tem solução muito simples, indicada pela figura, na qual aparecem cinco filas com 4 soldados em cada.

E a seguir o ulemá, para atender ao pedido do rei, leu a seguinte lenda:

"Conta-se que o jovem Tzu-Chang dirigiu-se um dia ao grande Confúcio e perguntou-lhe:

— Quantas vezes, ó esclarecido filósofo, deve um juiz refletir antes de sentenciar?

Respondeu Confúcio:

— Uma vez hoje; dez vezes amanhã.

Assombrou-se o príncipe Tzu-Chang ao ouvir as palavras do sábio. O conceito era obscuro e enigmático.

— Uma vez será suficiente — elucidou com paciência o Mestre — quando o juiz, pelo exame da causa, concluir pelo perdão. Dez vezes, porém, deverá o magistrado pensar, sempre que se sentir inclinado a lavrar sentença condenatória.

E concluiu, com sua incomparável sabedoria:

— Erra, por certo, gravemente, aquele que hesita em perdoar; erra, entretanto, muito mais ainda aos olhos de Deus, aquele que condena sem hesitar."

Admirou-se o rei Mazim ao saber que havia, nas paredes úmidas das enxovias, escrita pelos míseros detentos, tanta coisa cheia de beleza e curiosidade. Naturalmente, em meio de quantos amarguravam seus dias no fundo das celas, havia inteligentes e cultos. Determinou, pois, o rei, fossem revistos todos os processos de julgamento e verificou que inúmeras sentenças traduziam clamorosas injustiças. E assim, em consequência da descoberta feita pelo escriba, viram-se restituídos à liberdade muitos inocentes e foram reparadas dezenas de erros judiciários.

— Tudo isso pode ser muito interessante — retorquiu o vizir Maluf. — Mas é bem possível que nas prisões de Bagdá não se possa encontrar figuras geométricas, versos ou lendas morais. Quero ver, porém, o resultado a que pretendeis chegar. Vou permitir, portanto, a vossa visita à prisão.

NOTAS

1 O maior vulto da antiga ciência muçulmana. Em seus livros muitas gerações estudaram Medicina.

2 Os matemáticos árabes não dispunham de nomes para designar os termos das frações.

3 Mme. de Staël; Pitágoras; Corneille.

22. Que ocorreu durante a nossa visita às prisões de Bagdá. Como Beremiz resolveu o problema da metade do “x” da vida. O instante de tempo. A libertação condicional. Beremiz esclarece os fundamentos de uma sentença.

A grande prisão de Bagdá tinha o aspecto de uma fortaleza persa ou chinesa. Atravessava-se, ao entrar, pequeno pátio em cujo centro se via o famoso Poço da Esperança. Era ali que o condenado, ao ouvir a sentença, deixava cair, para sempre, todas as esperanças de salvação.

Ninguém poderá imaginar a vida de sofrimentos e misérias daqueles que eram atirados no fundo das masmorras da gloriosa cidade árabe.

A cela em que se achava o infeliz Sanadique estava localizada na parte baixa da prisão. Chegamos ao horripilante subterrâneo do presídio guiados pelo carcereiro e auxiliados por dois guardas. Um escravo núbio, agigantado, conduzia o grande archote cuja luz nos permitia observar todos os recantos da prisão.

Depois de percorrermos um corredor estreito, que mal dava passagem a um homem, descemos uma escadaria úmida e escura. No fundo do subterrâneo achava-se o pequeno calabouço onde fora encarcerado Sanadique. Ali não entrava a mais tênue réstia de luz. O ar pesado e fétido mal se podia respirar, sem náuseas e tonteiras. O chão estava coberto de uma camada de lama pútrida e não havia entre as quatro paredes nenhuma peça ou catre de que se pudesse servir o condenado.

À luz do archote que o hercúleo núbio erguia, vimos o desventurado Sanadique, seminu, a barba espessa e emaranhada, os cabelos em desalinho a lhe caírem pelos ombros, sentado sobre uma laje, as mãos e os pés presos a correntes de ferro.

Beremiz observou em silêncio, com vivo interesse, o desventurado Sanadique. Era inacreditável pudesse um homem resistir, com vida, durante quatro anos, àquela situação desumana e dolorosa!

As paredes da cela, cheias de manchas de umidade, achavam-se repletas de legendas e figuras — estranhos indícios de muitas gerações de infelizes condenados. Tudo aquilo Beremiz examinou, leu e traduziu com minucioso cuidado — parando de quando em vez para fazer cálculos que me pareciam longos e laboriosos. Como poderia o calculista, entre as maldições e blasfêmias, descobrir a metade do "x" da vida?

Grande foi a sensação de alívio que senti ao deixar a prisão sombria onde eram torturados os míseros detentos. Ao chegar de volta ao rico divã das audiências, apareceu-nos o grã-vizir Maluf rodeado de cortesãos, secretários e vários xeques e ulemás da corte. Aguardavam todos a chegada de Beremiz, pois queriam conhecer a fórmula que o calculista iria empregar para resolver o problema de metade da prisão perpétua.

— Estávamos à vossa espera, ó Calculista! — cortejou afável o vizir. — E peço-vos apresenteis, sem mais delonga, a solução do grande problema. Temos a maior urgência em fazer cumprir a sentença do nosso grande Emir!

Ao ouvir essa ordem, Beremiz inclinou-se respeitoso, fez o habitual salã e assim falou:

— O contrabandista Sanadique, de Báçora, preso há quatro anos na fronteira, foi condenado a prisão perpétua. Essa pena acaba, porém, de ser reduzida à metade por justa e sábia sentença do nosso glorioso califa Al-Motacém, Comendador dos Crentes, sombra de Alá na Terra!

Designamos por x o período da vida de Sanadique, período que vai do momento em que foi preso e condenado até o termo de seus dias. Sanadique foi, portanto, condenado a x anos de prisão, isto é, a prisão por toda a vida. Agora, em virtude da régia sentença, essa pena irá reduzir-se à metade. Se dividirmos o tempo x em vários períodos, importa dizer que a cada período de prisão deve corresponder período igual de liberdade.

— Perfeitamente certo! — concordou o vizir com um ar de inteligência. — Compreendo muito bem o seu raciocínio.

— Ora, como Sanadique já esteve preso durante quatro anos, é claro que deverá ficar em liberdade, durante igual período, isto é, durante quatro anos.

Com efeito: imaginemos que um mago genial pudesse prever o número exato de anos de vida de Sanadique e nos dissesse agora: "Esse homem, no momento em que foi preso, tinha apenas 8 anos de vida." Ora, nesse caso, teríamos o x igual a 8, isto é, Sanadique teria sido condenado a 8 anos de prisão, e essa pena ficaria, agora, reduzida a 4 anos. Como Sanadique já está preso há quatro anos, é claro que já cumpriu o total da pena e deve ser considerado livre. Se o contrabandista, pelas determinações do Destino, houver de viver mais de 8 anos, a sua vida (x maior que 8) poderá ser decomposta em três períodos: um de 4 anos de prisão (já decorrido), outro de 4 anos de liberdade e um terceiro que deverá ser dividido em duas partes iguais (prisão e liberdade). É fácil concluir que, para qualquer valor de x (desconhecido), o detento terá de ser posto imediatamente em liberdade, ficando livre durante quatro anos, pois tem absoluto direito a esse período de liberdade, conforme demonstrei, de acordo com a lei!

Findo esse prazo, ou melhor, terminado esse período, deverá voltar à prisão e ficar recluso apenas durante um tempo igual à metade do resto de sua vida.[1]

Seria fácil, talvez, prendê-lo durante um ano e conceder-lhe liberdade durante o ano seguinte; ficaria, graças a essa resolução, um ano preso e um ano solto, e passaria, desse modo, a metade de sua vida em liberdade — conforme manda a sentença do rei.

Tal solução, porém, só estaria certa se o condenado viesse a morrer no último dia de um de seus períodos de liberdade.

Imaginemos, com efeito, que Sanadique, depois de passar um ano na prisão, fosse solto e viesse a morrer, por exemplo, no quarto mês de liberdade. Dessa parte de sua vida (um ano e quatro meses) teria passado "um ano preso" e "quatro meses solto". Não estaria certo. Teria havido erro no cálculo. A sua pena não teria sido reduzida à metade!

Mas simples seria, portanto, prender Sanadique durante um mês e conceder-lhe o mês seguinte de liberdade. Tal solução poderá, dentro de um período menor, conduzir a erro análogo. E isso acontecerá (com prejuízo para o condenado) se ele, depois de passar um mês na prisão, não tiver, a seguir, um mês completo de liberdade.

Poderá parecer, direis, que a solução do caso consistirá, afinal, em prender Sanadique um dia e soltá-lo no dia seguinte, concedendo-lhe igual período de liberdade, e proceder assim até o termo da vida do condenado.

Tal solução não corresponderá, contudo, à verdade matemática, pois Sanadique — como é fácil entender — poderá ser prejudicado em muitas horas de liberdade. Basta para isso que ele venha a morrer horas depois de um dia de prisão.

Prender o condenado durante uma hora e soltá-lo a seguir, deixando-o em liberdade durante uma hora, e assim sucessivamente até a última hora da vida do condenado, seria solução acertada se Sanadique viesse a morrer no último minuto de uma hora de liberdade. Do contrário a sua pena não teria sido reduzida à metade.

A solução matematicamente certa, portanto, consistirá no seguinte:

Prender Sanadique durante um instante de tempo e soltá-lo no instante seguinte. É preciso, porém, que o tempo de prisão (o instante) seja infinitamente pequeno, isto é, indivisível. O mesmo há de dar-se com o período de liberdade a seguir.

Na realidade, tal solução é impossível. Como prender um homem num instante indivisível e soltá-lo no instante a seguir? Devemos, portanto, afastá-lo de nossas cogitações. Só vejo, ó Vizir, uma forma de resolver o problema: Sanadique será posto em liberdade condicional sob vigilância da lei. É essa a única maneira de prender e soltar um homem ao mesmo tempo![2]

Determinou o grão-vizir que fosse atendida a sugestão do calculista e ao infeliz Sanadique, no mesmo dia, concedida a "liberdade condicional" — fórmula que os jurisconsultos árabes passaram a adotar, frequentemente, em suas sábias sentenças.

No dia seguinte, perguntei que dados ou elementos de cálculos conseguira ele, afinal, colher nas paredes da prisão, durante a célebre visita; que motivos o teriam levado a dar tão original solução ao problema do condenado. Respondeu-me o calculista:

— Só quem já esteve, por alguns momentos sequer, entre os muros tenebrosos de uma enxovia, sabe resolver esses problemas em que os números são parcelas terríveis da desgraça humana.

NOTAS

1 Esse resto de vida será $x - 8$ (da vida x descontados os 8 anos já decorridos).

2 Ver no *Apêndice: O Problema da Metade do "x" da Vida*.

23. Do que sucedeu durante uma honrosa visita que recebemos. Palavras do príncipe Cluzir Schá. Um convite principesco. Beremiz resolve um problema. As pérolas do rajá. Um número cabalístico. Fica resolvida a nossa partida para a Índia.

O bairro humilde em que moramos assinalou hoje o seu primeiro dia glorioso na História.

Beremiz, pela manhã, recebeu inesperadamente a honrosa visita do príncipe Cluzir Schá.

Quando a aparatosa comitiva irrompeu pela rua, terraços e varandas encheram-se de curiosos. Mulheres, velhos e crianças admiravam, mudos e estarrecidos, o maravilhoso espetáculo.

Vinham na frente cerca de trinta cavaleiros montados em soberbos corcéis árabes com arreios tauxiados e gualdrapas de veludo bordado a prata; traziam turbantes brancos com elmos metálicos reluzindo ao sol, mantos e túnicas alvadias, largas cimitarras pendentes de cintas de couro lavrado. Precediam-nos estandartes com o escudo do príncipe — um elefante branco sobre fundo azul. Seguiam-se vários arqueiros e batedores, todos a cavalo.

Encerrando o cortejo surgiu o poderoso Marajá, acompanhado de dois secretários, três médicos e dez pajens. O príncipe trajava uma túnica escarlate, toda adornada com fios de pérolas. No turbante, de uma riqueza inaudita, cintilavam incontáveis safiras e rubis.

Quando o velho Salim viu a sua hospedaria receber aquela majestosa comitiva, foi tomado por um acesso de loucura. Atirou-se ao chão e começou a gritar:

— *Men ein?*[1]

Mandei que um aguadeiro que ali se achava, com ar de basbaque, arrastasse o alucinado amigo para o fundo do pátio, até que a calma voltasse a dominar-lhe o conturbado espírito.

A sala da hospedaria era pequena para conter os ilustres visitantes. Beremiz, maravilhado com a honrosa visita, desceu ao pátio a fim de recebê-los.

O príncipe Cluzir, ao chegar, com seu porte altamente senhoril, saudou o calculista com amistoso salã, e disse-lhe:

— O pior sábio é aquele que frequenta os ricos; o maior dos ricos é o que frequenta os sábios![2]

— Bem sei, senhor! — respondeu Beremiz —, que as vossas palavras inspira-as o mais arraigado sentimento de bondade. A pequena e insignificante parcela de ciência que consegui adquirir desaparece diante da infinita generosidade de vosso coração.

— A minha visita, ó Calculista — atalhou o príncipe —, é ditada mais pelo egoísmo do que pelo amor à ciência. Depois que tive o prazer de ouvi-lo em casa do poeta Iezid, pensei em oferecer-lhe algum cargo de prestígio em minha corte. Desejo nomeá-lo meu secretário ou diretor do Observatório de Délhi. Aceita? Partiremos dentro de poucas semanas para Meca e de lá para a Índia.

— Infelizmente, ó Príncipe generoso — respondeu Beremiz —, não posso afastar-me, agora, de Bagdá. Prende-me a esta cidade sério compromisso. Só poderei ausentar-me daqui depois que a filha do ilustre Iezid tiver aprendido as belezas da Geometria!

Sorriu o marajá e retorquiu:

— Se o motivo de sua recusa assenta nesse compromisso, creio que mui breve chegaremos a acordo.

O xeque Iezid disse-me que a jovem Telassim, dados os progressos feitos, dentro de poucos meses estará em condições de ensinar aos ulemás o famoso *problema das pérolas do rajá*.

Tive a impressão de que as palavras do nosso nobre visitante haviam surpreendido Beremiz. O calculista parecia meio confuso.

— E eu muito folgaria — alvitrou ainda o príncipe — em conhecer esse complicado problema que vem desafiando a sagacidade dos algebristas e que remonta, sem dúvida, a um dos meus gloriosos antepassados. Refiro-me ao chamado "problema das pérolas do rajá".

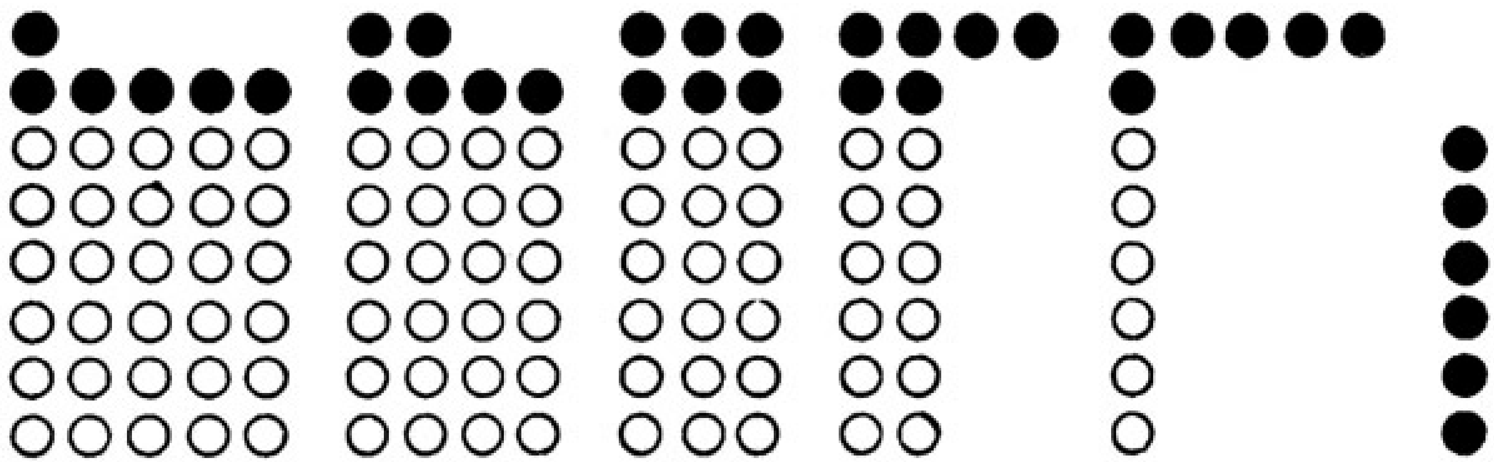
Beremiz, para atender à curiosidade do marajá, tomou da palavra e discorreu sobre o problema que interessava ao príncipe. E, no seu falar lento e seguro, disse o seguinte:

— Trata-se menos de um problema do que de mera curiosidade aritmética. É o seguinte o seu enunciado:

"Um rajá deixou às suas filhas certo número de pérolas e determinou que a divisão se fizesse do seguinte modo: a filha mais velha tiraria 1 pérola e um sétimo do que restasse; viria, depois, a segunda e tomaria para si 2 pérolas e um sétimo do restante; a seguir a terceira jovem receberia[3] pérolas e um sétimo do que restasse. E assim sucessivamente.

As filhas mais moças apresentaram queixa a um juiz, alegando que, por esse sistema complicado de partilha, elas seriam fatalmente prejudicadas.

O juiz que — reza a tradição — era hábil na resolução do problema, respondeu prontamente que as reclamantes estavam enganadas e que a divisão proposta pelo velho rajá era justa e perfeita.



Solução gráfica do famoso "problema das pérolas do rajá". Os discos pretos representam as pérolas que iam sendo sucessivamente retiradas pelas herdeiras. A 1.ª retirou uma e mais cinco; a segunda retirou duas e mais quatro; e assim por diante.

E tinha razão. Feita a partilha, cada uma das herdeiras recebeu o mesmo número de pérolas."

— Pergunta-se: Qual o número de pérolas? Quantas as filhas do rajá?

A solução para esse problema não oferece a menor dificuldade.

Vejamos.3

As pérolas eram em número de 36 e deviam ser repartidas por 6 pessoas.

A primeira tirou uma pérola e mais um sétimo de 35, isto é, 5; logo, tirou 6 pérolas e deixou 30.

A segunda, das 30 que encontrou, tirou 2 mais um sétimo de 28, que é 4; logo, tirou 6 e deixou 24.

A terceira, das 24 que encontrou, tirou 3 mais um sétimo de 21, ou 3. Tirou, portanto 6, deixando 18 de resto.

A quarta, das 18 que encontrou, tirou 4 e mais um sétimo de 14. E um sétimo de 14 é 2. Recebeu, também, 6 pérolas.

A quinta encontrou 12 pérolas; dessas 12 tirou 5 e um sétimo de 7, isto é, 1; logo, tirou 6.

A filha mais moça recebeu, por fim, as 6 pérolas restantes.

E Beremiz concluiu:

— Como vedes, o problema, embora engenhoso, nada tem de difícil. Chega-se à solução sem artifícios ou sutileza de raciocínio.

Nesse momento, a atenção do príncipe Cluzir Schá foi despertada por um número que se achava escrito cinco vezes na parede do quarto; 142.857.

— Que significação tem esse número? — perguntou.

— Trata-se — respondeu o calculista — de um dos números mais curiosos em Matemática. Ele apresenta, em relação aos seus múltiplos, coincidências interessantes.

Multipliquemo-lo por 2. O produto será:

$$142.857 \times 2 = 285.714$$

Vemos que os algarismos constitutivos do produto são os mesmos do número dado, em outra ordem. O 14 que se achava à esquerda transportou-se para a direita.

Efetuemos o produto do número 142.857 por 3:

$$142.857 \times 3 = 428.571$$

Ainda uma vez observamos a mesma singularidade: os algarismos do produto são, precisamente, os mesmo do número, alterada apenas a ordem. O 1 que se achava à esquerda passou para a direita, os outros algarismos lá ficaram, onde estavam.

A mesma coisa ocorre, ainda, quando o número é multiplicado por 4:

$$142.857 \times 4 = 571.428$$

Notemos, agora, o que vai ocorrer no caso da multiplicação por 5:

$$142.857 \times 5 = 714.285$$

O algarismo 7 deslocou-se da direita para a esquerda, os restantes permaneceram em seus lugares.

Observemos a multiplicação por 6:

$$142.857 \times 6 = 857.142$$

Feito o produto nota-se que o grupo 142 permutou, apenas, de posição com 857.

Uma vez chegados ao fator 7, impressiona-nos outra particularidade. O número 142.857 multiplicado por 7 dá como produto o número:

$$999.999$$

formado de seis noves!

Experimentemos multiplicar o número 142.857 por 8. O produto será:

$$142.857 \times 8 = 1.142.856$$

Todos os algarismos do número aparecem, ainda, no produto, com exceção do 7. O 7 do número primitivo foi decomposto em duas partes: 6 e 1. O algarismo 6 ficou à direita e o 1 foi para a esquerda completar o produto.

Vejamos agora o que acontece quando multiplicamos o número 142.857 por 9:

$$142.857 \times 9 = 1.285.713$$

Observemos com atenção esse resultado. O único algarismo do multiplicando que não figura no produto é o 4. Que teria acontecido com ele? Aparece decomposto em duas parcelas 1 e 3, colocados nos extremos do produto.

Do mesmo modo poderíamos verificar as singularidades que apresenta o número 142.857 quando multiplicado por 11, 12, 13, 15, 17, 18 etc.[4]

Eis por que o número 142.857 se inclui entre os números cabalísticos da Matemática. Ensinou-me o dervixe Nô-Elin...

— Nô-Elin! — repetiu, tomado de vivo júbilo, o príncipe Cluzir Schá. — É possível que tenha conhecido esse sábio?

— Conheci-o muito bem, ó Príncipe — respondeu Beremiz. — Com ele aprendi todos os princípios que hoje aplico nas pesquisas matemáticas.

— Pois o grande Nô-Elin — explicou o hindu — era amigo de meu pai. Certa vez, vencido pelo desgosto, por ter perdido um filho em combate, numa guerra injusta e cruel, afastou-se da cidade e nunca mais foi visto. Tenho feito várias pesquisas para encontrá-lo, mas até hoje não consegui obter a menor indicação sobre seu paradeiro. Cheguei, até, a admitir que ele tivesse perecido no deserto, devorado pelas panteras. Saberá, acaso, dizer-me onde poderei encontrar Nô-Elin?

Respondeu Beremiz:

— Quando parti para Bagdá deixei o sábio Nô-Elin em Khói, na Pérsia, recomendado a três amigos.

— Pois logo que eu regresse de Meca iremos à cidade de Khói buscar esse grande ulemá — respondeu o príncipe. — Quero levá-lo para o meu palácio! Poderá você, ó Calculista, auxiliar-me nessa grandiosa empresa?

— Senhor! — apoiou Beremiz. — Se é para prestar auxílio e fazer justiça àquele que foi meu guia e mestre, pronto estou para acompanhar-vos, se for preciso, até à Índia.

E, assim, por causa de 142.857, ficou resolvida a nossa viagem à Índia, a terra dos rajás.

O tal número é realmente cabalístico!

NOTAS

1 Para onde? (Para onde me vão levar?)

2 Verso árabe.

3 Ver no *Apêndice*.

4 Ver no *Apêndice*.

24. Reaparece Tara-Tir. O epitáfio de Diofante. O problema de Hierão. Livra-se Beremiz de um inimigo perigoso. Uma carta do capitão Hassã. Os cubos de 8 a 27. A paixão pelo cálculo. A morte de Arquimedes.

Impressão desagradável causou em meu espírito a ameaçadora presença de Tara-Tir. O rancoroso xeque, que estivera durante longo período ausente de Bagdá, tinha sido visto, ao cair da noite, em companhia de três sicários, rondando a rua em que morávamos.

Alguma cilada ele preparava, na certa, contra o incauto Beremiz.

Preocupado com seus estudos e problemas, não percebia o calculista o perigo que o acompanhava como uma sombra negra.

Falei-lhe da presença sinistra de Tara-Tir, e recordei-lhe os avisos cautelosos do xeque Iezid.

— Todos os receios são infundados — respondeu-me Beremiz, sem ponderar detidamente o meu aviso. — Não posso crer nessas ameaças. O que me interessa no momento é a solução completa de um problema que constitui o epitáfio do célebre geômetra grego Diofante:

“Eis o túmulo que encerra Diofante — maravilha de contemplar! Com artifício aritmético a pedra ensina a sua idade.

Deus concedeu-lhe passar a sexta parte de sua vida na juventude; um duodécimo, na adolescência; um sétimo, em seguida, foi escoado num casamento estéril. Decorreram mais cinco anos, depois do que lhe nasceu um filho. Mas este filho — desgraçado e, no entanto, bem-amado! — apenas tinha atingido a metade da idade do pai, morreu. Quatro anos ainda, mitigando a própria dor com o estudo da ciência dos números, passou-os Diofante, antes de chegar ao termo de sua existência."[1]

É possível que Diofante, preocupado em resolver os problemas indeterminados da Aritmética, não tivesse cogitado de obter a solução perfeita para o problema do rei Hierão, que não aparece indicado em sua obra.

— Que problema é este? — perguntei.

Beremiz contou-me o seguinte:

— Hierão, rei de Siracusa, mandou ao seu ourives certa porção de ouro para a confecção de uma coroa que ele desejava oferecer a Júpiter. Quando o rei recebeu a obra acabada, verificou que ela tinha o peso do metal precioso fornecido, mas a cor do ouro inspirou-lhe a desconfiança de que o ourives tivesse ligado prata ao ouro. Para pôr a limpo a dúvida, consultou Arquimedes, o grande geômetra.

Arquimedes, tendo verificado que o ouro perde, na água, 52 milésimos do seu peso, e a prata 99 milésimos, procurou saber o peso da coroa mergulhada na água e achou que a perda de peso era em parte devida a certa porção de prata adicionada ao ouro.

Conta-se que Arquimedes pensou muito tempo, sem poder resolver o problema proposto pelo rei Hierão. Um dia, estando no banho, descobriu o modo de solucioná-lo, e, entusiasmado, saiu dali a correr para o palácio do monarca, gritando pelas ruas de Siracusa: Eureca! Eureca! — o que quer dizer: Achei! Achei!

No momento em que assim conversávamos, veio visitar-nos o capitão Hassã Muarique, chefe da guarda do sultão. Era um homem corpulento, muito expedito e serviçal. Ouvira narrar o caso dos trinta e cinco camelos e não parava, por isso, de exaltar o talento e a habilidade do Homem que Calculava. Todas as sextas-feiras, depois de passar pela mesquita, ia visitar-nos.

— Nunca imaginei — declarou, depois de exprimir a sua profunda admiração — que a Matemática fosse tão prodigiosa. A solução do problema dos camelos deixou-me encantado.

Ao perceber o entusiasmo do turco, levei-o até a varanda da sala que dava para a rua, enquanto Beremiz procurava nova solução para o problema de Diofante, e lhe falei do perigo que corríamos sob a ameaça do odioso Tara-Tir.

— Lá está ele — apontei — junto à fonte. Os homens que o acompanham são assassinos perigosos. Ao menor descuido seremos apunhalados por esses bandidos.

— Pela honra de Amine![2] Que me diz?! — exclamou Hassã. — Eu não podia imaginar que tal ocorresse. Como pode um bandido perturbar a vida de um sábio geômetra? Pela glória do Profeta! Vou já resolver esse caso.

Voltei ao quarto, deitei-me e pus-me a fumar, tranquilo.

Uma hora depois recebi o seguinte recado de Hassã:

> “Tudo resolvido. Os três assassinos foram executados sumariamente. Tara-Tir apanhou 8 bastonadas, pagou multa de 27 cequins de ouro e foi intimado a deixar a cidade. Mandei-o, com uma escolta, para Damasco.”

Mostrei a carta do capitão turco a Beremiz. Graças à minha eficiente intervenção poderíamos, agora, viver tranquilos em Bagdá.

— É interessante — sentenciou Beremiz. — É realmente curioso! Essas linhas escritas pelo nosso bom amigo Hassã fazem recordar uma curiosidade numérica relativa aos números 8 e 27.

E como eu demonstrasse surpresa ao ouvir aquela observação, ele concluiu:

— Excluída a unidade, 8 e 27 são os únicos números de cubos iguais, também, à soma dos algarismos de seus cubos. Assim:

$$8^3 = 512$$
$$27^3 = 19.683$$

A soma dos algarismos de 512 é 8.

A soma dos algarismos de 19.683 é 27.[3]

— É incrível, meu amigo! — exclamei. — Preocupado com os cubos e quadrados, esqueceste que estavas ameaçado pelo punhal de um perigoso assassino!

— A Matemática, ó Bagdali — respondeu tranquilo —, prende-nos tanto a atenção que, às vezes, alheamo-nos de todos os perigos que nos rodeiam. Lembra-se de como morreu Arquimedes, o grande geômetra?

E, sem aguardar resposta, contou-me o seguinte e curioso episódio da História da Geometria:

— Quando a cidade de Siracusa foi tomada de assalto pelas forças de Marcelo, general romano, achava-se o geômetra Arquimedes absorto no estudo de um problema, para cuja solução havia traçado uma figura geométrica na areia. Ali se achava o geômetra, inteiramente esquecido das lutas, das guerras e da morte. Só a pesquisa da verdade é que lhe interessava. Um legionário romano encontrou-o e intimou-o a comparecer à presença de Marcelo. O sábio pediu-lhe esperasse algum tempo, para que pudesse concluir a demonstração que estava fazendo. O soldado insistiu e puxou-o pelo braço: “Veja onde pisa” — disse-lhe o geômetra. “Não me apague a figura!” Irritado por não ser imediatamente obedecido, o sanguinário romano, com um golpe de espada, prostrou sem vida o maior sábio do tempo. Marcelo, que havia dado ordens no sentido de ser poupada a vida de Arquimedes, não ocultou o pesar que sentiu ao saber da morte do genial adversário. Sobre a laje do túmulo que erigiu, mandou gravar uma esfera inscrita num cilindro, figura que lembrava um dos teoremas do célebre geômetra.

E Beremiz concluiu, acercando-se de mim e pousando a mão sobre o meu ombro:

— Não achas, ó Bagdali, que seria justo incluir o sábio siracusano entre os mártires da Geometria?

Que poderia eu responder?

O fim trágico de Arquimedes trouxe-me novamente à lembrança a figura indesejável e rancorosa de Tara-Tir, o pérfido invejoso.

Estaríamos, realmente, livres daquele sanguinário vendedor de sal? Não poderia ele voltar, mais tarde, da velha Damasco?

Junto à janela, os braços cruzados sobre o peito, Beremiz, com certo ar de tristeza, observava, descuidado, os homens que passavam apressados em direção ao mercado.

Achei interessante interferir em seus devaneios e arrancá-lo daquela nostalgia, e perguntei-lhe:

— Que é isso? Está triste? Sente saudades de sua terra ou está planejando novos cálculos?

E insisti, em tom de gracejo:

— Cálculos ou saudade?

— Ora, Bagdali — respondeu-me Beremiz, com seu imperturbável bom humor. — A saudade e o cálculo andam sempre entrelaçados. Já disse um dos nossos mais inspirados poetas:

A Saudade é calculada
Por algarismos, também:
Distância multiplicada
Pelo fator querer-bem.[4]

Não acredito, porém, que a saudade, depois de reduzida a uma fórmula, seja calculável com algarismos. Por Alá! Quando eu era menino ouvi, muitas vezes, minha mãe, encerrada no harém de nossa casa, cantarolar:

Saudade, velha canção
Saudade, sombra de alguém,
Que os tempos só levarão
Se me levarem também![5]

NOTAS

[1] Em linguagem algébrica esse problema pode ser traduzido por uma equação do 1.º grau com uma incógnita. Ver *Apêndice*.

[2] Mãe do profeta Maomé.

[3] Os números 17, 18 e 26 apresentam propriedades idênticas em relação aos algarismos de seus cubos, mas não são cubos.

[4] Trova de Manuel Bastos Tigre (1882-1957), poeta pernambucano de alta inspiração.

[5] Trova de Fernandes Soares, poeta paulista. Uma das figuras de maior destaque na poesia moderna do Brasil.

25. Vamos pela segunda vez ao palácio do rei. A estranha surpresa. Perigoso torneio de um contra sete. A restituição de misterioso anel. Beremiz recebe um tapete azul-claro. Versos que abalam um coração apaixonado.

Na primeira noite depois do Ramadã,[1] logo que chegamos ao palácio do califa fomos informados por um velho, nosso companheiro de trabalho, que o soberano preparava estranha surpresa para o nosso amigo Beremiz.

Aguardava-se grave acontecimento. O calculista ia ser arguido, em audiência pública, por sete matemáticos de fama, três dos quais haviam chegado, dias antes, do Cairo.

Que fazer? Allahur Akbar![2] Diante daquela ameaça procurei encorajar Beremiz, fazendo-lhe sentir que devia ter confiança absoluta em sua capacidade, tantas vezes comprovada.

O Calculista recordou-me um provérbio que ouvira de seu mestre Nô-Elin: "Quem não desconfia de si mesmo não merece a confiança dos outros!"

Sob pesada sombra de apreensões e tristeza entramos em palácio.

O grande e rutilante divã, profusamente iluminado, estava repleto de cortesãos e cheiques de renome.

À direita do califa achava-se o jovem príncipe Cluzir Schá, convidado de honra, que se fazia acompanhar de oito doutores hindus, ostentando roupagens vistosas de ouro e veludo, e exibindo garbosos turbantes de Caxemira. À esquerda do trono perfilavam-se os vizires, os poetas, os cádis e os elementos de maior prestígio da alta sociedade de Bagdá. Sobre um estrado, onde se viam vários coxins de seda, achavam-se os sete sábios que iam interrogar o calculista. A um gesto do califa o xeque Nurendim Barur tomou Beremiz pelo braço e conduziu-o, com toda solenidade, até a uma espécie de tribuna erguida ao centro do rico salão.

Um escravo negro agigantado fez soar três vezes pesado gongo de prata. Todos os turbantes se curvaram. Ia ter início a singular cerimônia. A minha imaginação, confesso, voejava por mundos alucinados.

Um imã tomou do Livro Santo e leu, numa cadência invariável, pronunciando lentamente as palavras, a prece do Alcorão:[3]

— Em nome de Alá, Clemente e Misericordioso!
Louvado seja o Onipotente, Criador de todos os mundos!
A misericórdia é em Deus o atributo supremo!
Nós Te adoramos, Senhor, e imploramos a Tua divina assistência!
Conduze-nos pelo caminho certo! Pelo caminho daqueles que são esclarecidos e abençoados por Ti!

Logo que a última palavra do imã se perdeu com o seu cortejo de ecos pelas galerias do palácio, o rei avançou dois ou três passos, parou e disse:

— Uallah! O nosso amigo e aliado, príncipe Cluzirehdin-Moubarec Schá, senhor de Lahore e Délhi, pediu-me que proporcionasse aos doutores de sua comitiva o ensejo de admirarem a cultura e a habilidade do geômetra persa, secretário do vizir Ibrahim Maluf. Seria desairoso deixar de atender a essa solicitação de nosso ilustre hóspede. E, assim, sete dos mais famosos ulemás do Islã vão propor ao calculista Beremiz questões que se relacionam com a ciência dos números. Se ele souber responder a todas as perguntas, receberá (assim o prometo), recompensa tal que o fará um dos homens mais invejados de Bagdá.

Vimos, nesse momento, o poeta Iezid aproximar-se do califa.

— Comendador dos Crentes! — disse o xeque. — Tenho em meu poder um objeto que pertence ao calculista. Trata-se de um anel encontrado em nossa casa por uma das escravas do harém. Quero restituí-lo ao calculista antes de ser iniciada a importantíssima prova a que vai submeter-se. É possível que se trate de um talismã e eu não desejo privar o calculista nem mesmo do auxílio dos recursos sobrenaturais.

E, depois de breve pausa, o nobre Iezid disse ainda:

— Minha encantadora filha Telassim, verdadeiro tesouro entre os tesouros da minha vida, pediu-me fosse permitido oferecer ao geômetra persa, seu mestre na Ciência dos Números, pequeno tapete por ela mesma bordado. Esse tapete, se o Emir dos Crentes consentir, seria colocado sob a almofada destinada ao calculista que vai ser arguído, hoje, pelos sete maiores sábios do Islã.

Permitiu o monarca que o anel e o tapete fossem, no mesmo instante, entregues ao calculista.

O próprio xeque Iezid, sempre transbordante de simpatia, fez a entrega da caixa. Logo a seguir, a um sinal do xeque, um mabid[4] adolescente apareceu trazendo nas mãos o pequeno tapete azul-claro que foi colocado sob a almofada verde de Beremiz.

— Tudo isso é feitiço, é baraka — insinuou, em voz baixa, um velhote risonho, magro, de túnica azul e cara chupada, que se achava bem atrás de mim. — Esse jovem calculista persa é bom conhecedor de baraka. Faz sortilégios! Esse tapetezinho azul-claro parece-me um tanto misterioso!

Mostrou-se Beremiz profundamente emocionado ao receber a joia e o tapete. Apesar da distância em que me achava, pude notar que alguma coisa de muito grave ocorria naquele momento. Ao abrir a pequenina caixa os seus olhos brilhantes se umedeceram. Soube depois que, juntamente com o anel, a piedosa Telassim havia colocado um papel no qual Beremiz leu emocionado:

"Ânimo. Confia em Deus. Rezo por ti."

E o tapete azul-claro?

Haveria, no caso, alguma baraka, como insinuava o velhinho alegre da túnica azul?

Nada de sortilégios.

Aquele pequeno tapete azul-claro, que aos olhos dos xeques e ulemás não passava de um simples presente, trazia, em caracteres cúficos (que só Beremiz saberia decifrar e ler) alguns versos que abalaram o coração do nosso amigo calculista. Esses versos, que eu, mais tarde, pude traduzir e decorar, haviam sido finamente bordados por Telassim, como se fossem arabescos, nas barras do pequenino tapete:

> *Eu te amo, querido. Perdoa-me o meu amor!*
> *Eu fui apanhada como um pássaro que se extraviou no caminho.*
> *Quando o meu coração foi tocado, ele perdeu o véu e ficou ao desabrigo. Cobre-o com piedade, querido, e perdoa o meu amor!*
> *Se não me podes amar, querido, perdoa a minha dor.*
> *E voltarei para o meu canto e ficarei sentada no escuro.*
> *E cobrirei com as mãos a nudez do meu recato.*[5]

Estaria o xeque Iezid a par daquela dupla mensagem de carinho e amor?

Não havia motivo para deter-me em tal ideia. Só mais tarde, como já disse, revelou-me Beremiz, o tal segredo.

Só Alá sabe a verdade!

Fez-se, no suntuoso recinto, profundo silêncio.

Ia ter início, no grande e rico divã do califa, o torneio de espírito e de cultura mais notável ocorrido até agora sob os céus do Islã.

Iallah!

NOTAS

1 Mês da quaresma muçulmana.

2 Deus é grande!

3 Entre os muçulmanos, qualquer cerimônia pública deve ser precedida de uma prece.

4 Servidor. Semiescravo.

5 Versos de Tagore.

26. No qual vamos encontrar um teólogo famoso. O problema da vida futura. O muçulmano deve conhecer o Livro Sagrado. Quantas palavras há no Alcorão? Quantas letras? O nome de Jesus é citado dezenove vezes. Um engano de Beremiz.

O sábio indicado para iniciar a arguição ergueu-se com austera solenidade. Era uma figura respeitável de octogenário, que me inspirava um respeito medroso. As longas barbas brancas, proféticas, caíam-lhe, fartas, sobre o peito largo.

— Quem é esse pobre ancião? — perguntei, em surdina, a um haquim oio-ien,[1] de rosto magro e bronzeado, que se achava ao meu lado.

— É o célebre ulemá Mohadebe-Abner-Rama — respondeu-me. — Dizem que conhece mais de quinze mil sentenças sobre o Alcorão. Ensina Teologia e Retórica.

As palavras do sábio Mohadebe, o teólogo, eram pronunciadas em tom estranho e surpreendente, sílaba por sílaba, como se o orador pusesse empenho em medir o som de sua própria voz:

— Vou interrogar-vos, ó Calculista, sobre assunto de indiscutível importância para a cultura de um muçulmano. Antes de estudar a ciência de um Euclides ou de um Pitágoras, deve o bom islamita conhecer profundamente o problema religioso, pois a vida não é concebível quando se projeta divorciada da Verdade e da Fé. Aquele que não se preocupa com o problema de sua existência futura, com a salvação de sua alma e desconhece os preceitos de Deus, os mandamentos, não merece o qualificativo de sábio. Quero, portanto, que nos apresenteis, neste momento, sem a menor hesitação, quinze indicações numéricas certas e notáveis sobre o Alcorão, o livro de Alá!

Entre essas quinze indicações deverão figurar:

1º) O número de suratas do Alcorão;
2º) O número exato de versículos;
3º) O número de palavras;
4º) O número de letras do Livro Incriado;
5º) O número exato dos profetas citados nas páginas do Livro Eterno.

E o sábio teólogo insistiu, fazendo ecoar bem forte a sua voz:

— Quero ouvir, enfim, neste momento, além das cinco indicações, por mim apontadas, mais outras dez relações numéricas certas e notáveis sobre o Livro Incriado! Uassalã!

Seguiu-se profundo silêncio. Aguardava-se, com ansiedade, a palavra de Beremiz. Com uma tranquilidade que causava assombro, o jovem calculista respondeu:

— O Alcorão, ó sábio e venerável Mufti,[2] compõe-se de 114 suratas, das quais 70 foram ditadas em Meca e 44 em Medina. Divide-se em 611 ashrs e contém 6.236 versículos, dos quais 7 do primeiro capítulo *Fatihat*[3] e 8 do último, *Os homens*. A surata maior é a segunda, que encerra 280 versículos. O Alcorão contém 46.439 palavras e 323.670 letras, cada uma das quais encerra dez virtudes especiais. O nosso Livro Sagrado cita o nome de 25 profetas. Issa, filho de Maria,[4] é citado 19 vezes. Há cinco animais, cujos nomes foram tomados para epígrafes de cinco capítulos: a vaca, a abelha, a formiga, a aranha e o elefante. A surata 102 tem por título: "A contestação dos números." É notável esse capítulo do Livro Incriado pela advertência que dirige, em seus cinco versículos, àqueles que se preocupam com disputas estéreis sobre números que não têm importância alguma para o progresso espiritual dos homens.

Neste ponto fez Beremiz ligeira pausa e logo acrescentou:

— Eis aí, para atender ao vosso pedido, as indicações numéricas tiradas do Livro de Alá! Houve, apenas, na resposta que acabo de formular, um engano que me apresso a confessar. Em vez de quinze relações, citei dezesseis!

— Por Alá! — murmurou, atrás de mim, o velhote da túnica azul. — Como pode um homem saber, de memória, tantos números e tantas contas! É fantástico! Sabe até quantas letras tem o Alcorão!

— Estuda muito — replicou, quase em segredo, o vizinho, que era gordo e tinha uma cicatriz no queixo. — Estuda muito e decora tudo. Já ouvi uns zunzuns a tal respeito.

— Decorar não adianta — cochichou, ainda, o velhinho da cara chupada. — Não adianta. Eu, por exemplo, não consigo decorar nem a idade da filha de meu tio!

Irritavam-me aquelas falinhas segredadas.

Mas o fato é que Mohadebe confirmou todas as indicações dadas pelo calculista; até o número de letras do Livro de Alá fora enunciado sem erro de uma unidade.

Disseram-me que esse douto teólogo Mohadebe era um homem pobre. E devia ser mesmo verdade. A muitos sábios priva Alá das riquezas, pois a sabedoria e a riqueza raramente aparecem juntas.

Beremiz havia vencido brilhantemente a primeira prova do terrível debate. Faltavam seis.

— Queira Alá! — pensei. — Queira Alá que tudo possa correr bem!

NOTAS

1 Médico oculista.

2 Jurisconsulto muçulmano.

3 Primeiro capítulo do Alcorão.

4 Jesus — Das cinco preces que os árabes proferem, todos os dias, uma delas é dedicada a Jesus.

27. No qual um sábio historiador interroga Beremiz. O geômetra que não podia olhar para o céu. A Matemática na Grécia. Elogio de Eratóstenes.

Solucionado o primeiro caso com todas as suas minúcias, o segundo sábio foi convidado a interrogar Beremiz. Esse ulemá era um historiador famoso: lecionara, durante vinte anos, em Córdova, e, mais tarde, por questões políticas, transferira-se para o Cairo, onde passou a residir sob a proteção do califa. Era um homem baixo, cujo rosto bronzeado parecia emoldurado por uma barba elíptica. Tinha os olhos nevoados, mortiços.

Eis como o sábio historiador se dirigiu ao calculista:

— Em nome de Alá, Clemente e Misericordioso! Enganam-se aqueles que apreciam o valor de um matemático pela maior ou menor habilidade com que efetua as operações e aplica as regras banais do cálculo! A meu ver, o verdadeiro geômetra é o que conhece, com absoluta segurança, o desenvolvimento e o progresso da Matemática através dos séculos. Estudar a História da Matemática é prestar homenagem aos engenhos maravilhosos que enalteceram e dignificaram as antigas civilizações, e que, pelo labor e pelo seu gênio, puderam desvendar alguns dos mistérios profundos da imensa natureza, conseguindo, pela ciência, elevar e melhorar a miserável condição humana. Cumpre-nos ainda, pelas páginas da História, honrar os gloriosos antepassados que trabalharam para a formação da matemática e apontar as obras que deixaram. Quero, pois, ó Calculista, interrogar-vos sobre um fato interessante da História da Matemática: “Qual foi o geômetra célebre que se suicidou de desgosto por não poder olhar para o céu?”

Beremiz susteve-se instantes e exclamou de golpe:

— Foi Eratóstenes, matemático oriundo da Cirenaica e educado, a princípio, em Alexandria e, mais tarde, na Escola de Atenas. Onde aprendeu as doutrinas de Platão!

E, completando a resposta, prosseguiu:

— Eratóstenes foi escolhido para dirigir a grande biblioteca da Universidade de Alexandria, cargo que exerceu até o termo de seus dias. Além de possuir invejáveis conhecimentos científicos e literários que o distinguiram entre os maiores sábios de seu tempo, era Eratóstenes poeta, orador, filósofo e — ainda mais — atleta completo. Basta dizer que conquistou o título excepcional de vencedor do pentatlo, as cinco provas máximas dos jogos olímpicos. A Grécia achava-se, nesse tempo, no período áureo de seu desenvolvimento científico e literário. Era a pátria dos aedos, poetas que declamavam, com acompanhamento musical, nas refeições e nas reuniões dos reis e dos chefes.

Não seria prolixidade dizer que entre os gregos de maior cultura e valor, era o sábio Eratóstenes considerado como o homem extraordinário que atirava o dardo, escrevia poemas, vencia os grandes corredores e resolvia problema de Astronomia. Eratóstenes legou à posteridade várias obras. Ao rei Ptolomeu III, do Egito, apresentou uma tábua de números primos feitos sobre uma prancha metálica, na qual os números múltiplos eram marcados por um pequeno furo. Deu-se, por isso, o nome de “Crivo de Eratóstenes” ao processo de que se utilizara o astrônomo grego para formar sua tábua. Em consequência de uma oftalmia, adquirida nas margens do Nilo, durante uma viagem, Eratóstenes ficou cego. Ele, que cultivava a Astronomia, achava-se impedido de olhar para o céu e de admirar a beleza incomparável do firmamento nas noites estreladas. A luz azulada de Al-Schira[1] jamais poderia vencer aquela nuvem negra que lhe encobria os olhos. Esmagado por tão grande desgraça e não podendo resistir aos desgostos que lhe causava a cegueira, o sábio e atleta suicidou-se, deixando-se morrer de fome, fechado em sua biblioteca!

O sábio historiador dos olhos mortiços voltou-se para o califa e declarou, depois de rápido silêncio.

— Considero-me plenamente satisfeito com a brilhante exposição histórica feita pelo jovem calculista persa. O único geômetra célebre levado ao suicídio foi, realmente, o grego Eratóstenes, poeta, astrônomo e atleta, amigo fraterno do famosíssimo Arquimedes de Siracusa. Iallah![2]

— Pela beleza de Selsebit![3] — exclamou o califa com entusiasmo. — Quanta coisa acabo de aprender! Esse grego notável que estudava os astros, escrevia poemas e cultivava o atletismo, merece a nossa sincera admiração. De hoje em diante, sempre que olhar para o céu, em noite estrelada, e avistar a incomparável Al-Schira, pensarei no fim trágico desse sábio geômetra que foi escrever o poema de sua morte no meio de um tesouro de livros que ele já não podia ler!

E pousando, com extrema cortesia, a sua mão larga sobre o ombro do príncipe, ajuntou com cativante naturalidade:

— Vamos ver, agora, se o terceiro arguidor conseguirá vencer o nosso calculista!

NOTAS

[1] Sirius. Alfa do Cão Maior. A estrela mais brilhante do céu. A Estrela Polar é denominada *Dsjudde*. (Nota de Malba Tahan.)

[2] Deus seja louvado.

[3] Fonte do Paraíso. Citada no Alcorão.

28. Prossegue o memorável torneio no divã do rei. O terceiro sábio interroga Beremiz. A falsa indução. Como se acha a raiz quadrada de 2.025. Beremiz demonstra que um princípio falso pode ser sugerido por exemplos verdadeiros.

O terceiro sábio que deveria interrogar Beremiz era o célebre astrônomo Abul-Hassã Ali,[1] de Alcalá, vindo de Bagdá a convite do califa Al-Motacém. Era alto, ossudo, e tinha o rosto semeado de rugas. Os seus cabelos eram ruivos e crespos. Exibia no pulso direito uma larga pulseira de ouro. Dizem que nessa pulseira se achavam assinaladas as doze constelações do Zodíaco.

O astrônomo Abul-Hassã, depois de saudar o rei e os nobres, dirigiu-se a Beremiz. A sua voz cava e larga rolava pesadamente.

— As duas respostas que acabaste de formular provam, ó Calculista Beremiz Samir, que tens sólida cultura. Falas da ciência na Grécia com a mesma facilidade com que contas as letras do Livro Sagrado! No desenvolvimento da ciência matemática, a parte mais interessante é a que indica a forma de raciocínio que nos conduz à verdade! Uma coleção de fatos tão longe está de ser uma ciência, como um monte de pedras de ser uma casa. Posso afirmar, igualmente, que as combinações sábias de fatos inexatos ou de fatos que não foram verificados, ao menos em suas consequências, se acham tão longe de formar uma Ciência quanto a miragem de substituir, no deserto, a presença real dos oásis. Deve a Ciência observar fatos para deles deduzir leis; com auxílio dessas leis prever outros fatos e melhorar as condições materiais da vida. Sim, tudo isto está certo. Como, porém, deduzir a Verdade? Apresenta-se, pois, a seguinte dúvida:

— É possível, em Matemática, tirar-se uma regra falsa de uma propriedade verdadeira? Quero ouvir a tua resposta, ó Calculista, ilustrada com um exemplo simples e perfeito.

Beremiz, consultando por largo espaço a reflexiva consciência, saiu do recolhimento de suas cogitações, respondendo:

— Admitamos que um algebrista curioso desejasse determinar a raiz quadrada de um número de quatro algarismos. Sabemos que a raiz quadrada de um número é outro número que, multiplicado por si mesmo, dá um produto igual ao número dado.

Vamos supor, ainda, que o algebrista, tomando, livremente, três números a seu gosto, destacasse os seguintes números: 2.025, 3.025 e 9.801:

Iniciemos a resolução do problema pelo número 2.025. Feitos os cálculos para esse número, o pesquisador acharia a raiz quadrada igual a 45. Com efeito: 45 vezes 45 é igual a 2.025. Ora, como se pode verificar, 45 é obtido pela soma 20 + 25, que são partes do número 2.025 quando decomposto ao meio por um ponto 20.25.

A mesma coisa o algebrista verificaria em relação ao número 3.025, cuja raiz quadrada é 55.[2] Convém notar que 55 é a soma de 30 + 25, parte do número 30.25. Idêntica propriedade é ainda verificada relativamente ao terceiro número, 9.801, cuja raiz quadrada é 99, isto é, 98 + 01. Diante desses três casos, o desprevenido algebrista seria levado a enunciar a seguinte regra:

"Para calcular-se a raiz quadrada de um número de quatro algarismos, divide-se esse número, por um ponto, em duas classes, com dois algarismos cada uma, somando-se as classes assim formadas. A soma obtida será a raiz quadrada do número dado."

Essa regra, visivelmente errada, foi tirada de três exemplos verdadeiros. É possível, em Matemática, chegar-se à verdade pela simples observação, fazendo-se mister, entretanto, cuidados essenciais para evitar a *falsa indução*.

O astrônomo Abul-Hassã, sinceramente encantado com a resposta de Beremiz, declarou que jamais ouvira sobre aquela importante questão da "falsa indução matemática" explicação tão simples e interessante.

A seguir, a um sinal do califa ergueu-se o quarto ulemá e preparou-se para formular a sua pergunta.

O seu nome era Jalal Ibn-Wafrid. Era poeta, filósofo e astrólogo. Em Toledo, sua terra natal, tornara-se muito popular como grande contador de histórias.

Jamais esquecerei a sua veneranda e esguia figura; nunca mais se me apagará da lembrança o seu olhar sereno e bondoso. Caminhou até a ponta do estrado e, dirigindo-se ao califa, assim falou:

— Para que a minha pergunta possa ser bem compreendida, preciso esclarecê-la contando uma antiga lenda persa.

— Apressa-te a contá-la, ó eloquente ulemá! — acudiu, logo, o califa. — Estamos ansiosos por ouvir as tuas sábias palavras que são, para os nossos ouvidos, como brincos de ouro.

O sábio toledano, com voz firme e cadenciada como o andar de uma caravana, narrou o seguinte:

NOTAS

[1] Nasceu em 1200 e morreu, em consequência da queda de um camelo, em 1280; deixou-nos a obra intitulada: *Tratado dos instrumentos astronômicos*.

[2] O produto 55 x 55 é igual a 3.025.

29. Vamos ouvir antiga lenda persa. O material e o espiritual. Os problemas humanos e transcendentes. A multiplicação famosa. O sultão reprime, com energia, a intolerância dos xeques islamitas.

Um poderoso rei, que dominava a Pérsia e as vastas planícies do Irã, ouviu certo dervixe dizer que o verdadeiro sábio devia conhecer, com absoluta perfeição, a parte espiritual e a parte material da vida.

Chamava-se Astor esse monarca, que era apelidado "O Sereno".

Que fez Astor, o rei? Vale a pena recordar a forma pela qual procedeu o poderoso monarca.

Mandou chamar os três maiores sábios da Pérsia, entregou a cada um deles dois dinares de prata e disse-lhes:

— Há neste palácio três salas iguais completamente vazias. Ficará, cada um de vós, encarregado de encher uma das salas, não podendo, entretanto, despender nessa tarefa quantia superior à que acabo de confiar a cada um.

O problema era realmente difícil. Cada sábio devia encher uma sala vazia, gastando apenas a insignificante quantia de dois dinares.

Partiram os sábios a fim de cumprir a missão de que haviam sido encarregados pelo caprichoso rei Astor.

Horas depois regressaram à sala do trono. O monarca, interessado pela solução do enigma, interrogou-os.

O primeiro, ao ser interrogado, assim falou:

— Senhor! Gastei dois dinares, mas a sala que me coube ficou completamente cheia. A minha solução foi muito prática. Comprei vários sacos de feno e com eles enchi o aposento do chão até o teto.

— Muito bem! — exclamou o rei Astor, o Sereno. — A vossa solução simples e rápida foi realmente muito bem imaginada. Conheceis, a meu ver, a "parte material da vida" e sob esse aspecto haveis de encarar todos os problemas que o homem deve enfrentar na face da terra.

A seguir, o segundo sábio, depois de saudar o rei, disse com certa ênfase:

— No desempenho da tarefa que me foi cometida, gastei apenas meio dinar. Quero explicar como procedi. Comprei uma vela e acendi-a no meio da sala vazia. Agora, ó Rei, podeis observá-la. Está cheia, inteiramente cheia de luz.

— Bravos! — concordou o monarca. — Descobriste uma solução brilhante para o caso! A luz simboliza a parte espiritual da vida. O vosso espírito acha-se, pelo que me é dado concluir, propenso a encarar todos os problemas da existência do ponto de vista espiritual.

Chegou, afinal, ao terceiro sábio, a vez de falar. Eis como foi resolvida por ele a singular questão:

— Pensei, a princípio, ó Rei dos Quatro Cantos do Mundo, em deixar a sala entregue aos meus cuidados exatamente como se achava. Era fácil ver que a aludida sala, embora fechada, não se encontrava vazia. Apresentava-se (é evidente) cheia de ar e de trevas. Não quis, porém, ficar na cômoda indolência enquanto os meus dois colegas agiam com tanta inteligência e habilidade. Resolvi agir também. Tomei, pois, de um punhado de feno da primeira sala, queimei esse feno na vela que se achava na outra, e com a fumaça que se desprendia enchi inteiramente a terceira sala. Será inútil acrescentar que não gastei a menor parcela da quantia que me foi entregue. Como podeis verificar, a sala que me coube está cheia de fumaça.

— Admirável! — exclamou o rei Astor. — Sois o maior sábio da Pérsia e talvez do mundo. Sabeis unir, com judiciosa habilidade, o material ao espiritual para atingir a perfeição.

Neste ponto o sábio toledano dava por finda a sua narrativa. Voltando-se, então, para Beremiz, assim falou, sorrindo com certo ar de brandura:

— É meu desejo, ó Calculista, verificar se, à semelhança do terceiro sábio da lenda, sois capaz de unir o material ao espiritual, e chegar a resolver, não só os problemas humanos, como também as questões transcendentes. A minha pergunta é, portanto, a seguinte: "Qual é a multiplicação famosa, apontada na História, multiplicação que todos os homens cultos conhecem, e na qual só figura um fator?"

Essa inopinada pergunta surpreendeu, com sobeja razão, os ilustres muçulmanos. Alguns não disfarçaram pequenos gestos de desagrado e impaciência. Um cádi obeso, ricamente trajado, que se achava a meu lado, resmungou irritado, desabridamente:

— Isso não tem sentido! É disparate!

Beremiz ficou largo tempo cogitando. Depois, logo que sentiu coordenadas as ideias, respondeu:

— A única multiplicação famosa, com um único fator, citada pelos historiadores, e que todos os homens cultos conhecem, é a multiplicação dos pães, feita por Jesus, filho de Maria! Nessa multiplicação só figura um fator: o poder milagroso da vontade de Deus.

— Muito bem respondido — declarou o toledano. — Certíssimo! É a resposta mais perfeita e completa que já ouvi até hoje! Esse calculista resolveu esmagadoramente a questão por mim formulada. Iallah!

Alguns muçulmanos, inspirados pela intolerância, entreolharam-se espantados. Houve sussurros. O califa clamou com energia:

— Silêncio! Veneremos Jesus, filho de Maria, cujo nome é citado dezenove vezes no Livro de Alá!

E, a seguir, dirigindo-se, com muita simpatia, ao quinto ulemá, ajuntou placidamente:

— Aguardamos a vossa pergunta, ó xeque Nascif Rahal! Sereis o quinto a arguir o calculista persa neste maravilhoso torneio de ciência e fantasia!

Ouvida essa ordem do rei, o quinto sábio ergueu-se como se fosse impulsionado por uma mola. Era um homem baixo, gordo, de cabeleira branca. Em vez de turbante usava, no alto da cabeça, pequeno gorro verde. Era muito conhecido em Bagdá, pois ensinava na mesquita e esclarecia, para os estudiosos, os pontos obscuros dos *hadiths*[1] do Profeta. Duas vezes eu já o avistara ao sair do *hamã*.[2] A sua maneira de falar era nervosa, arrebatada e um tanto agressiva.

— O valor de um sábio — começou, com tétrica entonação — só pode ser medido pelo poder de sua imaginação. Números tomados ao acaso, fatos históricos recordados com precisão e oportunidade, podem ter interesse momentâneo, mas ao cabo de algum tempo caem no esquecimento. Qual de vós ainda se lembra do número de letras do Alcorão? Há números, nomes, palavras e obras que são, por sua própria natureza e finalidade, condenados a irremediável olvido. É inteiramente vão o saber que não serve ao sábio.[3] Vou, portanto, certificar-me do valor e da capacidade do calculista persa, apresentando-lhe uma questão que não se relaciona com problema que possa exigir memória e habilidade de cálculo. Quero que o matemático Beremiz Samir nos conte uma lenda, ou uma simples fábula, na qual apareça uma divisão de 3 por 3 indicada, mas não efetuada, e outra de 3 por 2, indicada e efetuada sem deixar resto.

— Boa ideia — sussurrou o velhinho da túnica azul. — Boa ideia a desse ulemá da cabeleira branca! Vamos deixar esses cálculos, que ninguém entende, e ouvir uma lenda! Que maravilha! Vamos, afinal, ouvir uma lenda!

— Mas essa lenda terá contas, na certa — resmungou, baixinho, o haquim, levando a mão à boca. — No fim, o amigo vai ver: tudo acaba em cálculos, números e problemas!

Pouca sorte, a nossa!

— Queira Alá que isso não aconteça — proferiu o velhinho. — Queira Alá, o Al-uahhad![4]

Fiquei bastante apreensivo com a lembrança absurda do quinto ulemá da cabeleira branca. Como iria Beremiz inventar, naquele angustioso momento, uma lenda na qual aparecesse uma divisão indicada, mas não efetuada, e, mais ainda, uma divisão de 3 por 2 que não deixasse resto?

Ora, quem divide três por dois acha o resto um!

Pus de lado as minhas inquietações e confiei na imaginação do amigo. Na imaginação do amigo e na bondade de Alá!

Feito, por alguns instantes, fervoroso apelo à memória, o calculista iniciou a seguinte narrativa:

NOTAS

[1] Ver *Glossário*.

[2] Casa de banhos.

[3] Essa sentença é de Cícero. Muitos a repudiam. Acham que o sábio deve ser sempre um idealista e adquirir o saber pelo saber.

[4] O Liberal. Um dos noventa e nove epítetos que os árabes atribuem a Deus.

30. Beremiz, o calculista, narra uma lenda. O tigre sugere a divisão de 3 por 3. O chacal indica a divisão de 3 por 2. Como se calcula o quociente na Matemática do mais forte. O xeque do turbante verde elogia Beremiz. Como se acha o castigo de Deus em relação ao pecador.

Em nome de Alá, Clemente e Misericordioso!

O leão, o tigre e o chacal abandonaram, certa vez, a furna sombria em que viviam e saíram, em peregrinação amistosa, a jornadear pelo mundo, à procura de alguma região rica em rebanhos de tenras ovelhinhas.

Em meio de grande floresta o temível leão, que chefiava, naturalmente, o grupo, sentou-se, fatigado, sobre as patas traseiras, e erguendo a cabeça enorme soltou um rugido tão forte que fez tremer as árvores mais próximas.

O tigre e o chacal entreolharam-se assustados. Aquele rugido ameaçador com que o perigoso monarca, de juba escura e garras invencíveis, perturbava o silêncio da mata, traduzido para uma linguagem ao alcance dos outros animais, queria dizer, laconicamente, o seguinte: Estou com fome.

— A vossa impaciência é perfeitamente justificável! — observou o chacal dirigindo-se humildemente ao leão. — Asseguro-vos, entretanto, que conheço, nesta floresta, um atalho misterioso, do qual as brutas feras jamais tiveram notícia. Por ele poderíamos chegar, com facilidade, a um pequeno povoado, quase em ruínas, onde a caça é abundante, fácil, ao alcance das garras, e isenta de qualquer perigo!

— Vamos, chacal! — acudiu, de pronto, o leão. — Quero conhecer e admirar esse recanto adorável!

Ao cair da tarde, guiados pelo chacal, chegaram os viajantes ao alto de um monte, não muito elevado, donde se descortinava uma pequena e verdejante planície.

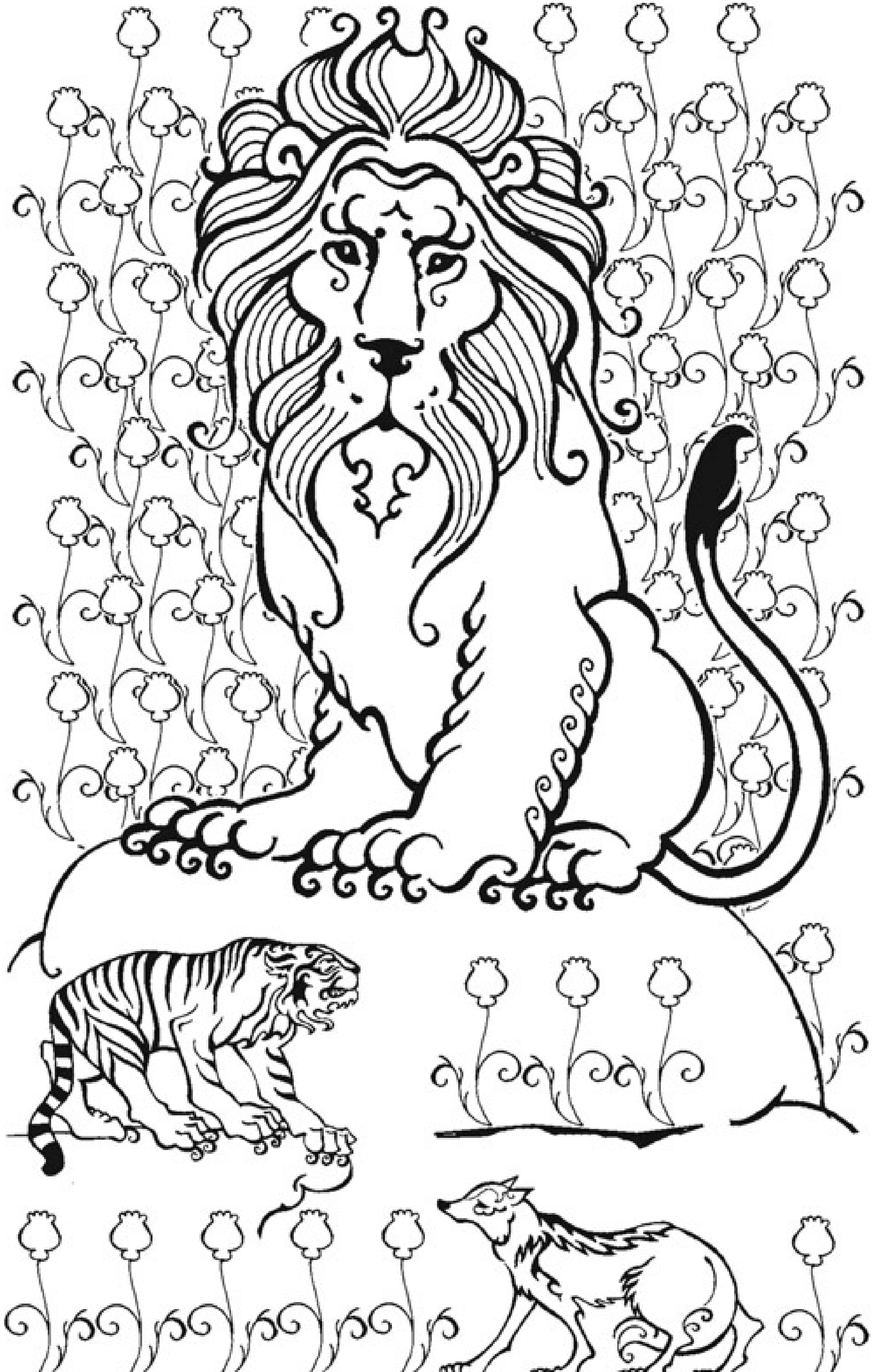
No meio dessa planície achavam-se, descuidados, alheios ao perigo que os ameaçava, três pacíficos animais: uma ovelha, um porco e um coelho.

Ao avistar a presa fácil e certa, o leão sacudiu a juba abundante num movimento de incontida satisfação. E com os olhos brilhantes de gula, voltou-se para o tigre e rosnou, em tom possivelmente amistoso:

— Ó tigre admirável! Vejo ali três belos e saborosos petiscos: uma ovelha, um porco e um coelho! Tu, que és vivo e esperto, deves saber, com talento, dividir três por três. Faze, pois, com justiça e equidade, essa operação fraternal: dividir três caças por três caçadores!

Lisonjeado com semelhante convite, o vaidoso tigre, depois de exprimir com uivos de falsa modéstia a sua incompetência e o seu desvalor, assim respondeu:

— A divisão que generosamente acabais de propor, ó Rei, é muito simples e pode fazer-se com relativa facilidade. A ovelha, que é o maior dos três petiscos, o mais saboroso e, sem dúvida, capaz de saciar a fome de um bando de leões do deserto, cabe-vos, de pleno direito. A ovelha será vossa, exclusivamente vossa! Aquele porquinho magro, sujo e despiciendo, que não vale uma perna da bela ovelha, ficará para mim, que sou modesto e com bem pouco me contento. E, finalmente, aquele minúsculo e desprezível coelho, de reduzidas carnes, indigno do paladar apurado de um rei, tocará ao nosso companheiro chacal, como recompensa pela valiosa indicação que há pouco nos proporcionou.



— Estúpido! Egoísta! — rugiu o pavoroso leão, tomado de fúria indescritível. — Quem te ensinou a fazer divisões dessa maneira, imbecil? Onde já viste uma partilha de três por três ser resolvida desse modo?

E, erguendo a pesadíssima pata, descarregou na cabeça do desprevenido tigre tão violenta pancada que o atirou morto a alguns passos de distância.

Em seguida, voltando-se para o chacal, que assistira estarrecido àquele trágico desfecho da divisão de três por três, assim falou:

— Meu caro chacal! Sempre fiz da tua inteligência o mais elevado conceito. Sei que és o mais engenhoso e esclarecido dos animais da floresta, e outro não conheço que possa levar-te a melhor na habilidade com que sabes resolver os mais inextricáveis problemas. Encarrego-te, pois, de fazer essa divisão simples e banal, que o estúpido do tigre (como acabaste de ver) não soube efetuar satisfatoriamente. Estás vendo, amigo chacal, aqueles três apetitosos animais, a ovelha, o porco e o coelho? Somos dois e os animais apetitosos são três. Pois bem: vais dividir os três por dois! Vamos: faze logo os cálculos, pois preciso saber qual é o quociente exato que a mim cabe!

— Não passo de humilde e rude servo de Vossa Majestade — ganiu o chacal, em tom humílimo de respeito. — Cumpre-me, pois, obedecer cegamente à ordem que acabo de receber. Vou, como se fora um sábio geômetra, dividir aqueles três animais por nós dois. Trata-se de uma simples divisão de três por dois! A divisão matematicamente certa e justa é a seguinte: a admirável ovelha, manjar digno de um soberano, cabe aos vossos reais caninos, pois é indiscutível que sois o rei dos animais; o belo bacorinho do qual estou ouvindo os harmoniosos grunhidos, deve caber também ao vosso real paladar, visto dizerem os entendidos que a carne de porco dá mais força e energia aos leões; e o saltitante coelho, com suas longas orelhas, deve ser, também, por vós saboreado a título de sobremesa, já que aos reis, por lei tradicional entre os povos, cabem sempre, como complemento dos opíparos banquetes, os manjares finos e delicados.

— Ó incomparável chacal! — exclamou o leão, encantado com a partilha que acabava de apreciar. — Como são harmoniosas e sábias as tuas palavras! Quem te ensinou esse artifício maravilhoso de dividir, com tanta perfeição e acerto, três por dois?

— A patada com que vossa justiça puniu, há pouco, o tigre arrogante e ambicioso, ensinou-me a dividir, com segurança, três por dois, quando, desses dois, um é leão, outro é chacal! Na Matemática do mais forte, penso eu, o quociente é sempre exato, e ao mais fraco, depois da divisão, nem o resto deve caber!

E, desse dia em diante, sugerindo sempre divisões dessa ordem, inspiradas na mais torpe sabujice, julgou o astucioso chacal que poderia viver tranquilo a sua vida de bajulador, a regalar-se com os sobejos que deixava o sanguinário leão.

Enganou-se.

Decorridas duas ou três semanas, o leão, irritado, faminto, desconfiou do servilismo do chacal e deu-lhe violenta patada, matando-o cruelmente.

Cabe aqui advertir.

É que a verdade deve ser dita, redita, e quarenta vezes repetida:

— O castigo de Deus está mais perto do pecador, do que as pálpebras estão dos olhos![1]

— Eis aí, ó judicioso ulemá Nascif — concluiu Beremiz —, eis aí, narrada com a maior simplicidade, uma fábula, na qual assinalamos duas divisões. A primeira foi uma divisão de *três* por *três*, que foi indicada, mas deixou de ser efetuada. A segunda foi uma divisão de *três* por *dois*, que foi efetuada sem deixar *resto*.

Ouvidas essas palavras do calculista, fez-se, no divã do rei, profundo silêncio. Aguardavam, todos, com vivo interesse, a apreciação, ou melhor, a sentença, do terrível arguidor.

O xeque Nascif Rahal, depois de ajeitar nervosamente o seu gorro verde e passar a mão pela barba, proferiu, com certo azedume, o seu julgamento:

— A fábula narrada atendeu, perfeitamente, às exigências por mim formuladas. Confesso que não a conhecia. É, a meu ver, das mais felizes. O famoso Esopo,[2] o grego, não faria melhor. É esse o meu parecer. Alá, porém, é mais sábio e mais justo.[3]

A narrativa de Beremiz, aprovada pelo xeque do gorro verde, agradou a todos os vizires e nobres muçulmanos. O príncipe Cluzir Schá, hóspede do rei, declarou em voz alta:

— Encerra essa fábula, que acabamos de ouvir, profunda lição de moral. Os vis bajuladores que rastejam nas cortes, sobre os tapetes dos poderosos, podem, a princípio, tirar algum proveito da subserviência, mas, no fim, são e serão sempre castigados, pois o castigo de Deus está sempre bem perto do pecador. Vou narrá-la aos meus amigos e auxiliares, logo que voltar para as terras de Lahore!

Do soberano árabe a narrativa de Beremiz mereceu o qualificativo de maravilhosa. Determinou, ainda, o grande emir, que a singular divisão de três por três fosse conservada nos arquivos do califado, pois a narrativa de Beremiz, por suas elevadas finalidades morais, merecia ser escrita com letras de ouro nas asas transparentes de uma borboleta branca do Cáucaso.[4]

A seguir teve a palavra o sexto ulemá.

O sexto sábio era um cordovês. Tinha vivido quinze anos na Espanha e de lá fugira por ter caído no desagrado de um príncipe muçulmano. Era homem de meia-idade, rosto redondo, fisionomia franca e risonha. Diziam os seus admiradores que ele era muito hábil em escrever versos humorísticos ou sátiras contra os tiranos. Durante seis anos trabalhara, no Iêmen, como simples mutavif.[5]

— Emir do Mundo! — começou o cordovês, dirigindo-se ao califa. — Acabo de ouvir, com verdadeiro encanto, essa admirável fábula denominada a divisão de três por dois. Ela encerra, a meu ver, grandes ensinamentos e profundas verdades. Verdades claras como a luz do sol na hora do addhur.[6] Vejo-me forçado a confessar que os preceitos maravilhosos tomam forma viva quando apresentados sob a forma de histórias ou de fábulas. Conheço uma lenda que não contém divisões, quadrados ou frações, mas que envolve um problema de Lógica, passível de resolução por meio de um raciocínio puramente matemático. Narrada a lenda, veremos como o exímio calculista poderá resolver o problema nela contido.

E o sábio cordovês contou o seguinte:

NOTAS

1 Sentença árabe. Citada no livro das *Mil e Uma Noites*.

2 Fabulista grego. Viveu seis séculos antes de Cristo. Era escravo.

3 A ética muçulmana recomenda que um bom juiz nunca deve proferir uma sentença sem acrescentar essa frase: "Alá, porém, é mais sábio e mais justo." Com isso, o magistrado assegura que só Deus julgaria melhor do que ele. Pura falta de modéstia!

4 Exagero fantasioso dos árabes.

5 Ver *Glossário*.

6 Meio-dia. Hora do sol mais intenso.

31. No qual o sábio cordovês conta uma lenda. Os três noivos de Dahizé. O problema dos cinco discos. Como Beremiz reproduziu o raciocínio de um noivo inteligente. Curiosa opinião de um xeque iemenita que não entendeu o problema.

Maçudi, o famoso historiador árabe,[1] nos vinte e dois volumes de sua obra, fala dos sete mares, dos grandes rios, dos elefantes célebres, dos astros, das montanhas, dos diferentes reis da China e de mil outras coisas, e não faz a menor referência ao nome de Dahizé, filha única do rei Cassim, o "Indeciso". Não importa. Apesar de tudo Dahizé não ficará esquecida, pois entre os manuscritos árabes foram encontrados mais de quatrocentos mil versos nos quais centenas de poetas louvam e exaltam os encantos e predicados da famosa princesa. A tinta gasta para descrever a beleza dos olhos de Dahizé, transformada em azeite, daria para iluminar a cidade do Cairo durante meio século.

— É exagero — direis.

Não admito o exagero, ó Irmãos dos Árabes! O exagero é uma forma disfarçada de mentir!

Passemos, porém, ao caso que nos interessa.

Quando Dahizé completou dezoito anos e vinte e sete dias de idade foi pedida em casamento por três príncipes cujos nomes a tradição perpetuou: Aradim, Benefir e Camozã.

O rei Cassim ficou indeciso. Como escolher, entre os três ricos pretendentes, aquele que deveria ser o noivo de sua filha? Feita a escolha, a consequência fatal seria a seguinte: ele, o rei, ganharia um genro, mas, em troca, adquiriria dois rancorosos inimigos! Péssimo negócio para um monarca sensato e cauteloso, que desejava viver em paz com seu povo e seus vizinhos.

A princesa Dahizé, consultada, afinal, declarou que se casaria com o mais inteligente dos seus apaixonados.

A decisão da jovem foi recebida com grande contentamento pelo rei Cassim. O caso, que parecia tão delicado, apresentava uma solução muito simples. O soberano árabe mandou chamar os cincos maiores sábios da corte e disse-lhes que submetessem os três príncipes a um rigoroso exame.

Qual seria, dos três, o mais inteligente?

Terminadas as provas, os sábios apresentaram ao monarca minucioso relatório. Os três príncipes eram inteligentíssimos. Conheciam profundamente Matemática, Literatura, Astronomia e Física; resolviam complicados problemas de xadrez, questões sutilíssimas de Geometria, enigmas arrevesados e charadas obscuras!

— Não encontramos artifício — concluíram os sábios — que nos permitisse chegar a um resultado definitivo a favor deste ou daquele!

Diante desse lamentável fracasso da ciência, resolveu o rei consultar um dervixe que tinha fama de conhecer a magia e os segredos do ocultismo.

O sábio dervixe disse ao rei:

— Só conheço um meio que vai permitir determinar o mais inteligente dos três! É a prova dos cinco discos!

— Façamos, pois, essa prova — concordou o rei.

Os três príncipes foram levados ao palácio. O dervixe, mostrando-lhes cinco discos de madeira muito fina, disse-lhes:

— Aqui estão cinco discos, dos quais dois são pretos e três brancos. Reparai que eles são do mesmo tamanho e do mesmo peso, e só se distinguem pela cor.

A seguir, um pajem vendou cuidadosamente os olhos dos três príncipes, deixando-os impossibilitados de distinguir a menor sombra.

O velho dervixe tomou então ao acaso três dos cinco discos, e pendurou-os às costas dos três pretendentes.

Disse, então, o dervixe:

— Cada um de vós tem preso às costas um disco cuja cor ignora! Sereis interrogados um a um. Aquele que descobrir a cor do disco que lhe coube por sorte, será declarado vencedor e casará com a linda Dahizé. O primeiro a ser interrogado poderá ver os discos dos dois outros concorrentes; ao segundo será permitido ver o disco do último. E este terá que formular a sua resposta sem ver coisa alguma! Aquele que der a resposta certa, para provar que não foi favorecido pelo acaso, terá que justificá-la por meio de um raciocínio rigoroso, metódico e simples. Qual de vós deseja ser o primeiro?

Respondeu prontamente o príncipe Camozã:

— Quero ser o primeiro!

O pajem retirou a venda que cobria os olhos do príncipe Camozã, e este pôde ver a cor dos discos que se achavam presos às costas de seus rivais.

Interrogado, em segredo, pelo dervixe, não foi feliz na resposta. Declarado vencido, foi obrigado a retirar-se do salão. Camozã viu dois dos discos e não soube dizer, com segurança, qual a cor de seu disco.

O rei anunciou em voz alta, a fim de prevenir os dois outros:

— O jovem Camozã acaba de fracassar!

— Quero ser o segundo — declarou o príncipe Benefir.

Desvendados os seus olhos, o segundo príncipe olhou para as costas do terceiro e último competidor e viu a cor do disco. Aproximou-se do dervixe e formulou, em segredo, a sua resposta.

O dervixe sacudiu negativamente a cabeça. O segundo príncipe havia errado, e foi logo convidado a deixar o salão.

Restava apenas o terceiro concorrente, o príncipe Aradim.

Este, logo que o rei anunciou a derrota do segundo pretendente, aproximou-se, com os olhos ainda vendados, do trono, e declarou, em voz alta, a cor exata de seu disco.

Concluída a narrativa, o sábio cordovês voltou-se para Beremiz e interrogou-o:

— O príncipe Aradim, para formular a resposta certa, arquitetou um raciocínio rigorosamente perfeito; esse raciocínio levou-o a resolver, com absoluta segurança, o problema dos cinco discos e conquistar a mão da formosa Dahizé.

Desejo, pois, saber:

1.º — Qual foi a resposta do príncipe Aradim?

2.º — Como descobriu ele, com a precisão de um geômetra, a cor de seu disco?

De cabeça baixa refletiu Beremiz durante alguns instantes. E depois, erguendo o rosto, passou a discorrer sobre o caso, com desembaraço e segurança. E disse:

— O príncipe Aradim, herói da curiosa lenda que acabamos de ouvir, respondeu, certamente, ao rei Cassim, pai de sua amada:

— O meu disco é branco!

E, ao proferir tal afirmação, tinha a certeza lógica de que estava dizendo a verdade:

— O meu disco é branco!

E qual foi o raciocínio que ele fez para chegar a essa conclusão certa e infalível?

O raciocínio do príncipe Aradim foi o seguinte:

“O primeiro pretendente, Camozã, antes de responder, pôde ver os discos que haviam sido colocados em seus rivais. Viu esses *dois* discos e errou.

Convém insistir: dos cinco discos (*três* brancos e *dois* pretos) Camorã viu dois e, ao responder, errou.

E errou por quê?

Errou porque respondeu por palpite, na incerteza.

Ora, se ele tivesse visto, em seus rivais, *dois discos pretos*, não teria errado, não ficaria em dúvida, e diria logo ao rei: "Vejo, em meus competidores, dois discos pretos, e, como só há dois discos pretos, o meu é forçosamente branco."

E, com essa resposta, teria sido declarado vencedor.

Mas Camozã, o primeiro noivo, errou. Logo os discos que ele viu não eram ambos *pretos*.

Ora, se esses discos, vistos por Camozã, não eram ambos pretos, só há duas hipóteses:

1.ª hipótese:

Camozã viu dois discos brancos.

2.ª hipótese:

Camozã viu um disco preto e outro branco.

De acordo com a 1.ª hipótese (refletiu Aradim) o meu disco *era branco*.

Resta, apenas, analisar a segunda hipótese:

Vamos supor que Camozã tenha visto um disco preto e outro branco.

Com quem estaria o disco preto?

Se o disco preto estivesse comigo, raciocinou Aradim, o segundo pretendente teria acertado.

Com efeito.

O segundo noivo da princesa teria feito o seguinte raciocínio:

— Vejo no terceiro competidor um disco preto; se o meu também fosse preto, o primeiro candidato (Camozã), ao ver dois discos pretos não teria errado. Logo, se ele errou (poderia concluir o segundo candidato) o meu disco é branco.

Mas, que ocorreu?

O segundo pretendente também errou. Ficou na dúvida. E ficou na dúvida por ter visto em mim (refletiu Aradim) não um disco preto, mas um disco branco.

Conclusão de Aradim:

De acordo com a 2.ª hipótese o meu disco também é branco.

— Foi esse — concluiu Beremiz — o raciocínio feito por Aradim para resolver, com segurança, o problema dos cinco discos, e declarar ao dervixe:

— O meu disco é branco!

O sábio cordovês, tomando, logo a seguir, da palavra, declarou ao califa, num ímpeto de irreprimível admiração, que a solução dada por Beremiz ao problema dos cinco discos havia sido completa e brilhantíssima.

O raciocínio, formulado com clareza e simplicidade, apresentava-se impecável para o geômetra mais exigente.

Assegurou, ainda, o cordovês, que as pessoas ali presentes no rico divã do rei, haviam, em sua totalidade, compreendido o problema dos cinco discos, e que seriam capazes de repeti-lo, mais tarde, para qualquer caravaneiro do deserto.

Um xeque iemenita, que se achava na minha frente, sentado numa almofada vermelha, tipo moreno, mal-encarado, cheio de joias, murmurou a um amigo, oficial da corte, que se achava ao seu lado:

— Está ouvindo, capitão Sayeg? Afirma esse pândego, lá de Córdova, que todos nós aqui entendemos essa história de disco preto e disco branco. Duvido muito. Eu, por mim, confesso: não entendi nada!

E acrescentou:

— Só mesmo um dervixe cretino teria essa ideia aloucada de pregar discos pretos e brancos nas costas dos três noivos. Não acha? Não seria mais prático promover uma corrida de camelos no deserto? O vencedor seria o escolhido e estaria tudo acabado. Não acha?

O capitão Sayeg não respondeu. Parecia não dar a menor atenção ao iemenita de poucas luzes que achava acertado resolver o problema sentimental com corridas de camelos no deserto.

O califa, com ar afável e distinto, declarou Beremiz vencedor da sexta e penúltima prova do concurso.

Teria o nosso amigo calculista o mesmo êxito na prova final? Seria coroado com o mesmo brilhantismo?

Ora, só Alá sabe a verdade!

Mas, afinal, as coisas pareciam correr à medida dos nossos desejos.

NOTA

[1] Ver *Índice de Autores*.

32. Como foi Beremiz interrogado por um astrônomo libanês. O problema da pérola mais leve. O astrônomo cita um poeta em homenagem ao calculista.

Chamava-se Mohildin Ihaia Banabixacar, geômetra e astrônomo, uma das figuras mais extraordinárias do Islã, o sétimo e último sábio que devia arguir Beremiz. Nascido no Líbano, tinha o nome escrito em cinco mesquitas e seus livros eram lidos até pelos rumis.[1] Seria impossível encontrar-se, sob o céu do Islã, inteligência mais possante e cultura mais sólida e vasta.

O erudito Banabixacar, o Libanês,[2] na sua linguagem clara e impecável, assim falou, com bonomia sorridente:

— Sinto-me, realmente, encantado com o que tive oportunidade de ouvir. O ilustre matemático persa acaba de demonstrar, várias vezes, a pujança de seu incomparável talento. Gostaria, também, colaborando neste brilhante torneio, de oferecer ao calculista Beremiz Samir interessante problema que aprendi, quando ainda moço, de um sacerdote budista que cultivava a Ciência dos Números.

Acudiu o califa, vivamente interessado:

— Ouviremos, ó Irmão dos Árabes, com o máximo prazer, a vossa arguição. Espero que o jovem persa, que até agora se tem mantido inabalável nos domínios do Cálculo, saiba resolver a questão formulada pelo velho budista (Alá se compadeça desse idólatra!).[3]

Percebendo o sábio libanês que sua inesperada proposta havia despertado a atenção do rei, dos vizires e dos nobres muçulmanos, assim falou, dirigindo-se serenamente ao Homem que Calculava:

— A esse problema caberia perfeitamente denominação de "problema da pérola mais leve". Tem o seguinte enunciado:

"Um mercador de Benares, na Índia, dispunha de oito pérolas iguais — na forma, no tamanho e na cor. Dessas oito pérolas, sete tinham o mesmo peso; a oitava, entretanto, era um pouquinho mais leve que as outras. Como poderia o mercador descobrir a pérola mais leve e indicá-la, com toda segurança, usando a balança apenas duas vezes, isto é, efetuando apenas duas pesagens? É esse o problema, ó Calculista! Queira Alá inspirar-te a solução mais simples e mais perfeita!

Ao ouvir o enunciado do problema das pérolas, um xeque, de cabelos brancos, com largo colar de ouro, que se achava ao lado do capitão Sayeg, murmurou, em voz baixa:

— Que belíssimo problema! Esse sábio libanês é um monstro! Glória ao Líbano, o País dos Cedros!

Beremiz Samir, depois de refletir durante breves instantes, assim falou, com voz remansada e firme:

— Não me parece difícil ou obscuro o problema budista da pérola mais leve. Um raciocínio bem encaminhado pode revelar-nos, desde logo, a solução.

Vejamos: Tenho oito pérolas iguais. Iguais na forma, na cor, no brilho e no tamanho. Rigorosamente iguais, diríamos assim. Alguém nos assegurou que, entre essas oito pérolas, destaca-se uma que é um pouquinho mais leve do que as outras sete, e que essas outras sete apresentam o mesmo peso. Para descobrir a mais leve só há um meio. É usar uma balança. E deve ser, para o caso das pérolas, uma balança delicada e fina, de braços longos e pratos bem leves. A balança deve ser *sensível*. E mais ainda. A balança deve ser exata. Tomando as pérolas duas a duas e colocando-as na balança (uma em cada prato), eu descubro, é claro, qual a pérola mais leve; mas se a pérola mais leve for uma das duas últimas eu serei obrigado a efetuar quatro pesagens. Ora, o problema exige que a pérola mais leve seja descoberta e determinada com duas pesagens apenas — qualquer que seja a posição por ela ocupada. A solução que me parece mais simples é a seguinte:

— Dividamos as pérolas em três grupos. E chamemos A, B e C esses grupos.

O grupo *A* terá três pérolas; o grupo *B* terá, também, três pérolas; o terceiro grupo *C* será constituído pelas duas restantes. Com duas pesagens devo apontar com segurança, sem possibilidade de erro, qual a pérola mais leve, sabendo que sete são iguais em peso.

Levemos os grupos *A* e *B* para a balança e coloquemos um grupo em cada prato (estamos, assim, efetuando a primeira pesagem).

Duas hipóteses podem ocorrer:

1.ª hipótese — Os grupos *A* e *B* apresentam pesos iguais.

2.ª hipótese — Os grupos A e B apresentam pesos desiguais, sendo um deles (o A, por exemplo) mais leve.

Na *primeira hipótese* (A e B com o mesmo peso) podemos garantir que a pérola mais leve não pertence ao grupo A, nem figura no grupo B. A pérola procurada é uma das duas que formam o grupo C.

Tomemos, pois, essas duas pérolas que formam o grupo C e levemo-las para a balança e ponhamos uma em cada prato (segunda pesagem). A balança indicará qual a mais leve, que fica, assim, determinada.

Na *segunda hipótese* (A sendo mais leve do que B) é claro que a pérola mais leve pertence ao grupo A, ou melhor, a pérola mais leve é uma das três pérolas do grupo menos pesado. Tomemos, então, duas pérolas quaisquer do grupo A e deixemos a outra de lado. Levemos essas duas pérolas à balança e pesemo-las (segunda pesagem). Se a balança ficar em equilíbrio, a terceira pérola (que ficara de lado) é a mais leve. Se houver desequilíbrio, a pérola mais leve estará no prato que subiu.

— Fica assim, ó Príncipe dos Crentes — rematou Beremiz —, resolvido o *problema da pérola mais leve*, formulado por ilustre sacerdote budista e aqui apresentado pelo nosso hóspede geômetra libanês.

O astrônomo Banabixacar, o Libanês, classificou de impecável a solução apresentada por Beremiz, e rematou a sua sentença nos seguintes termos:

— Só um verdadeiro geômetra poderia raciocinar com tanta perfeição. A solução que acabo de ouvir, em relação ao problema da *pérola mais leve*, é um verdadeiro poema de beleza e simplicidade.

E para homenagear o calculista o velho astrônomo do país dos cedros proferiu os seguintes versos:

Se uma rosa de amor tu guardaste,
Bem no teu coração;
Se a um Deus supremo e justo endereçaste
Tua humilde oração;
Se com a taça erguida
Cantaste, um dia, o teu louvor à vida,
Tu não viveste em vão...

Beremiz agradeceu emocionado, inclinando ligeiramente a cabeça e levando a mão direita à altura do coração. Os versos que ele acabara de ouvir eram de um poeta persa, que foi também geômetra e astrônomo: Omar Khayyám. (Que Alá o tenha em sua glória!)

Sim, por Alá! Que beleza de Omar Khayyám. “Tu não viveste em vão!”...

NOTAS

[1] Cristãos

[2] Eis como Lamartine, *Viagem ao Oriente*, II vol., pág. 535, se referiu aos libaneses: “Trazem as armas da Fé nos corações e as armas da luta em seus braços.” Cf. Tanus Jorge Bastani, *O Líbano e os Libaneses no Brasil*, 1945, pág. 58.

[3] Para um crente do Islã o budista é incluído entre os idólatras. E, por se tratar de um sábio, o rei pede (para esse budista) a misericórdia de Deus.

33. No qual o califa Al-Motacém oferece ouro e palácios ao calculista. A recusa de Beremiz. Um pedido de casamento. O problema dos olhos pretos e azuis. Como Beremiz determinou, pelo cálculo, a cor dos olhos de cinco escravas.

Terminada a exposição feita por Beremiz sobre os problemas propostos pelo sábio libanês, o sultão, depois de conferenciar em voz baixa com dois de seus conselheiros, assim falou:

— Pela resposta dada, ó Calculista, a todas as perguntas, fizeste jus ao prêmio que te prometi. Deixo, portanto, à tua escolha: queres receber vinte mil dinares de ouro ou preferes possuir um palácio em Bagdá? Desejas o governo de uma província ou ambicionas o cargo de vizir na minha corte?

— Rei generoso! — respondeu Beremiz profundamente emocionado. — Não ambiciono riquezas, títulos, homenagens e regalos porque sei que os bens materiais nada valem; a fama que pode advir dos cargos de prestígio não me seduz, pois o meu espírito não sonha com a glória efêmera do mundo. Se é vosso desejo tornar-me, como dissestes, invejado por todos os muçulmanos, o meu pedido é o seguinte: Desejo casar-me com a jovem Telassim, filha do xeque Iezid Abud-Hamid.

O inesperado pedido formulado pelo calculista causou indizível assombro. Percebi, pelos rápidos comentários que pude ouvir, que todos os muçulmanos que ali se achavam não tinham mais dúvida alguma sobre o estado de demência de Beremiz.

— É um louco, esse calculista! — murmurou, atrás de mim, o velhote magro, de túnica azul. — É um louco! Despreza a riqueza, rejeita a glória, para casar-se com uma jovem que ele nunca viu!

— Esse moço está alucinado — concordou o homem da cicatriz. — Repito: alucinado! Deseja uma noiva que talvez o deteste! Por Alá, *Al-Latif*.[1]

— E a *baraka* do tapetinho azul? — comentou, em surdina, com certa malícia, o capitão Sayeg. — E a *baraka* do tapetinho?

— Qual *baraka*, qual nada! — protestou o velhinho, falando muito baixo. — Não há *baraka* capaz de vencer um coração de mulher!

Eu ouvia aqueles comentários proferidos em surdina, fingindo que estava com a atenção muito longe dali.

Ao ouvir o pedido de Beremiz, o califa franziu a testa e ficou muito sério. Chamou para seu lado o xeque Iezid, e ambos (o califa e o pai de Telassim) conversaram sigilosamente durante alguns instantes.

Que poderia resultar daquele grave conluio?

Estaria o xeque de acordo com o inesperado noivado de sua filha?

Decorridos alguns instantes o califa assim falou, em meio de profundo silêncio:

— Não farei, ó Calculista, oposição alguma ao teu romântico e auspicioso casamento com a formosa Telassim. O meu prezado amigo, xeque Iezid, que acabei de consultar, aceita-te como genro. Reconhece, em ti, um homem de caráter, bem-educado, e profundamente religioso! É bem verdade que a jovem Telassim estava prometida a um xeque damasceno que se acha, agora, combatendo na Espanha. Mas uma vez que ela própria deseja mudar o rumo de sua vida, não tentarei intervir em seu destino. Maktub! Estava escrito! A flecha, solta no ar, exclama cheia de alegria: "Por Alá! Sou livre! Sou livre!" Engana-se! Já tem o seu destino marcado pela pontaria do atirador.[2] Assim é a jovem Flor do Islã! Abandona um xeque opulento e nobre, que poderia ser, amanhã, um grão-vizir, um governador, e aceita como esposo um simples e modesto calculista persa! Maktub! Seja tudo o que Alá quiser!

Neste ponto, o poderoso Emir dos Árabes fez uma ligeira pausa e logo prosseguiu, enérgico:

— Imponho, entretanto, uma condição. Terás, ó exímio matemático, de resolver, diante de todos os nobres que aqui se acham, curioso problema inventado por um dervixe do Cairo. Se resolveres esse problema, casarás com Telassim; caso contrário, terás de desistir para sempre dessa fantasia louca de beduíno que bebeu haxixe. E de mim nada mais receberás! Serve-te a proposta?

— Emir dos Crentes! — retorquiu Beremiz com tranquilidade e firmeza. — Desejo, apenas, conhecer os termos do aludido problema, a fim de poder solucioná-lo com os prodigiosos recursos do Cálculo e da Análise!

Respondeu o poderoso califa:

— O problema, na sua expressão mais simples, é o seguinte: Tenho cinco lindas escravas; comprei-as há poucos meses, de um príncipe mongol. Dessas cinco encantadoras meninas, duas têm os olhos negros, as três restantes têm os olhos azuis. As duas escravas de olhos negros, quando interrogadas, *dizem sempre a verdade*; as escravas de olhos azuis, ao contrário, são mentirosas, isto é, *nunca dizem a verdade*. Dentro de alguns minutos, essas cinco jovens serão conduzidas a este salão: todas elas terão o rosto inteiramente oculto por espesso véu. O haic que as envolve torna impossível, em qualquer delas, o menor traço fisionômico. Terás que descobrir e indicar, sem a menor possibilidade de erro, quais as raparigas de olhos negros e quais as de olhos azuis. Poderás interrogar três das cinco escravas, não sendo permitido, em caso algum, fazer mais de uma pergunta à mesma jovem. Com auxílio das três respostas obtidas, o problema deverá ser solucionado, sendo a solução justificada com todo rigor matemático. E as perguntas, ó Calculista, devem ser de tal natureza que só as próprias escravas sejam capazes de responder com perfeito conhecimento.

Momentos depois, sob os olhares curiosos dos circunstantes, apareciam no grande divã das audiências as cinco escravas de Al-Motacém. Apresentavam-se cobertas com longos véus negros da cabeça aos pés; pareciam verdadeiros fantasmas do deserto.

— Eis aí — confirmou o Emir com certo orgulho. — Eis aí as cinco jovens do meu harém. Duas têm (como já disse) os olhos pretos — e só dizem a verdade. As outras três têm os olhos azuis e mentem sempre!

— Vejam só a minha desgraça — sussurrou o velhinho de cara chapada. — Vejam a minha triste sorte! A filha de meu tio tem os olhos pretos, pretíssimos, e mente o dia inteiro!

Aquela observação pareceu-me inoportuna. O momento era grave, muito grave, e não admitia gracejos. Felizmente, ninguém deu a menor atenção às palavras amalucadas do velhinho impertinente e falador.

Sentiu Beremiz que chegara o momento decisivo de sua carreira, o ponto culminante de sua vida. O problema formulado pelo califa de Bagdá, sobre ser original e difícil, poderia envolver embaraços e dúvidas imprevisíveis.

Ao calculista seria facultada a liberdade de arguir três das cinco raparigas. Como, porém, iria descobrir, pelas respostas, a cor dos olhos de todas elas? Qual das três deveria ele interrogar? Como determinar as duas que ficariam alheias ao interrogatório?

Havia uma indicação preciosa: as de olhos negros diziam sempre a verdade; as outras três (de olhos azuis) mentiam invariavelmente!

E isso bastaria?

Vamos supor que o calculista interrogasse uma delas. A pergunta devia ser de tal natureza que só a escrava interrogada soubesse responder. Obtida a resposta, continuaria a dúvida. A interrogada teria dito a verdade? Teria mentido? Como apurar o resultado, se a resposta certa não era por ele conhecida?

O caso era, realmente, muito sério.

As cinco embuçadas colocaram-se em fila ao centro do suntuoso salão. Fez-se grande silêncio. Nobres muçulmanos, xeques e vizires acompanhavam com vivo interesse o desfecho daquele novo e singular capricho do rei.

O calculista aproximou-se da primeira escrava (que se achava no extremo da fila, à direita) e perguntou-lhe com voz firme e pausada:

— De que cor são os teus olhos?

Por Alá! A interpelada respondeu em dialeto chinês, totalmente desconhecido pelos muçulmanos presentes! Beremiz protestou. Não compreendera uma única palavra da resposta dada.

Ordenou o califa que as respostas fossem dadas em árabe puro, e em linguagem simples e precisa.

Aquele inesperado fracasso veio agravar a situação do calculista. Restavam-lhe, apenas, duas perguntas, pois a primeira já era considerada inteiramente perdida para ele.

Beremiz, que o insucesso não havia conseguido desalentar, voltou-se para a segunda escrava e interrogou-a:

— Qual foi a resposta que a sua companheira acabou de proferir?

Disse a segunda escrava:

— As palavras dela foram: "Os meus olhos são azuis."

Essa resposta nada esclarecia. A segunda escrava teria dito a verdade ou estaria mentindo? E a primeira? Quem poderia confiar em suas palavras?

A terceira escrava (que se achava no centro da fila) foi interpelada a seguir, pelo calculista, da seguinte forma:

— De que cor são os olhos dessas duas jovens que acabo de interrogar?

A essa pergunta — que era, aliás, a última a ser formulada — a escrava respondeu:

— A primeira tem os olhos negros e a segunda olhos azuis!

Seria verdade? Teria ela mentido?

O certo é que Beremiz, depois de meditar alguns minutos, aproximou-se tranquilo do trono e declarou:

— Comendador dos Crentes, Sombra de Alá na Terra! O problema proposto está inteiramente resolvido e a sua solução pode ser anunciada com absoluto rigor matemático. A primeira escrava (à direita) tem olhos negros; a segunda tem os olhos azuis; a terceira tem os olhos negros e as duas últimas têm olhos azuis!

Erguidos os véus e retirados os pesados haics, as jovens apareceram sorridentes, os rostos descobertos. Ouviu-se um *ialá* de espanto no grande salão. O inteligente Beremiz havia falado, com precisão admirável, a cor dos olhos de todas elas!

— Pelos méritos do Profeta — exclamou o rei. — Já tenho proposto esse mesmo problema a centenas de sábios, ulemás, poetas e escribas — e afinal esse modesto calculista é o primeiro que consegue resolvê-lo! Como foi, ó jovem, que chegaste a essa solução? De que modo poderás demonstrar que não havia, na resposta final, a menor possibilidade de erro?

Interrogado desse modo, pelo generoso monarca, o Homem que Calculava assim falou:

— Ao formular a primeira pergunta: "Qual a cor dos teus olhos?" eu sabia que a resposta da escrava seria fatalmente a seguinte: “Os meus olhos são negros!” Com efeito, se ela tivesse os olhos negros diria a verdade, isto é, afirmaria: “Os meus olhos são negros!” Tivesse ela os olhos azuis, mentiria, e, assim, ao responder, diria também: “Os meus olhos são negros!” Logo, eu afirmo que a resposta da primeira escrava era uma única, forçada e bem determinada: “Os meus olhos são negros!”

Feita, portanto, a pergunta, esperei pela resposta que, previamente, conhecia. A escrava respondendo em dialeto desconhecido, auxiliou-me de modo prodigioso. Realmente, alegando não ter entendido o arrevesado idioma chinês, interroguei a segunda escrava: “Qual foi a resposta que a sua companheira acabou de proferir?” Disse-me a segunda: “As palavras foram: Os meus olhos são azuis!” Tal resposta vinha demonstrar que a segunda mentia, pois essa não podia ter sido, de forma alguma (como já provei) a resposta da primeira jovem. Ora, se a segunda mentia, era evidente que tinha os olhos azuis. Reparai, ó Rei, nessa particularidade notável para a solução do enigma! Das cinco escravas, nesse momento, havia uma cuja incógnita estava, pois, por mim resolvida com todo rigor matemático. Era a segunda. Havia faltado com a verdade; logo, tinha os olhos azuis. Restavam ainda a descobrir quatro incógnitas do problema.

Aproveitando a terceira e última pergunta, interpelei a escrava que se achava no centro da fila: “De que cor são os olhos das duas jovens que acabei de interrogar?” Eis a resposta que obtive: “A primeira tem os olhos negros e a segunda tem os olhos azuis!” Ora, em relação à segunda eu não tinha dúvida (conforme já expliquei). Que conclusão pude tirar, então, da terceira resposta? Muito simples. A terceira escrava não mentira, pois confirmara que a segunda tinha os olhos azuis. Se a terceira não mentira, os seus olhos eram negros e as suas palavras eram a expressão da verdade, isto é, a primeira escrava tinha, também, os olhos negros. Foi fácil concluir que as duas últimas, por exclusão (à semelhança da segunda) tinham os olhos azuis!!

Posso asseverar, ó Rei do Tempo, que nesse problema, embora não apareçam fórmulas, equações ou símbolos algébricos, a solução, para ser certa e perfeita, deve ser obtida por meio de um raciocínio puramente matemático.

Estava resolvido o problema do califa. Outro, muito mais difícil, Beremiz seria, em breve, forçado a resolver: Telassim, o sonho de uma noite em Bagdá!

Louvado seja Alá, que criou a Mulher, o Amor e a Matemática!

NOTAS

1 O Revelador. Um dos noventa e nove epítetos honrosos que os muçulmanos aplicam a Deus.

2 O pensamento da flecha é de Tagore.

34. — Segue-me — disse Jesus. — Eu sou o caminho que deves trilhar, a verdade em que deves crer, a vida que deves esperar. Eu sou o caminho sem perigo; a verdade sem erro e a vida sem morte.[1]

Na terceira lua do mês de Rhegeb, do ano de 1258, uma horda de tártaros e mongóis atacou a cidade de Bagdá. Os assaltantes eram comandados por um príncipe mongol, neto de Gêngis Khan.

O xeque Iezid (Alá o tenha em sua glória!) morreu combatendo junto à ponte de Solimã; o califa Al-Motacém entregou-se prisioneiro e foi degolado pelos mongóis.[2]

A cidade foi saqueada e cruelmente arrasada.

A gloriosa Bagdá, que durante quinhentos anos fora um centro de ciências, letras e artes, ficou reduzida a um montão de ruínas.

Felizmente não assisti a esse crime que os bárbaros conquistadores praticaram contra a civilização. Três anos antes, logo depois da morte do generoso príncipe Cluzir Schá (Alá o tenha em sua paz!), segui para Constantinopla com Beremiz e Telassim.

Devo dizer que Telassim, antes de seu casamento, já era cristã, e ao cabo de poucos meses fez com que Beremiz repudiasse a religião de Maomé e adotasse integralmente o Evangelho de Jesus, o Salvador.

Beremiz fez questão de ser batizado por um bispo que soubesse a Geometria de Euclides.

Todas as semanas vou visitá-lo. Chego às vezes a invejar-lhe a felicidade em que vive em companhia dos três filhinhos e da carinhosa esposa.

Ao ver Telassim, lembro-me das palavras do poeta:

> "Pela tua graça, mulher, conquistaste todos os corações. Tu és a obra sem mácula, saída das mãos do Criador."

E mais:

> "Esposa de pura origem, ó perfumada! Sob as notas de tua voz as pedras levantam-se dançando e vêm, em ordem, erguer um edifício harmonioso![3]
>
> Cantai, ó aves, as vossas cantigas mais puras! Brilhai, ó Sol, com a vossa mais doce luz!
>
> Deixai voar as vossas flechas, ó Deus do Amor!
>
> Mulher! É grande a tua felicidade: bendito seja o teu amor.[4]"

Não resta dúvida. De todos os problemas, o que Beremiz melhor resolveu foi o da Vida e do Amor.

E aqui termino, sem fórmulas e sem números, a história simples da vida do Homem que Calculava.

A verdadeira felicidade — segundo afirma Beremiz — só pode existir à sombra da religião cristã.

Louvado seja Deus! Cheios estão o Céu e a Terra da majestade de sua obra.[5]

NOTAS

[1] Ver *Sob o Olhar de Deus*, cap. XV.

[2] A conquista de Bagdá, pelas hordas impiedosas de Houlagou, é descrita por vários historiadores. A cidade foi cruelmente saqueada pelos bárbaros invasores. Tudo foi arrasado e destruído: o fogo consumiu os grandes palácios e as mais ricas mesquitas. O sangue dos mortos inundou as ruas e as praças. Os mongóis atiraram ao Tigre todos os livros das grandes bibliotecas, e os preciosos manuscritos, misturados na lama, formaram uma ponte sobre a qual os conquistadores passavam a cavalo.

[3] Os versos citados são transcritos das *Mil e Uma Noites*, tradução de Nair Lacerda e de Domingos Carvalho da Silva.

[4] Cf. Tagore, *A Alma das Paisagens*, pág. 260.

[5] Dos *Salmos* de Davi.

Apêndice[1]

A Verdade não é monopólio de ninguém; é patrimônio comum das inteligências.

LEONEL FRANCA, S.J.

A matemática deve ser útil; não nos esqueçamos, porém, de que essa ciência é, acima de tudo, uma mensagem de Sabedoria e Beleza.

H. VAN PRAAG
À la Découverte de l'Algèbre, 9

NOTA

1 Todas as notas que figuram neste *Apêndice* são da autoria do Prof. Breno Alencar Bianco.

A dedicatória deste livro e sua significação religiosa

> E, ao fim, quando baixei novamente à planície e da planície, após, desci aos vales meus, meus olhos viram, num deslumbramento, que também nas planícies e nos vales, em tudo, estava Deus.[2]
>
> GIBRAN KHALIL GIBRAN

Em relação à Dedicatória que figura neste livro, parece-me interessante dar aos leitores os seguintes esclarecimentos:

O matemático brasileiro Henrique César de Oliveira Costa (1879-1949), apelidado Dr. Costinha, que exerceu a cátedra no Colégio Pedro II, considerava a Dedicatória deste livro como "a página mais original que se apresentou, até agora, no imenso campo literário da Matemática".

Referindo-se à Dedicatória de *O Homem que Calculava* escreveu o erudito economista argentino, Prof. José Gonzalez Galé:

> "O conteúdo altamente filosófico dessa estranha Dedicatória, pelos nomes famosos que envolve, é uma das lições mais surpreendentes de simplicidade e tolerância religiosa que tenho lido em toda a minha vida."

Oito são os geômetras que M. T. distinguiu, de forma muito original, na Dedicatória deste livro. Vamos apresentar, sobre esses oito vultos notáveis da Ciência, rápidas indicações biográficas.

RENÉ DESCARTES, geômetra e filósofo francês (1595-1650). Estranhamente original em todos os ramos da Ciência. Criador da Geometria Analítica. Na *Antologia da Matemática* (Ed. Saraiva), poderá o leitor encontrar a biografia desse imortal pesquisador dos domínios abstratos. Era cristão.

BLAISE PASCAL, geômetra e filósofo francês (1623-1662). Deixou um traço profundo de sua genialidade na Geometria: o célebre Teorema de Pascal. Inventou, antes de qualquer outro, a primeira máquina de calcular. É apontado como um dos fundadores do Cálculo das Probabilidades. Era cristão-católico.

ISAAC NEWTON, astrônomo e matemático inglês (1642-1727). Formulou a Lei da Gravitação Universal. Para um estudo completo da vida de Newton, convém ler *Antologia da Matemática*, I. vol. (Ed. Saraiva). Era cristão-protestante.

GOTTFRIED WILHELM VON LEIBNIZ, matemático e filósofo alemão (1646-1716). Lançou os fundamentos do Cálculo Diferencial. Era cristão-protestante.

LEONARDO EULER, matemático suíço (1707-1783). O mais fecundo dos geômetras. Calcula-se que tenha escrito cerca de mil e duzentas memórias sobre questões da Ciência. Era cristão-protestante.

JOSEPH LOUIS LAGRANGE, matemático francês, mas italiano de nascimento (1736-1813). Verdadeiramente genial em suas pesquisas em todos os quadrantes da Ciência. Elaborou a famosa *Mecânica Analítica*, um dos marcos no progresso da Matemática. A mais nobre e a mais abstrata das Ciências, em honra desse notável analista, é denominada "Ciência de Lagrange". Era cristão-católico.

AUGUSTO COMTE, filósofo e matemático francês (1798-1857). Fundador do Positivismo. O seu *Curso de Filosofia Positiva* pode ser apontado como uma das obras capitais da Filosofia no Século XIX. Era agnóstico. A sua *Geometria Analítica* foi de alto relevo para o progresso da Matemática.

AL-KHARISMI, matemático e astrônomo persa. Viveu na primeira metade do Século IX. Contribuiu Al-Kharismi, de forma notável, para o progresso da Matemática. A ele devemos, entre outras coisas, na grafia dos números, o *sistema de posição*, isto é, o sistema no qual cada algarismo tem valor conforme a posição que ocupa no número. Era muçulmano.

Para o árabe muçulmano a denominação de infiel é dada a todo indivíduo não muçulmano, isto é, ao indivíduo que não aceita os dogmas do Islã e não segue a trilha do Alcorão, que é o Livro de Alá.

Dentro da ortodoxia islâmica serão, portanto, apontados como infiéis, os seguintes geômetras: Descartes, Pascal, Newton. Leibniz, Euler, Lagrange e Comte.

Temos, assim, sete infiéis. Os seis primeiros, cristãos, e o último, agnóstico.[3]

Um muçulmano piedoso, sincero, quando se refere a um infiel (cristão, idólatra, pagão, judeu, agnóstico ou ateu), isto é, quando cita o nome de um servo de Alá que viveu no erro, nas trevas do pecado (depois da revelação do Alcorão), por não ter sido esclarecido pela Fé Muçulmana, acrescenta este apelo:

— *Alá se compadeça desse infiel!*

Ou recorre a esta fórmula que é, igualmente, piedosa:

— *Com ele* (o infiel) *a misericórdia de Al-Iah*![4]

Aceitam os muçulmanos, como dogma, que o infiel, depois da vitória do Islamismo, tendo vivido na heresia, longe da Verdade, estará, fatalmente, depois da Morte, condenado às penas eternas. É preciso, pois, implorar sempre para os infiéis (especialmente para os sábios), a clemência infinita de Alá, o Misericordioso.[5]

Uma observação de alto relevo deve ser feita aqui:

Nos domínios da História da Ciência, as palavras *árabe* e *muçulmano* devem ser tomadas com sentido muito mais amplo. A maioria dos homens cultos, que floresceram no mundo islâmico, sob a proteção dos soberanos muçulmanos, não eram árabes de nascimento e muitos nem sequer eram muçulmanos.

Cf. Sir Tomas Arnold e Enrique de Taguá, *El Legado del Islam*, Madrid, 1947, pág. 493.

NOTAS

[2] Trad. De Judas Isgorogota, *Os que Vêm de Longe*. São Paulo, 1954, p. 153.

[3] A denominação de *agnóstico* é dada ao indivíduo que professa o *Agnosticismo*. Agnosticismo é a corrente filosófica que leva o indivíduo a não tomar conhecimento dos problemas relacionados com a Metafísica. E assim, em relação à existência de Deus, por exemplo, o agnóstico não afirma, mas também não nega. Considera tal problema fora do alcance da razão humana. É um problema (afirma o agnóstico) que transcende à capacidade do nosso pensamento. A verdade absoluta (para o agnóstico) é incognoscível. Há, portanto, profunda diferença entre o ateu e o agnóstico. Para a pergunta "Deus existe?", o ateu responde "Não!". O agnóstico será incapaz de tal negativa e diz, apenas: "Não sei! A minha inteligência é fraca para esclarecer essa dúvida".

O termo *agnóstico* foi criado pelo naturalista inglês Thomas N. Huxley (1825-1895).

[4] As relações entre o Islã e o Cristianismo são bem esclarecidas no livro de Frei Jean Abd-el-Julil, O.F.M., *Cristianismo e Islã*, Madri, 1954.

[5] Alcorão, XVII, 110.

Calculistas famosos

A Matemática é um método geral do pensamento aplicável a todas as disciplinas e desempenha um papel dominante na ciência moderna.

ANTONIO MONTEIRO[1]

No capítulo II deste livro, destacamos o seguinte trecho:

"E, apontando para uma velha e grande figueira que se erguia a pequena distância, prosseguiu:

— Aquela árvore, por exemplo, tem duzentos e oitenta e quatro ramos. Sabendo-se que cada ramo tem, em média, trezentas e quarenta e sete folhas, é fácil concluir que aquela árvore tem um total de noventa e oito mil quinhentas e quarenta e oito folhas. Estará certo, meu amigo?"

O calculista, no caso, efetuou mentalmente o produto de 284 por 347. Essa operação é tida como muito simples diante dos cálculos prodigiosos que os calculistas famosos efetuam.

O americano Arthur Griffith, nascido no Estado de Indiana, efetuava mentalmente, em vinte segundos, a multiplicação de dois números quaisquer de nove algarismos cada um. Nesse gênero de cálculo cabe o recorde a um alemão, Zacarias Dase, que iniciou, aos quinze anos, a brilhante carreira de calculador. Dase superou os maiores prodígios, na capacidade de operar com números astronômicos. Os calculadores mais hábeis não multiplicam, em geral, fatores que apresentem mais de trinta algarismos. Dase ia além desse limite.

No século XVIII, o inglês Jededish Buxton conseguiu fazer uma multiplicação na qual figuravam 42 algarismos. Essa proeza era julgada inexcedível; Dase, porém, determinava mentalmente o produto exato de dois fatores com 100 algarismos cada um! Para a execução da raiz quadrada de um número de 80 ou 100 algarismos, ele exigia 42 minutos; e a complicada operação era efetuada mentalmente do princípio ao fim. Dase aplicou a sua milagrosa habilidade de calculista na continuação dos trabalhos das tábuas dos números primos de Buckbardt para os números compreendidos entre 7.000.000 e 10.000.000.

Os conhecimentos de Dase limitavam-se às regras de cálculo; era, no mais, de uma ignorância lamentável; isso ocorre, em geral, com os calculistas prodigiosos.

Além desses, houve muitos outros calculadores-prodígio. Citemos os seguintes: Maurice Dagobert (francês), Jededish Buxton (inglês), Tom Fuller (americano), Giacomo Inaudi (italiano) etc.

Para um estudo mais completo, indicamos: DR. JULES REGNAULT, *Les Calculateurs Prodiges*, Paris, 1952, pág. 29 e s.s. ROBERTO TOCQUET. *Les Calculateurs Prodiges et leurs Secrets*, Ed. de Pierre Amiot, Paris, 1957. FRED BARLOW, *Mental Prodigies*, Londres, 1952. WILHELM LOREI, *Le Mathématicien et le Calcul Numérique*, Sphinx, Abril, 1934.

NOTA

[1] Matemático português. Cf. *Gazeta da Matemática*, dez., 1944, pág. 11.

Os Árabes e a Matemática

Aqui estou a teu lado, combatente, árabe amigo, meu amigo e irmão!
Por teu passado, pelo teu presente, por teu futuro eu te estendo a mão!

JUDAS ISGOROGOTA[1]

Foi notável a contribuição dos árabes para o progresso da Matemática. Não só pelas traduções e larga divulgação das obras de Euclides, de Menelau, de Apolônio etc., como também pelas notáveis renovações metodológicas no cálculo numérico (sistema indo-arábico).

A invenção do zero, por exemplo, é atribuída a um árabe, Mohammed Ibn Ahmad (do século X), que aconselhava em seu livro *Chave da Ciência*: "Sempre que não houver um número para representar as dezenas, ponha um pequeno círculo para guardar o lugar". Cf. Jacques C. Pisler, *La Civilisation Arabe* — Paris, 1955, pág. 151.

Os árabes colaboraram prodigiosamente para o progresso da Aritmética, da Álgebra, da Astronomia e inventaram a Trigonometria Plana e a Trigonometria Esférica.

Será muito difícil avaliar o que a nossa civilização deve aos árabes nos amplos domínios do progresso científico.

Os filósofos Federico Enriques e G. de Santilana, no livro *Pequena História do Pensamento Científico* (São Paulo, 1940) exaltam, sem exagero, mas com judiciosos argumentos, o papel notável que os árabes realizaram, para o engrandecimento moral e material da Humanidade.

Aos árabes devemos, acima de tudo, o advento da Renascença, no período histórico em que se realizou.

Vejamos o que dizem os sábios Santilana e Enriques:

> "Se os árabes fossem bárbaros destruidores como o foram os mongóis, nossa Renascença teria sido, pelo menos, gravemente retardada. Mas os estudantes

> muçulmanos não hesitam ante longas e custosas pesquisas com o fito de consultar e colecionar os preciosos textos antigos.”

E já naquele tempo (1234), construíram os árabes uma Universidade:

> “...verdadeira cidade dos estudos onde se provia de tudo às necessidades dos estudantes...”

A primeira grande obra orientada dentro do pensamento democrático (e isso muita gente ignora) foi o Alcorão:

> “Aceitavam o Alcorão, mas queriam que fosse lícito interpretá-lo de forma compatível com um sistema de pensamento puramente lógico. Os pontos sobre os quais se discutia podem parecer atualmente bagatelas, mas sob eles se escondiam problemas filosóficos de vasto alcance, como o da eternidade do mundo, da causalidade, do tempo, da razão suficiente.”

Enquanto, entre os cristãos, pontificavam os astrólogos e embusteiros, com suas charlatanices, entre os árabes os astrônomos pesquisavam o céu e procuravam descobrir as leis que regem os infinitos de Alá:

> “Numa época em que do céu só vinham obscuros terrores e presságios, o único ponto do mundo em que o observavam com precisa intenção científica era o observatório de Al Batani ou o de Nassir Eddin.”

O povo árabe, não resta dúvida, pelo seu amor ao estudo das Ciências, especialmente da Matemática e da Astronomia, foi o povo que mais colaborou para o progresso moral e material da Humanidade.

Cf. José Augusto Sanchez Perez, *La Aritmética en Roma, India y en Arabia*, Madrid, 1949, pág. 96 e s.s. René Tatoton, *A Ciência Antiga e Medieval*, trad. de Ruy Fausto e Gita K. Ghinzerberg, São Paulo, 1959, pág. 21 e s.s. Pierre Dedron e Jean Itard. *Mathématiques et Mathématiciens*, Ed. Maynard. Paris. 1958, pág. 21.

Será interessante ler *Les Mathématiques Chez les Arabes*, no livro *Histoire des Mathématiques* (Paris, 1927, I vol., pág. 152), de Rouse Ball.

Especialmente sobre a obra de Al-Kharismi, convém ler: Aldo Mieli, *Panorma General de História de la Ciencia*, Buenos Aires, 1946, pág. 55 e s.s. Há outra obra de alto interesse para os professores: Francisco Vera, *La Matemática de los Musulmanos Espanoles*, Buenos Aires, 1947.

NOTA

[1] *Os que Vêm de Longe* — São Paulo, 1954.

Elogio da Matemática

> O sábio que se mostra orgulhoso e pedante revela que não sabe honrar a Ciência.
>
> DR. ALFREDO GUIMARÃES CHAVES[1]

Vamos oferecer aos leitores alguns pensamentos, altamente elogiosos, sobre a Matemática:

A Matemática é a honra do espírito humano. — LEIBNIZ.

Eis a Matemática — a criação mais original do engenho humano. — WHITEHEAD.

Nota-se, entre os matemáticos, uma imaginação assombrosa... Repetimos: havia mais imaginação na cabeça de Arquimedes do que na de Homero. — VOLTAIRE.

Não há ciência que fale das harmonias da Natureza com mais clareza do que a Matemática. — PAULO CARUS.

Toda minha Física não passa de uma Geometria. — DESCARTES.

O mundo é cada vez mais dominado pela Matemática. — A. F. RIMBAUD.

Toda educação científica que não se inicia com a Matemática é naturalmente imperfeita em sua base. — AUGUSTO COMTE.

A Matemática é a chave de ouro que abre todas as Ciências. — DURUY.

Sem a Matemática não nos seria possível compreender muitas passagens das Santas Escrituras. — SANTO AGOSTINHO.

Possui a Matemática uma força maravilhosa capaz de nos fazer compreender muitos mistérios de nossa Fé. — SÃO JERÔNIMO.

Sem a Matemática não seria possível existir a Astronomia; sem os recursos prodigiosos da Astronomia seria impossível a Navegação. E a Navegação foi o fator máximo do progresso da Humanidade. — AMOROSO COSTA.

A Matemática não é uma ciência, mas a Ciência. — FELIX AUERBACH.

A escada da Sabedoria tem os degraus feitos de números. — BLAVATSKY.

Uma ciência natural é, apenas, uma ciência matemática. — IMMANUEL KANT.

Quem não conhece a Matemática morre sem conhecer a verdade científica. — SCHELBACH.

Deus é o grande geômetra. Deus geometriza sem cessar. — PLATÃO.

As leis da Natureza nada mais são que pensamentos matemáticos de Deus. — KEPLER.

A Matemática é a linguagem da precisão; é o vocabulário indispensável daquilo que conhecemos. — WILLIAM F. WHITE.

A Matemática é o mais maravilhoso instrumento criado pelo gênio do homem para a descoberta da Verdade. — LAISANT.

Pela certeza indubitável de suas conclusões, constitui a Matemática o ideal da Ciência. — BACON.

A Ciência, pelo caminho da exatidão, só tem dois olhos: a Matemática e a Lógica. — DE MORGAN.

A Matemática, de um modo geral, é fundamentalmente a ciência das coisas que são evidentes por si mesmas. — FELIX KLEIN.

A Matemática é o instrumento indispensável para qualquer investigação física. — BERTHELOT.

A Matemática é uma ciência poderosa e bela; problemiza ao mesmo tempo a harmonia divina do Universo e a grandeza do espírito humano. — F. GOMES TEIXEIRA.

A Matemática é aquela forma de inteligência com auxílio da qual trazemos os objetos do mundo dos fenômenos para o controle da concepção de quantidade. — G. H. HOWISSON.

Tudo aquilo que as maiores inteligências, ao longo dos séculos, têm realizado em relação à compreensão das formas, por meio de conceitos preciosos, está reunido numa grande ciência — a Matemática. — J. M. HERBART.

A Matemática é a mais simples, a mais perfeita e a mais antiga de todas as ciências. — JACQUES HADAMARD.

NOTA

1 Magistrado. Autor de vários trabalhos sobre Matemática.

Considerações sobre os problemas propostos

Se bem que compreendamos que as soluções dadas pelo engenhoso Beremiz, o Homem que Calculava, terão sido suficientemente inteligíveis para a compreensão total de cada um dos problemas propostos ao longo desta obra e de suas correspondentes soluções, não é menos certo que estas foram alcançadas, na maioria dos casos, por métodos logísticos e dedutivos, embora nem por isso menos exatos.

Não obstante, para alguns dos problemas verificamos que faltava a solução rigorosamente matemática, ou seja, cingida ao frio cálculo numérico. Por isso, acreditamos ser necessário incluir neste Apêndice, e para cada um dos problemas propostos, certas considerações, e se em alguns dos casos somente se trate de comentários à solução oferecida, em outros são uma exposição ampla da solução matemática do problema, porém em todos eles serão uma ajuda, sem dúvida, para uma melhor interpretação das engenhosas soluções oferecidas pelo nosso amigo, o Homem que Calculava.

O Problema dos 35 Camelos

> Felizes aqueles que se divertem com problemas que educam a alma e elevam o espírito.[1]
>
> FENELON

Para o *problema dos 35 camelos* podemos apresentar uma explicação muito simples.

O total de 35 camelos, de acordo com o enunciado da história, deve ser repartido, pelos três herdeiros, do seguinte modo:

O *mais velho* deveria receber a *metade* da herança, isto é, 17 camelos e meio;

O *segundo* deveria receber *um terço* da herança, isto é, 11 camelos e dois terços;

O *terceiro*, o mais moço, deveria receber *um nono* da herança, isto é, 3 camelos e oito nonos.

Feita a partilha, de acordo com as determinações do testador, haveria uma *sobra*.

$$17\frac{1}{2} + 11\frac{2}{3} + 3\frac{8}{9} = 33\frac{1}{18}$$

Observe que a soma das três partes não é igual a 35, mas sim a

$$33\ \frac{1}{18}$$

Há, portanto, uma *sobra*.

Essa sobra seria de um camelo e $\frac{17}{18}$ de camelo.

A fração $\frac{17}{18}$ exprime a soma $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{9}$

frações que representam as pequenas sobras.

Aumentando-se de $\frac{1}{2}$ a parte do primeiro herdeiro, este passaria a receber a conta certa de 18 camelos; aumentando-se de $\frac{1}{3}$ a parte do segundo herdeiro, este passaria a receber um número exato de 12; aumentando-se de $\frac{1}{9}$ a parte do terceiro herdeiro, este receberia quatro camelos (número exato). Observe, porém, que, consumidas com este aumento as três pequenas sobras, ainda há um camelo fora da partilha.

Como fazer o *aumento* das partes de cada herdeiro?

Esse *aumento* foi feito, admitindo-se que o total não era de 35, mas de 36 camelos (com o acréscimo de 1 ao dividendo).

Mas, sendo o dividendo 36, a sobra passaria a ser de *dois* camelos.

Tudo resultou, em resumo, do fato seguinte:

Houve um erro do testador.

A *metade* de um *todo*, mais a *terça parte* desse *todo*, mais *um nono* desse *todo*, não é igual ao *todo*. Veja bem:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} = \frac{17}{18}$$

Para completar o *todo*, falta, ainda, $\frac{1}{18}$ desse *todo*.

O *todo*, no caso, é a herança dos 35 camelos.

$\frac{1}{18}$ de 35 é igual a $\frac{35}{18}$.

A fração $\frac{35}{18}$ é igual a $1\frac{17}{18}$

Conclusão: feita a partilha, de acordo com o testador, ainda haveria uma sobra de $1\frac{17}{18}$.

Beremiz, com o artifício empregado, distribuiu os $\frac{17}{18}$ pelos três herdeiros (aumentanto a parte de cada um) e ficou com a parte inteira da fração excedente.

Em alguns autores encontramos um problema curioso, de origem folclórica, no qual o total de camelos é 17 e não 35. Esse problema dos 17 camelos pode ser lido em centenas de livros de Recreações Matemáticas.

Para o total de 17 camelos a divisão é feita por meio de um artifício idêntico (o acréscimo de um camelo à herança do xeque), mas a sobra é só do camelo que foi acrescentado. No caso do total de 35, como ocorreu no episódio com Beremiz, o desfecho é mais interessante, pois o calculista obtém um pequeno lucro com a sua habilidade.

Se o total fosse de 53 camelos, a divisão da herança, feita do mesmo modo, aplicado o artifício, daria uma sobra de 3 camelos.

Eis os números que poderiam servir: 17, 35, 53, 71 etc.

Para o caso dos 17 camelos, leia: E. Fourrey, *Récréations Mathématiques*, Paris, 1949, pág. 159 Gaston Boucheny, *Curiosités et Récréations Mathématiques*. Paris, 1939, pág. 148.

NOTA

[1] Cf. Etchgoyen, *El Pensamiento Matemático*, Buenos Aires, 1950, pág. 33.

O Problema do Joalheiro

> É preciso que o professor se esforce no sentido de dar um caráter concreto aos problemas que apresenta aos estudantes.[1]
>
> A. HUISMAN

A dificuldade do problema tem sua origem na seguinte particularidade, que pode ser facilmente compreendida:

— Não se verifica proporcionalidade entre o preço cobrado pela hospedagem e a quantia pela qual as joias seriam vendidas.

Vejamos:

Se o joalheiro vendesse as joias por 100, pagaria 20 pela hospedagem; se vendesse a sua mercadoria por 200, deveria pagar 40, e não 35 pela hospedagem.

Não se verifica, portanto, como seria racional, proporcionalidade entre os elementos do problema.

O certo seria:

Para 100 (de venda) .... hospedagem 20
Para 200 (de venda) .... hospedagem 40

A combinação entre os interessados, porém, foi outra:

Para 100 (de venda) .... hospedagem 20
Para 200 (de venda) .... hospedagem 35

Admitida esta última relação de valores, impõe-se, no caso, para o cálculo da hospedagem, sendo a venda 140, um problema que os matemáticos denominam de *interpolação*.

NOTA

[1] CF. A. Huisman, *Le Fil D'Ariane*, Ed. Wesmael-Charlier, Paris, 1959, pág. 3. Observa Huisman, no *Avant-Propos* de sua obra, que se faz necessária uma transformação radical no ensino da Matemática. Até por suas aplicações, nos exercícios que figuram nos compêndios didáticos, a Matemática aparece distorcida, fora da vida real. No Brasil já assinalamos, da parte de muitos professores, essa preocupação de modernizar a Didática da Matemática. O Prof. Manuel Jairo Bezerra é, sem dúvida, um dos grandes paladinos dessa campanha renovadora. Sem o recurso do Laboratório — assegura o Prof. Jairo — o ensino da Matemática é defeituoso, deficiente e obsoleto. Cf. Manuel Jairo Bezerra, *Didática da Matemática*. Exemplos curiosos podem ser colhidos no livro do Prof. Carlos Galante, *Matemática, Primeira Série*, 8.ª ed.

O Problema dos Quatro Quatros

> De que irei me ocupar no céu, durante toda a Eternidade, se não me derem uma infinidade de problemas de Matemática para resolver?[1]
>
> AUGUSTIN LOUIS CAUCHY

O problema dos *quatro quatros* é o seguinte:

> *"Escrever, com quatro quatros e sinais matemáticos, uma expressão que seja igual a um número inteiro dado. Na expressão não pode figurar (além dos quatro quatros) nenhum algarismo ou letra ou símbolo algébrico que envolva letra, tais como: log., lim. etc."*

Afirmam os pacientes calculistas que é possível escrever, com quatro quatros, todos os números inteiros, desde 0 até 100.

Será necessário, em certos casos, recorrer ao sinal de fatorial (!) e ao sinal de raiz quadrada.

A raiz cúbica não pode ser empregada, por causa do índice 3.

Nota: Chama-se *fatorial* de um número ao produto dos números naturais desde 1 até esse número.

O fatorial de 4, representado pela notação 4! é igual ao produto $1 \times 2 \times 3 \times 4$, ou 24.

Com auxílio do fatorial de quatro escrevo facilmente a expressão:

$$4! + 4! + \frac{4}{4}$$

cujo resultado é 49, pois a expressão é equivalente a $24 + 24 + 1$.

Veja, agora, a expressão:

$$4! \times 4 + \frac{4}{4}$$

cujo valor é 97.

Em artigo publicado no *Jornal de Ciências* (maio de 1954), o Sr. Comte. Francisco José Starezione Madruga apresenta várias soluções interessantes. Algumas, porém, não são legítimas, pois o solucionista recorre à abreviatura *lim* e a certas notações não adotadas nos livros usuais.

W. J. REICHMANN, em seu livro *La Fascination des Nombres* (Paris, 1959), refere-se ao problema dos quatro quatros que ele aponta como um velhíssimo problema.

Para alguns números as formas apresentadas pelo matemático inglês são pouco econômicas.

Assim, para o número 24, a solução de Reichmann iria exigir duas raízes quadradas, uma divisão e uma adição.

Para o número 24 podemos indicar uma solução mais simples com auxílio da notação de fatorial:

$$4! + 4(4 - 4)$$

Do número 24 será fácil passar para o 25:

$$25 = 4! + 4^{4-4}$$

expressão essa de rara beleza, na qual aparece o expoente zero. Sabemos que toda qualidade elevada a zero é igual a 1. Logo, a segunda parcela da expressão é 1.

O número 26 seria apresentado sob uma forma bastante simples:

$$26 = 4! + \frac{4 + 4}{4}$$

NOTA

[1] Ver Premier Congrès International de Récréation Mathématique, Bruxelas, 1935, pág. 26. Artigo de Vatriquant.

O Problema dos 21 Vasos

> A curiosidade constante pela resolução de novos problemas é atributo seguro do homem altamente inteligente.
>
> DR. JOSÉ REIS[1]

Admite esse problema uma segunda solução, que seria a seguinte:

O 1.º sócio receberá: 1 vaso cheio, 5 meio cheios e 1 vazio.

O 2.º sócio receberá: 3 vasos cheios, 1 meio cheio e 3 vazios.

Ao 3.º sócio caberia a mesma cota que foi concedida ao 2.º, isto é, 3 vasos cheios, 1 meio cheio e 3 vazios.

Trata-se de um problema que pode ser resolvido aritmeticamente. Cf. E. Fourrey, *Récréations Aritmétiques*. Paris, 1949, pág. 160.

No livro do Dr. JULES REGNAULT, *Les Calculateurs Prodiges* (Paris, 1952, pág. 421), encontramos um problema semelhante:

> *Dividir 24 vasos por três pessoas, sendo 5 cheios, 8 vazios e 11 meio cheios.*

A resolução não oferece dificuldade.

Sob o título *Un Partage Difficile* (Uma Partilha Difícil), encontramos em CLAUDE-MARCEL LAURENT, *Problemes Amusants*, Paris, 1948, pág. 42, o seguinte problema:

"Um mercador tem um vaso com 24 litros de vinho. Quer repartir esse vinho por três sócios, em três partes iguais, com 8 litros cada uma. O mercador só dispõe de três vasilhas vazias cujas capacidades são, respectivamente: 13 litros, 11 litros e 5 litros. Usando essas três vasilhas, como poderá ele dividir o vinho em 3 porções de 8 litros cada uma?"

Trata-se de um problema de outro gênero, mas muito fácil. A solução é obtida em *nove tempos*.

NOTA

1 Homem de ciência (médico), jornalista e professor.

O Número π

> Muitos e muitos poetas, na Antiguidade, exaltaram o número. Pois o número é de essência divina.[1]
>
> M. A. AUBRY

O número π, que é um dos mais famosos em todos os quadrantes da Matemática, já era conhecido, e a constância de seu valor já tinha sido percebida pelos geômetras da Antiguidade.

Tudo nos leva a afirmar, conforme podemos inferir de duas citações bíblicas, bem claras, que os judeus primitivos atribuíram ao número π um valor inteiro igual a 3. No *Livro dos Reis* podemos ler, realmente, esta curiosa indicação:

> "Fez também o mar de fundição redondo de dez côvados de uma borda à outra borda e de cinco de alto; um fio de trinta côvados era a medida de sua circunferência."

Esse mar de fundição, esclarece o exegeta, não passava, afinal, de pequeno poço (de acordo com o costume egípcio), onde os padres se banhavam. Tendo o tal poço redondo trinta côvados de roda, o seu diâmetro (medido de uma borda à outra) era de 10 côvados. A conclusão é bem clara. A relação entre a circunferência (30) e o diâmetro (10) é exatamente 3. É esse o valor de π, revelado pela Bíblia.[2]

No Papiro Rhind, que é um dos documentos mais antigos da História da Matemática, encontramos um curioso processo de cálculo da circunferência C, quando conhecemos o diâmetro D dessa circunferência. Das indicações expressas no Papiro, inferimos que os geômetras egípcios, 4.000 antes de Cristo, atribuíam ao número π um valor equivalente ao quadrado da fração

$$\frac{16}{9}$$

que daria, em número decimal, 3,1605 — valor no qual π apresenta um erro que não chega a 2 centésimos de unidade.

Arquimedes, já no século III a.C., provou que o número famoso deveria estar compreendido entre as frações:

$$3\frac{1}{7} \text{ e } 3\frac{10}{71}$$

Bháskara, geômetra indiano, admitia para o número π um valor expresso pelo número $3\frac{17}{120}$ que equivalia ao número decimal 3,1416.

Ao matemático holandês Adrian Anthonisz, apelidado Metius[3] (1527-1607), os historiadores atribuem o valor $\frac{355}{113}$ para o número π, que foi de largo emprego durante os séculos XVI e XVII.

O alemão Johann Heinrich Lambert (1728-1777) teve a paciência de obter para o valor de π uma fração ordinária cujo numerador tinha dezesseis algarismos e o denominador, quinze. Cf. *Scripta Mathematica*, 1944, vol. X, pág. 148.

Para a fixação de um valor aproximado de π (em número decimal), por meio de um artifício mnemônico, há várias frases.

O matemático francês Maurice Decerf, grande pesquisador de curiosidades, escreveu um pequeno poema, no qual cada palavra, pelo número de letras que encerra, corresponde a um algarismo do número π (em decimal).

Vamos indicar os dois primeiros versos desse poema:

"Que j'aime à faire connaître un nombre utile aux sages Glorieux Archimède artiste ingenieux."

Poderá o leitor contar, a partir do "*que*" inicial, o número de letras de cada palavra e obterá (para cada palavra) um algarismo da parte de π:

3, 14 159 265 358 979

O curioso poema de Decerf, aproveitado na íntegra, dará o valor de π com 126 casas decimais. Mas nessas 126 primeiras casas decimais de π aparecem onze zeros. Cada zero o engenhoso poeta representou por meio de uma palavra de dez letras.

Há, ainda, para o valor de π, frases mnemônicas em espanhol, em alemão e em inglês. Veja *Matemática Divertida e Delirante* (Ed. Saraiva), pág. 88.

A frase em português mais simples e interessante é a seguinte:

Sou o medo e temor constante do menino vadio.

Atualmente, graças aos computadores eletrônicos, o valor de π é conhecido com mais de oito milhões de casas decimais (*Scientific American*, fevereiro de 1983, p. 61).

Não pertence o número π ao conjunto dos números racionais. Figura entre os números que os analistas denominam de números *transcendentes*.

Eis uma série famosa, devida a Leibniz, que é igual a um quarto de π:

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \ldots$$

O número de termos, nessa série, é infinito e os termos são alternadamente positivos e negativos.[4]

Os leitores encontrarão, no livro *Matemática Divertida e Delirante*, Ed. Saraiva, São Paulo, 1962, pág. 83, muitas curiosidades e anedotas sobre o número π.

Nota — Do livro *Les Mathématiques et l'Imagination* (Ed. Payot, Paris, 1950, pág. 59), dos matemáticos Edward Kasner e James Newman, copiamos o seguinte trecho:

> *Com o recurso das séries convergentes Abraham Sharp, em 1669, calculou π com 71 decimais. Dase, calculista rápido como um relâmpago, orientado por Gauss, calculou, em 1824, o número π com 200 decimais. Em 1854 o alemão Richter achou 500 decimais para o número π e Shanks, algebrista inglês, implantou-se na imortalidade dos geômetras determinando o número π com 707 casas decimais.*

Em nota incluída em seu livro, o matemático francês F. Le Lionnais vem mutilar e obscurecer impiedosamente a glória do calculista Shanks. Escreveu Le Lionnais:

> *Verificou-se, mais tarde, que o cálculo de Shanks, a partir da 528.ª casa, está errado.*

NOTAS

[1] Os versos de Aubry, aqui citados, figuram, com destaque, no frontispício do livro de Victor Thebault, Les Récréations Mathématiques, Paris, 1952.

[2] Seguimos fielmente a tradução católica do padre Antonio Pereira de Figueiredo, com as anotações do Revmo. Santos Farinha. Lisboa, 1902.

[3] Esse matemático, sendo natural da cidade de Metz, tomou como pseudônimo Adrian Metius.

[4] Ver as interessantes observações de Leon Brünschireg, *Las Etapas de la Filosofía Matemática*, Buenos Aires, 1945, página 564. Destaquemos ainda um estudo do Prof. Luiz Gonzaga de Souza Lapa, subordinado ao título: *Aplicação da fórmula de Euler* e *da Série de Leibniz ao estudo do número pi, Teresina*, 1954.

O Problema do Jogo de Xadrez

> Aquele que deseja estudar ou exercer a Magia deve cultivar a Matemática.[1]
>
> MATILA GHYKA

É esse, sem dúvida, um dos problemas mais famosos nos largos domínios da Matemática Recreativa. O número total de grãos de trigo, de acordo com a promessa do rei Iadava, será expresso pela soma dos sessenta e quatro primeiros termos da progressão geométrica:

$$:: 1 : 2 : 4 : 8 : 16 : 32 : 64$$

A soma dos 64 primeiros termos dessa progressão é obtida por meio de uma fórmula muito simples, estudada em Matemática Elementar.[2]

Aplicada a fórmula obtemos para o valor da soma S:

$$S = 2^{64} - 1$$

Para obter o resultado final devemos elevar o número 2 à sexagésima quarta potência, isto é, multiplicar 2x2x2x... tendo esse produto sessenta e quatro fatores iguais a 2. Depois do trabalhoso cálculo chegamos ao seguinte resultado:

$$S = 18\ 446\ 744\ 073\ 709\ 551\ 616 - 1$$

Resta, agora, efetuar essa subtração. Da tal potência de dois tirar 1. E obtemos o resultado final:

$$S = 18\ 446\ 744\ 073\ 709\ 551\ 615$$

Esse número gigantesco, de vinte algarismos, exprime o total de grãos de trigo que impensadamente o lendário rei Iadava prometeu, em má hora, ao não menos lendário Lahur Sessa, inventor do jogo de xadrez.

Feito o cálculo aproximado para o volume astronômico dessa massa de trigo, afirmam os calculistas que a Terra inteira, sendo semeada de norte a sul, com uma colheita, por ano, só poderia produzir a quantidade de trigo que exprimia a dívida do rei, no fim de 450 séculos![3]

O matemático francês Etienne Ducret incluiu em seu livro, bordando-os com alguns comentários, os cálculos feitos pelo famoso matemático inglês John Wallis, para exprimir o volume da colossal massa de trigo que o rei da Índia prometeu ao astucioso inventor do jogo de xadrez. De acordo com Wallis, o trigo poderia encher um cubo que tivesse 9.400 metros de aresta. Essa respeitável massa de trigo deveria custar (naquele tempo) ao monarca indiano um total de libras que seria expresso pelo número:

855 056 260 444 220

É preciso atentar para essa quantia astronômica. Mais de 855 trilhões de libras.[4]

Se fôssemos, por simples passatempo, contar os grãos de trigo do monte S à razão de 5 por segundo, trabalhando dia e noite sem parar, gastaríamos, nessa contagem, 1.170 milhões de séculos! Vamos repetir: mil cento e setenta milhões de séculos![5]

De acordo com a narrativa de Beremiz, o Homem que Calculava, o imaginoso Lahur Sessa, o inventor, declarou publicamente que abria mão da promessa do rei, livrando, assim, o monarca indiano do gravíssimo compromisso. Para pagar pequena parte da dívida, o soberano teria que entregar ao novo credor o seu tesouro, as suas alfaias, as suas terras e seus escravos. Ficaria reduzido à mais absoluta miséria. Em situação social, ficaria abaixo de um sudra.

NOTAS

[1] Esse pensamento famoso poderá ser lido no livro de Matila Ghyka, *Philosophie et Mystique des Nombres*, Col. Payot, Paris, 1952, pág. 87.

[2] Cf. Thiré e Mello e Souza, *Matemática*, 4.ª série.

[3] Cf. Robert Tocquet, *Les Calculateurs Prodiges et leurs Secrets*, Ed. Pierre Amiot, Paris, 1959, pág. 164.

[4] Cf. Etienne Tucret, *Récréations Mathématiques*, Paris, s.d., pág. 87. Convém ler, também: Ighersi, *Matemática Dillettevola e Curiosa*, Milão, 1912, pág. 80.

[5] Cf. Tocquet, ob. cit.

O Problema das Abelhas

Com abelhas ou sem abelhas, os problemas interessantes da Matemática têm, para o pesquisador, a doçura do mel.

ARY QUINTELA[1]

O problema citado por Beremiz, e que se apresenta (sob forma tão poética) no livro *Lilaváti*, do geômetra indiano Bháskara, pode ser resolvido com auxílio de uma equação do 1.º grau.

Sendo x o número de abelhas, temos:

$$\frac{x}{5} + \frac{x}{3} + 3\left(\frac{x}{3} - \frac{x}{5}\right) + 1 = x$$

Essa equação admite uma raiz, que é 15. Esse número exprime a solução do problema. A notação algébrica, no tempo de Bháskara, era inteiramente diferente.

Os leitores encontrarão estudo interessante sobre a Matemática de Bháskara em Leon Delbos, *Les Mathématiques Orientales*, Ed. Gauthier Villars, Paris, 1892.

O episódio de *Lilaváti e a pérola*, os leitores poderão lê-lo no livro do Prof. José Augusto Sanchez Peres, *La Aritmética en Roma, en Indya y en Arabia*, Madrid, 1949, pág. 71 e s.s.

Encontramos em Boucheny um problema intitulado *O Enxame de Abelhas*, que parece ter sido decalcado da obra de Bháskara. Cf. GASTON BOUCHENY, *Curiosités et Récréations Mathématiques*, Lib. Larousse, Paris, 1939, pág. 66. Para um estudo sobre a obra de Bháskara, indicamos RENÉ TATON, *História Geral das Ciências*, III vol., A Idade Média, pág. 61. Escreveu Taton: Bháskara, muito importante como matemático e astrônomo, nascido em 1114, concluiu em 1150, a elaboração de *Sidantasi romanai*, "A Joia da Cabeça das Soluções". Esta obra divide-se em quatro partes. As duas primeiras são matemáticas. Elas são, respectivamente, intituladas: *Lilaváti, a Jogadora* (isto é: Recreações Matemáticas) e a *Bijagantima* (Cálculo para Correções).

NOTA

[1] Matemático brasileiro de grande prestígio. Professor do Colégio Militar e do Instituto de Educação do antigo Estado da Guanabara. É autor de vários livros que obtiveram larga divulgação no Brasil.

O Problema dos Três Marinheiros

> Um bom ensino de Matemática forma melhores hábitos de pensamento e habilita o indivíduo a usar melhor a sua inteligência.[1]
>
> IRENE DE ALBUQUERQUE

Esse problema, nos livros em que são estudadas as Recreações Matemáticas, é apresentado de várias maneiras, ou melhor, com diferentes enredos.

Com os recursos da Álgebra podemos resolvê-lo de um modo geral, e indicar a fórmula final para o cálculo da incógnita.

Designando por x o número das moedas, a solução seria:

$$x = 81k - 2$$

na qual o parâmetro *k* pode receber um valor qualquer (número natural) 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, ...

Os valores de *x* serão, respectivamente:

$$79, 160, 241, 322, 403, 484, \ldots$$

Qualquer termo dessa progressão poderá servir para o total das moedas no problema dos três marinheiros. É preciso, portanto, limitar o valor de *x*.

Havendo no enunciado a afirmação de que o número de moedas é superior a 200, e que não chegava a 300, o Homem que Calculava adotou o valor 241, que era o único que servia para o caso.

NOTA

[1] Do livro *Jogos e Recreações Matemáticas*, I vol., 3.ª ed., pág. 20. A professora Irene de Albuquerque, catedrática do Instituto de Educação do antigo Estado da Guanabara, é uma das figuras de maior realce em nosso magistério.

O Problema do Número Quadripartido

> Os números desempenharam sempre um papel de acentuado relevo não só nos altos campos da Fé e da Verdade, como nos humílimos terreiros da Superstição e do Erro.
>
> DR. ANTÔNIO GABRIEL MARÃO[1]

O chamado problema do *número quadripartido* é encontrado em muitos livros didáticos. São problemas de natureza puramente algébrica, que só deveriam ser incluídos na *Aritmética Recreativa*.

Em seu enunciado mais simples, o problema seria o seguinte:

"Dividir um número dado *A* em quatro partes tais que a 1.ª aumentada de *m*, a 2.ª diminuída de *m*, a 3.ª multiplicada por *m* e a 4.ª dividida por *m* deem o mesmo resultado."

Dois são os elementos fundamentais do problema:

1.º) O número *A* que deve ser quadripartido;

2.º) O operador *m*.

Com os recursos da Álgebra Elementar será fácil resolver, de modo geral, o problema.

A terceira parte (Z) do número *A* (aquela que deve ser multiplicada por *m*) pode ser obtida facilmente por meio da fórmula.

$$z = \frac{A}{(m+1)^2}$$

Obtido o valor de *z* podemos obter facilmente as outras três partes do número *A*:

A 1.ª parte será: mz – m

A 2.ª parte será: mz + m

A 4.ª parte será: mz x m

O problema só é possível quando *A* (número dado) é divisível por m + 1 ao quadrado. Deve ser, pelo menos, igual ao dobro de m + 1 ao quadrado.

NOTA

[1] Magistrado paulista de grande cultura. Professor de Matemática e conferencista. A frase citada, de grande conteúdo filosófico, foi proferida durante uma conferência em Botucatu (São Paulo).

O Problema da Metade do "X" da Vida

> Dois são os adjetivos que, segundo Poincaré, caracterizam o raciocínio matemático: rigoroso e fecundo.[1]
>
> LOUIS JOHANNOT

O Matemático diria que a vida do condenado deveria ser dividida em uma infinidade de períodos de tempos iguais, sendo esses períodos, portanto, infinitamente pequenos.

Cada período de tempo seria um *dt*. O tempo *dt* é muito menor do que a décima milionésima parte do milionésimo de um segundo!

Do ponto de vista da Análise Matemática, o problema não tem solução. A única fórmula, a mais humana e mais de acordo com o espírito de Justiça e de Bondade, foi a *fórmula* sugerida por Beremiz.

Sobre o conceito do infinitamente pequeno, convém ler: P. SERGUSUR, *Les Recherches sur l'Infini Mathématique*, Paris, 1949; MANUEL BALAZANT, *Introdución a la Matemática Moderna*, Buenos Aires, 1946.

NOTA

[1] Este pensamento encontra-se no livro *Le Raisonement Mathemátique de l'Adolescent*, de Louis Johannot. Essa obra tem prefácio de Jean Piaget.

O Problema das Pérolas do Rajá

> O raciocínio matemático tem por base certos princípios que são exatos e infalíveis.
>
> JOHN ADAMS[1]

O problema pode ser facilmente resolvido com auxílio da Álgebra Elementar. O número *x* de pérolas é dado pela fórmula:

$$x = (n - 1)^2$$

E, nesse caso, a primeira herdeira retiraria, da herança, uma pérola e $\frac{1}{n}$ do que restasse; a 2.ª herdeira retiraria duas pérolas e $\frac{1}{n}$ do que restasse. E assim por diante.

O número de herdeiros é $n - 1$.

Beremiz resolveu o problema para o caso em que *n* era igual a 7.

NOTA

1 John Adams, matemático e astrônomo inglês (1819-1892). A frase citada está em Moritz, *Memorabilia*, 126.

O Número 142. 857

> Os números governam o mundo.
>
> PITÁGORAS

Esse número 142.857 nada tem de *cabalístico*, nem de misterioso.

É obtido quando convertemos a fração 1/7 em número decimal.

Eis como é fácil verificar:

$$\frac{1}{7} = 0{,}142\ 857\ 142\ 857...$$

Trata-se de uma dízima periódica simples, cujo período é 142 857.

Poderíamos obter outros números, igualmente cabalísticos, convertendo, em dízimas periódicas simples, as frações ordinárias:

$$\frac{1}{13}, \frac{1}{17}, \frac{1}{31}, \text{ etc.}$$

Para um estudo completo desse problema, indicamos: MELLO E SOUZA, *Diabruras da Matemática*, Ed. Saraiva, 2.ª ed., pág. 189 e s.s.: E. FOURREI, *Récréations Arithmétiques*, Lib. Viubert, Paris, 1947, pág. 14; SANUEL I. JONES, *Mathematical Clubs and Recreations*, Tenn., U.S.A., 1940, pág. 121; A. BRUNEAU, *Imitations et Curiosités Mathématiques*, Paris, 1939, pág. 83.

O Problema de Diofante

> O epitáfio de Newton, na Abadia de Westminster (em Londres) é a fórmula que exprime o binômio a + b elevado à potência m. A maior glória de Newton foi ter, sobre seu túmulo, uma fórmula algébrica.
>
> CHAFI HADDAD[1]

O chamado Problema de Diofante, ou Epitáfio de Diofante, pode ser resolvido facilmente com auxílio de uma equação do 1.º grau com uma incógnita.

Designando por x a idade de Diofante, podemos escrever:

$$\frac{x}{6} + \frac{x}{12} + \frac{x}{7} + 5 + \frac{x}{2} + 4 = x$$

Resolvendo essa equação, achamos x = 84. É essa a solução do problema.

NOTA

[1] Matemático brasileiro. Catedrático da Faculdade Nacional de Arquitetura. É autor de vários trabalhos.

Glossário

das principais palavras, expressões, alegorias etc. de origem árabe, persa ou hindu, citadas neste livro.

Deixamos de incluir, neste Glossário, os verbetes de muitas palavras, cujos respectivos significados já foram dados em notas ao pé da página. Essas palavras serão seguidas de dois números: o primeiro indica o capítulo e o segundo a nota em que o significado é esclarecido.

A

Abás — 17, 1.
Adjamis — 14, 2.
Alcorão — Livro sagrado dos muçulmanos, cujo conteúdo foi revelado a Maomé, pelo Arcanjo Gabriel. De acordo com a Filosofia Dogmática do Islã, o Alcorão é obra exclusiva de Alá e sempre existiu, isto é, o Livro Sagrado figura entre as coisas incriadas.
Alá — Deus. Admite-se que o vocábulo Alá tenha se originado da voz Huu-u, que seria o ruído das tempestades. O vocábulo em apreço já era usual entre os árabes em período que remonta ao V Ante-Século. O Deus dos muçulmanos é o mesmo Deus dos judeus e o mesmo Deus dos cristãos.
Alá Badique, **Iá Sidi** — 13, 2.
Alá Sobre Ti — 5, 3.
Allahur Akbar — 25, 2.
Al-Latif — 33, 1.
Almenara — 5, 5.
Al- Schira — 17, 6.
Al-Uahhad — 29, 4.
Al-Vequil — 12, 5
Amine — 24, 2.
Ars — 12, 1. *Ver também* Preces.
Asrail — 11, 8.
Ayn — 6, 4.

B

Bagdá — Capital do Iraque, situada à margem do Rio Tigre. Foi a capital dos califas abássidas, sendo a sua construção atribuída a Al-Mansur, avô de Harum-al-Raschid (745-786). Foi destruída e saqueada em 1258.
Bagdadi ou **Bagdali** — Indivíduo natural de Bagdá.
Beduíno — De Bedui ou Beduin, o que é relativo à **Badaua**, vida primitiva; vida ao ar livre e em habitações que possam ser facilmente transportadas. Denominação dada, em geral, aos árabes nômades que vivem na África Setentrional, na Arábia e na Síria.

C

Caaba — Famoso templo na cidade de Meca, considerado como o primeiro edifício construído para adoração de Alá. Literalmente significa o cubo, pois a pedra, objeto de veneração entre os muçulmanos, é da forma de um hexaedro. Acreditam os árabes que essa pedra caiu do céu. (R. B.)

Cádi — Juiz. Aquele que julga. Os cádis eram escolhidos pelos califas e, de suas sentenças, em certos casos, não havia apelação alguma.

Cairota — Indivíduo natural do Cairo.

Califa — Título concedido ao chefe de Estado (muçulmano) que se julgava descendente de Maomé. O califa exercia o poder civil e religioso.

Califado — 2, 4.

Caminhos de Alá — 6, 3.

Caravançará — 3, 1.

Cate — 17, 1.

Catil — 19, 2.

Ceira —16, 12.

Chá-band — 16, 15.

Chamir — Chefe da caravana. Há também as formas **khebir, menir** e **delil**. **Khebir** vem do verbo **Khebeur**, que deveria significar "aquele que dá aviso". **Menir** vem do verbo **nar**, "que ilumina". **Delil** vem do verbo **deull**, que daria, em sua tradução, "aquele que mostra", "aquele que esclarece o caminho".

Cidade Santa — Meca.

Com Ele a Paz e a Glória — Essa expressão é proferida por um muçulmano para honrar o nome de uma pessoa, já falecida, por ele citada. É preciso, porém, que essa pessoa (pessoa citada) tenha sido um justo, um homem digno e possa ser incluído entre os eleitos de Deus.

Comendador dos Crentes — 4, 4.

Côvado — 12, 2.

D

Daroês — Espécie de monge muçulmano. O mesmo que dervixe. Na Índia tem o nome de faquir. Vive, em geral, como mendicante.

Délhi — Cidade da Índia.

Dhanoutara — 16, 5.

Divã — Salão de honra do palácio especialmente destinado às audiências do rei.

Djaciliana — Escrava de origem espanhola.

Djim — Melhor seria: **jino**. Termo da mitologia árabe. Espírito, ente, anjo ou demônio. Indivíduo que não pode ser visto. Espírito que inspira os poetas. Gênio.

E

Efrite — 17, 4.

El-Hadj — Título honroso concedido a muçulmano que fez a peregrinação a Meca. Veja na Dedicatória deste livro que o nome de Malba Tahan está precedido do título **el-hadj**.

El-Hilleh — Pequena povoação na estrada entre Bagdá e Báçora.

Emir — Comendador, chefe supremo, o maior na arte, na poesia, ou na política; descendente de dinastia real e nobre.

Emir dos Árabes — O mesmo que Emir dos Crentes.

Emir dos Crentes — Título honroso, concedido aos califas. Usado primeiramente pelo califa Abu-Baker, o sucessor do Profeta Maomé.

F

Fatihat — Primeira surata do Alcorão.

Filha de meu tio — Denominação dada por um árabe à própria esposa. O sogro (pai da esposa) é o **tio**. Expressão familiar e carinhosa.

Flor do Islã — Criatura delicada, meiga e formosa. Beleza fora do comum.

Fustan — Espécie de vestido que cobre o corpo todo. Traje feminino.

G

Garopeiro — 10, 1.

Grão-vizir — Termo estatal; designa o chefe do gabinete ou o primeiro-ministro, entre os árabes e nos países islâmicos de civilização árabe, criadora dessa função política, ainda em vigor em nosso tempo.

Guci — Ablução que precede a prece.

H

Hadiths — Melhor seria **hadices**, denominação dada a certas frases de elevada moral, mantidas pela tradição e que encerram ensinamentos atribuídos a Maomé ou aos companheiros do Profeta, que desfrutavam de merecido prestígio e autoridade em assuntos relativos à doutrina islâmica.

Hai al el-Salah — 12, 6.

Haic — 9, 8.

Hamã ou **Hamma** — 29, 2.

Haquim — Médico.

Haquim Oio-Ien — Oculista.

Hena — Tinta que as mulheres usam para pintar as unhas.

I

Iallah — 8, 9; 17, 7.

Ibn — São duas as formas, **Ibn** e **Ben**. A primeiro, **Ibn**, corresponde, de certo modo, ao ben dos hebreus. Assim, Nahum Ibn Nahum significaria **Nahum filho de Nahum**. É interessante observar que, pelo nome que figura na Dedicatória deste livro, Malba Tahan é bisneto de um certo Salim Hank.

Iclímia — 14, 2.

Iemenita — Indivíduo natural do Iêmen.

Imã — 17, 5.

Inch'Allah — 9, 8.

Irã — Nome pelo qual era conhecida a Pérsia, ou uma grande parte da Pérsia.

Irmão dos Árabes — Bom amigo. Excelente companheiro. Tratamento carinhoso. Não pode ser aplicado senão a um crente (islamita).

Islã — Esse termo é empregado em três sentidos: **a) Islã**, denominação dada à religião fundada por Maomé, em 622. Essa religião é denominada "muçulmana" (veja esse termo); **b) Islã**, conjunto de países que adotam a religião muçulmana; **c) Islã**, cultura, civilização árabe, de modo geral. A forma **Islã** é derivada do árabe **assa-lã**, que significa paz, harmonia, confraternização. **Islã** exprime, afinal, resignação à vontade de Deus.

Islamita — Crente do Islã. O mesmo que muçulmano. A forma "maometano", aplicada a um islamita, é considerada pejorativa. O muçulmano não é um maometano, mas sim um crente de Alá, um islamita. Maomé foi, apenas, o profeta de Alá.

J

Jamal — 3, 2.

K

Kaf — 6, 4.

Kelimet-Uallah — 6, 6; 14, 9.

Khebir — Título oferecido ao chefe de uma caravana. Melhor seria **Khabir**.

Khoi — Pequena aldeia da Pérsia. Está situada no Vale do Ararat. Todas as indicações geográficas, no Capítulo II, referentes à origem de Beremiz Samir, são rigorosamente certas.

Khol — Tinta para os olhos.

Kif — Melhor seria **quife**. Produto tirado do cânhamo, que os árabes usam como fumo. É um fumo que embriaga.

Kif El-Solha — Como passa de saúde?

L

Laore — Melhor seria Lahore. Província ou cidade da Índia.

Leilá — Nome feminino. Significa formosa, embriaguez dos poetas. Há as formas Laila e Leilah.

Livro da Lei — Alcorão. O mesmo que Livro de Allah. Livro de Allah — Trata-se do Alcorão. Refere-se ao **Livro de Deus**. **Livro Nobre** ou **Livro da Lei**.

M

Mabid — 25, 4.

Mac Allah — 4, 6.

Mahzma — 14, 5.

Maktub — 9, 5.

Marabu — Lugar onde é venerada a memória de um vulto de renome no Islã. Os muçulmanos ortodoxos sempre combatem o chamado **marabuzismo** (preocupação de conferir a certos mortos o poder de realizar milagres).

Maraçã — 12, 3.

Men Ein — 23, 1.

Minarete — 5, 5.

Mirza — 6, 11.

Moalakat — Antes do Islamismo era costume, entre os árabes, promoverem torneios literários, especialmente de Poesia. Muitos poetas participavam desses torneios de beleza e fantasia. Quando o poema de certo poeta era, de público, apontado como obra digna de admiração, não só pela forma, como pelas imagens, esse poema era escrito em letras de ouro sobre ricas telas. As letras eram bordadas por hábeis calígrafos e as telas, com os versos, eram colocadas no templo da Caaba. Essas telas eram chamadas **moalakat**, isto é, **expostas no alto**. Vários poetas, do V e do VI séculos, foram consagrados por suas **moalakats**.

Moharrã — 9,1.

Mogreb — prece da tarde.

Mutavit — Guia dos peregrinos que desejam visitar os lugares santos. O **mutavit** deve conhecer todas as orações e estar bem informado sobre os deveres dos fiéis.

N

Nazareno — 10, 9.

P

Parasanga — 13, 3 (M. D.).

Pérola do Islã — Denominação poética dada à Cidade de Meca.

Poleá — 16, 10.

Preces — A religião muçulmana impõe a prece como um dos cinco deveres básicos. O árabe é obrigado a fazer, durante o dia, cinco preces. Convém não esquecer que o dia, para o árabe, começa ao pôr do sol (a noite do dia 9, por exemplo, é a que segue ao dia 8). As orações são, pois, as seguintes: **Icha** ou **axá** — deve ser feita duas horas depois do pôr do sol, ou mesmo (a rigor) a qualquer hora da noite, durante o período em que o sol está oculto.

Sobh — deve ser feita ao nascer do sol. É a prece da madrugada. **Zohor** ou **Dôlur** é a prece do meio-dia. **Asr** ou **Asser** deve ser feita entre 3 e 5 horas da tarde. A hora dessa prece é fixada conforme o clima da região, ou a estação do ano. **Mogreb** deve ser feita ao pôr do sol. É a prece do crepúsculo. Cada prece é dedicada a uma figura de relevo para a vida do Islã e cujos nomes aparecem no Alcorão. Essas figuras são: Adão, Abraão, Jonas, Moisés e Jesus.

Profeta — O mesmo que Maomé. São correntes as expressões: Pelo túmulo do Profeta; Pela glória do Profeta; Pelos méritos do Profeta; Pelo nome do Profeta, etc., de que se utiliza o muçulmano ortodoxo para afirmar a sua certeza sobre um acontecimento qualquer, exaltar a sua admiração ou exprimir um pensamento.

Q

Qua Hyat En-Nebi — Pela vida do Profeta! Exclamação do árabe ortodoxo. Só pode ser proferida por um crente.

Quichatrias — 16, 1.

Quife — 7, 2.

R

Radj — 16, 2.

Ramadã — O nome do nono mês do calendário lunar. Mês da Quaresma muçulmana. Os árabes, durante o dia, guardam absoluto jejum.

Rati — Pequena semente que servia, na Índia, como unidade de peso, para joalheiros e mercadores de ouro. Afirmavam os entendidos que todas as sementes eram rigorosamente iguais (em peso). Era de largo emprego na fabricação de rosários.

Rei dos Árabes — 13, 1.

S

Salã — Quer dizer paz. Expressão de que se servem os árabes em suas saudações. Quando um maometano encontra outro, saúda-o nos seguintes termos: **Salã aleikum** (A paz de Deus esteja contigo). E, proferidas tais palavras, leva a mão direita à altura do coração. A resposta é: **Aleikum essalã** (Seja contigo a paz!). Da saudação árabe originou-se o termo **salamaleque**, introduzido em nosso idioma.

Samir — Significa: amigo. Há o feminino **Samira**.

Sejid — 13, 5.

Serendibe — 19, 1.

Sidi — Homem digno de respeito. Senhor.

Sifr — 20, 6.

Sippar — 4, 1.

Sobh — 18, 1.

Sudra — 16, 1.

Sufita — 10, 3.

Sunita — 8, 4.

Suque — 7, 1.

T

Tabessã — Pequenina.

Telassim — Talismã.

Timão — 5, 2.

U

Uallah — Por Deus!

Ulemá — Sábio. Doutor.

V

Vairkas — 16, 1.
Vedas — 16, 3.
Vichnu — 16, 6.
Vigário de Alá — 13, 1.
Vizir — 4, 4.

X

Xeque — Chefe; homem rico ou idoso, pessoa de prestígio. Chefe de uma tribo. No Líbano e na Síria (antes da guerra) era o título concedido aos que não pagavam impostos.
Xeque do Islã — 13, 1.
Xeque el-Medah — 17, 3.
Xerife — Nobre: título dos governadores de Meca; título dado aos descendentes de Ali Ibn Táleb, o quarto califa do Islã. Veja: 13, 5.

Índice

de autores, personagens históricos, matemáticos etc.

O número, entre parênteses, no final do verbete, indica o capítulo em que o autor ou personagem é citado. Só são dadas indicações sucintas sobre autores orientais.

A

Abla — Tornou-se famosa na Literatura Árabe por ter sido a apaixonada do poeta Antar (11).
Abul-Hassã Ali (1200-1280) — Natural de Alcalá, a Real, na Espanha. As suas obras mais notáveis são literárias. Alguns historiadores asseguram que esse erudito muçulmano morreu em 1274. Era apontado como astrólogo (28).
Al-Motacém — O califa citado neste livro subiu ao trono de Bagdá no ano 1242, que corresponde ao ano 640 da Hégira. Era um soberano bondoso e simples. Governou durante dezesseis anos, isto é, até a invasão dos mongóis em 1258. A sua morte ocorreu precisamente no dia 10 de fevereiro de 1258. Al-Motacém pereceu aos quarenta anos de idade. Cf. Noel des Verges. *Arabie*, pág. 467 e s.s.
Antar — Poeta e guerreiro árabe, autor de uma Moalakat de rara inspiração. Era negro, filho de uma escrava abissínia. O seu amor por Abla (sua prima) inspirou poemas de extraordinária beleza, verdadeiro tesouro da Literatura Árabe. Viveu no século VI e seu nome completo era Ibn Shaddad Antar.
Aria Bata — Astrônomo e matemático hindu. Alguns historiadores exaltam o nome de Aria Bata (ou Arybatta) como o primeiro algebrista de certo vulto nos domínios das ciências abstratas. Na sua atividade de astrônomo elucidou a causa do movimento de rotação da Terra. Morreu no século VI e deixou várias obras.
Al-Kharismi — Ver no *Apêndice*.
Apostama — Matemático hindu. Não se conhece, com precisão, a época em que viveu. Possivelmente no século IV. É citado por A. F. Vasconcelos em sua *História da Matemática* (18).
Arquimedes — (2, 14 e 17).
Aristóteles — (18).
Asad-Abu-Carib — Rei do Iêmen, filho de Colaicard. Subiu ao trono por volta do ano 160. Pereceu assassinado por conspiradores (11).

B

Bháskara — Famoso geômetra hindu. Floresceu no século XII. A sua obra mais conhecida é *Lilaváti* (18).

C

Campos (Humberto de) — (10).
Cícero — (29).
Condorcet — (24).
Corneille — (21).

D

Diofante — (24).

E

Eratóstenes — (27).
Euclides — (19).

G

Gibran Khalil Gibran — Poeta e filósofo libanês (1883-1931).

H

Hierão — (24).
Hipátia — (9).
Houlagou — Príncipe mongol (1217-1265), filho de Touly, e neto de Gêngis Khan. Homem bárbaro, sanguinário e de torpes sentimentos. Arrasou Bagdá.

K

Khayyám — Famoso geômetra, astrônomo e filósofo. Foi também poeta notável. O seu nome completo era o seguinte: Omar Ibrahim al Khayyám Gitat-ad-Din Abu'l Falh. Nasceu em 1048 e faleceu em 1123. Al-Khayyám significa: o fabricante de tendas (20, 32).

L

Labid — Famoso poeta árabe contemporâneo de Maomé. As suas obras foram traduzidas para o francês pelo orientalista S. de Sacy. Conta-se que Labid, já bastante idoso, ao ouvir o Profeta declamar um trecho do Alcorão ficou profundamente emocionado. Abandonou a Poesia e dedicou-se exclusivamente à Religião. Faleceu no ano 662. O seu nome completo era Rabia Abul Akil Labid (13).
Lacerda — (Nair) — (34).
Lamartine — (32).

M

Maçudi — Grande historiador e geógrafo árabe. Nasceu em Bagdá e era descendente de um dos companheiros de Maomé. Eis o seu nome na íntegra: Abul Hassã Ali Ben Al Husain al Maçudi. Deixou muitas obras notáveis. As mais interessantes já foram traduzidas. Faleceu no ano 936 com setenta e dois anos (30).
Mohalhil — (13).
Maomé — Melhor seria *Mohammed*, ou ainda Mafoma. Fundador do Islamismo. Um dos grandes vultos da Humanidade. Pertencente a um ramo da família coraixita, encarregado da guarda e administração da Caaba, nasceu Mafoma em Meca, em 571, e ali morreu em 632.
Murad — (Anis) — (7).

O

Otmã — O terceiro dos califas, genro de Maomé. Foi um dos vultos mais notáveis na História do Islã. Faleceu no ano 656. Foi assassinado por inimigos que conspiravam contra o seu governo (15).

P

Pitágoras — (18, 21).
Platão — (8).

R

Rhazes — Médico árabe de extraordinário renome (865-925). Exerceu a clínica no Hospital de Bagdá e chegou a ter muitos discípulos. Era apelidado *O Observador* (21).

S

Salomão — A morte de Salomão é descrita pelo Sr. Mussa Kuraiem, em seu livro, *Os Califas de Bagdá*, S. Paulo, 1942, pág. 235. Vamos transcrever o trecho que nos parece de interesse para o leitor: "A morte surpreendeu-o de pé, apoiado em seu bastão. À serena fisionomia do profeta quando o cajado lhe escapou e o corpo, perdido o apoio, desaprumando-se, caiu ao solo, compreenderam os grandes da corte que o profeta havia morrido. Sete anos e sete meses depois, morria Belkiss, por sua vez. Seu corpo foi transportado para Tadmor (Palmira), e sepultado em lugar que permaneceu ignorado até o dia em que uma torrente de chuva, caída sobre a cidade, pôs a descoberto um ataúde de pedra amarela como açafrão, sobre o qual se via a inscrição seguinte: 'Aqui repousa a virtuosa Belkiss, esposa de Suleimán Ben David.' Abraçou a verdadeira fé no vigésimo ano do reinado desse profeta, que a havia tomado por esposa, no décimo dia do mês de Moharã (primeiro mês do ano Rabih) (terceiro mês do ano) vinte e sete anos depois que Suleimán havia subido ao trono. Ela foi sepultada de noite, sob os muros de Tadmor, e só aqueles que a sepultaram sabem o lugar dos seus restos mortais." (10).
Silva (Domingos Carvalho da) — (34).
Soares (Fernandes) — (24).
Souza (João Baptista de Mello e) — (32).
Souza (Octavio Tarquinio de) — (20).
Staël (Madame de) — (21).

T

Tarafa — Poeta árabe do século IV. Teve vários dos seus poemas traduzidos para o francês, para o italiano e para o alemão. Chamava-se Ibn Al-Abd al Bakki Tarafa. Foi o maior dos poetas anti-islâmicos. Viveu no século V.
Tagore — Poeta indiano (1861-1941). Nasceu em Calcutá e foi autor de poemas notáveis da mais alta inspiração mística. O seu livro *Lua Crescente* inspirou, no Brasil, dezenas de imitadores. O seu nome completo é Rabindranath Tagore (14, 15, 20, 25, 33 e 34).
Tigre (Bastos) — (24).

Bibliografia

Para a elaboração do Glossário, das Notas e do Índice de autores, foram consultadas muitas obras. Limitamo-nos a apontar, apenas, as seguintes:

ADOLFO FREDERICO SCHACK — *Poesía y Arte de Los Árabes en España y Sicilia*. Paris, 1955.
Encyclopédie de l'Islam — Paris, 1913.
F. DUMAS (General) — *Le Grand Desert* — Paris, 1886.
FELIX M. PAREJA — *Islamologia, Madri*, 1954 (dois volumes).
FRANÇOIS BALSAN — *A travers l'Arabie Inconnue*, Paris, 1954.
GUSTAVE LE BON — *La Civilisation des Arabes*, Paris, 1884.
JACQUES C. RISLER — *La Civilisation Arabe*, Paris, 1955.
JAMIL SAFADY — *Língua Árabe*, S. Paulo, 1950.
LOUIS-CHARLES WATELIN — *La Perse Immobile*, Paris, 1921.
M. NOEL DES VERGES — *Arabie, Paris*, 1847.
MUSA KURAYEM — *Os Califas de Bagdá*, S. Paulo, 1942.
PHILIP K. HITTE — *Os Árabes*, S. Paulo, 1948.
RAGY BASILE — *Vocábulos Portugueses Derivados do Árabe*, Rio, 1942.
R. H. KIERMAN — *L'Exploration de l'Arabie*, Paris, 1938.
RICHARD RINELEY — *Star Names*, Ed. de 1963.
R. V. C. BODLEY — *El Mensajero* (La Vida de Mahoma), Buenos Aires, 1949.
SEBASTIÃO DALGADO (Monsenhor) — *Glossário Luso-Asiático*, Coimbra, 1921, dois volumes.

Este e-book foi desenvolvido em formato ePub pela Distribuidora Record de Serviços de Imprensa S. A.

O homem que calculava

Página do livro na Wikipédia
http://pt.wikipedia.org/wiki/O_Homem_que_Calculava

Página do livro no Skoob
http://www.skoob.com.br/livro/1155

Resumo do livro
http://www.netsaber.com.br/resumos/
ver_resumo_c_837.html

Site do autor
http://www.malbatahan.com.br/

Página do autor na Wikipédia
http://pt.wikipedia.org/wiki/J%C3%BAlio_C%C3%A9sar_
de_Melo_e_Sousa

Biografia do autor no site Infoescola
http://www.infoescola.com/biografias/malba-tahan/

Malba Tahan

Recreações e curiosidades da Matemática, que transformam a aridez dos números e a exigência de raciocínio numa brincadeira, ao mesmo tempo útil e recreativa. Eis, em síntese, o que é *Matemática Divertida e Curiosa:* o Professor Júlio César de Mello e Souza, sob pseudônimo de Malba Tahan, consegue um verdadeiro milagre: a união da ciência com o lúdico, transformando sua leitura num agradável passatempo.

MATEMÁTICA DIVERTIDA E CURIOSA

ISBN 85-01-03375-8

03375/3

9 788501 033758

Malba Tahan MATEMÁTICA DIVERTIDA E CURIOSA

Prof. Júlio César de Mello e Souza

Malba Tahan

AUTOR DE O HOMEM QUE CALCULAVA

MATEMÁTICA DIVERTIDA E CURIOSA

RECORD

15ª EDIÇÃO

CIP-Brasil Catalogaçao-na-fonte
Sindicato Nacional dos Editores de Livros, RJ.

Souza, Júlio César de Mello e, 1895-1974
S715m Matemática divertida e curiosa / Mello e Souza
IPed - 15" ed. - Rio de Janeiro: Record, 2001.

1. Matemática -Curiosidades. 1. Título.

91-0560 CDD - 510
CDU-51

Impresso no Brasil pelo
Sistema Cameron da Divisão Gráfica da
DISTRIBUIDORA RECORD DE SERVIÇOS DE IMPRENSA S.A.
Rua Argentina 171 - Rio de Janeiro, RJ - 20921-380 - Tel.: 585-2000

ISBN 85-01-03375-8

PEDIDOS PELO REEMBOLSO POSTAL
Caixa Postal 23.052
Rio de Janeiro, RJ - 20922-970

EDITORA AFILIADA

Prefácio

O presente volume contém exclusivamente recreações e curiosidades relativas à Matemática Elementar. Não foram, portanto, incluídas nesta obra as variedades e problemas que envolvessem números transcendentes, funções algébricas, logaritmos, expressões imaginárias, curvas trigonométricas, geometrias não-euclidianas, funções moduladas etc.

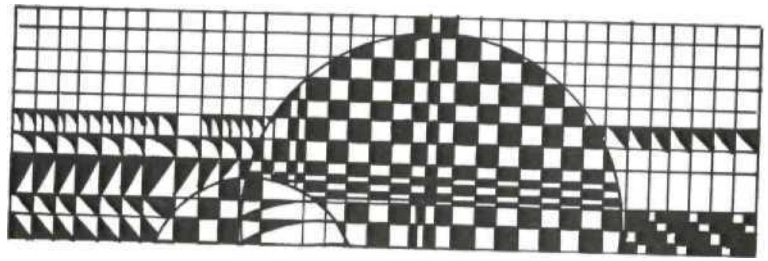
Achamos que seria mais interessante não dividir a matéria que constitui este livro em partes distintas segundo a natureza dos assuntos — Aritmética, Álgebra, Geometria etc. Assim, os leitores encontrarão entrelaçados — sem que tal disposição obedeça a lei alguma — problemas numéricos, anedotas, sofismas, contos, frases célebres etc.

Abolimos por completo as demonstrações algébricas complicadas e as questões que exigissem cálculos numéricos trabalhosos. Certos capítulos da Matemática são aqui abordados de modo elementar e intuitivo; não teriam mesmo cabimento, em um livro desta natureza, estudos desenvolvidos sobre os quadrados mágicos, sobre os números amigos ou sobre a divisão áurea.

Os professores de Matemática — salvo raras exceções — têm, em geral, acentuada tendência para o algebrismo árido e enfadonho. Em vez de problemas práticos, interessantes e simples, exigem sistematicamente de seus alunos verdadeiras charadas, cujo sentido o estudante não chega a penetrar. É bastante conhecida a frase do geômetra famoso que, depois de uma aula na Escola Politécnica, exclamou radiante: "Hoje, sim, estou satisfeito! Dei uma aula e ninguém entendeu!"

O maior inimigo da Matemática é, sem dúvida, o algebrista — que outra coisa não faz senão semear no espírito dos jovens essa injustificada aversão ao estudo da ciência mais simples, mais bela e mais útil. Lucraria a cultura geral do povo se os estudantes, plagiando a célebre exigência de Platão, escrevessem nas portas de suas escolas: "Não nos venha lecionar quem for algebrista."

Essa exigência, porém, não devia ser... platônica!



MATEMÁTICOS FEITICEIROS

Conta-nos Rebière[1] que o czar Ivan IV, apelidado o Terrível, propôs, certa vez, um problema a um geômetra de sua corte. Tratava-se de determinar quantos tijolos seriam necessários à construção de um edifício regular, cujas dimensões eram indicadas. A resposta foi rápida e a construção feita veio, mais tarde, demonstrar a exatidão dos cálculos. Ivan, impressionado com esse fato, mandou queimar o matemático, persuadido de que, assim procedendo, livrava o povo russo de um feiticeiro perigoso.

François Viète[2] — o fundador da Álgebra Moderna — foi também acusado de cultivar a feitiçaria.

Eis como os historiadores narram esse curioso episódio:

"Durante as guerras civis na França, os espanhóis serviam-se, para correspondência secreta, de um código em que figuravam cerca de 600 símbolos diferentes, periodicamente permutados segundo certa regra que só os súditos mais íntimos de Filipe II conheciam. Tendo sido, porém, interceptado um despacho se-

[1] Rebière — *Mathémaliques e mathématiciens.*
•Matemático francês. Nasceu em 1540 e faleceu em 1603.

creto da Espanha, Henrique IV, rei da França, resolveu entregar a sua decifração ao gênio maravilhoso de Viète. E o geômetra não só decifrou o documento apreendido como descobriu a palavra escrita no código espanhol. E dessa descoberta os franceses se utilizaram, com incalculável vantagem, durante dois anos.

Quando Filipe II soube que seus inimigos haviam descoberto o segredo do código tido até então como indecifrável, foi presa de grande espanto e rancor, apressando-se em levar ao papa Gregório XIII a denúncia de que os franceses, "contrariamente à pratica da fé cristã", recorriam aos sortilégios diabólicos da feitiçaria, denúncia a que o sumo pontífice não deu a mínima atenção.

Não deixa, porém de ser curioso o fato de ter sido Viète — por causa de seu talento matemático — incluído entre os magos e feiticeiros de seu tempo."[3]

A GEOMETRIA

A Geometria é uma ciência de todas as espécies possíveis de espaços.

Kant

CRIATURAS FENOMENAIS

O escritor francês Alphonse Daudet, no seu livro *Tartarin de Tarascon* (p. 186) conta-nos um episódio de que destacamos o seguinte passo:

"Atrás do camelo quatro mil árabes corriam, pés nus, gesticulando, rindo como loucos e fazendo rebrilhar ao sol seiscentos mil dentes mui alvos."

'Cf o artigo "François Viète" do livro *Álgebra — 3º ano*, de Cecil Thiré e Mello e Souza

Uma simples divisão de números inteiros nos mostra que Daudet, cuja vivacidade de espírito é inconfundível, atribuiu um total de 150 dentes para cada árabe, transformando os quatro mil perseguidores em criaturas fenomenais.

O PROBLEMA DOS ABACAXIS

Dois camponeses, *A* e *B*, encarregaram um feirante de vender duas partidas de abacaxis.

O camponês *A* entregou 30 abacaxis, que deviam ser vendidos à razão de 3 por 1$000; *B* entregou, também, 30 abacaxis para os quais estipulou preço um pouco mais caro, isto é, à razão de 2 por 1$000.

Era claro que, efetuada a venda, o camponês *A* devia receber 10$000 e o camponês *B*, 15$000. O total da venda seria, portanto, de 25$000.

Ao chegar, porém, à feira, o encarregado sentiu-se em dúvida.

— Se eu começar a venda pelos abacaxis mais caros, pensou, perco a freguesia; se inicio o negócio pelos mais baratos, encontrarei, depois, dificuldade para vender os outros. O melhor que tenho a fazer é vender as duas partidas ao mesmo tempo.

Chegado a essa conclusão, o atilado feirante reuniu os 60 abacaxis e começou a vendê-los aos grupos de 5 por 2$000. O negócio era justificado por um raciocínio muito simples:

— Se eu devia vender 3 por 1$000 e depois 2 também, por 1$000, será mais simples vender, logo, 5 por 2$000, isto é, à razão de 400 réis cada um.

Vendidos os 60 abacaxis, o feirante apurou 24$000.

Como pagar os dois camponeses se o primeiro devia receber 10$000 e o segundo 15$000?

Havia uma diferença de 1$000 que o homenzinho não sabia como explicar, pois tinha feito o negócio com o máximo cuidado.

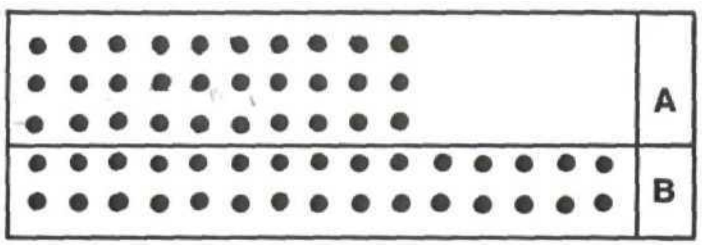
E, intrigadíssimo com o caso, repetia dezenas de vezes o raciocínio feito sem descobrir a razão da diferença:

— Vender 3 por 1$000 e, depois, vender 2 por 1$000 é a mesma coisa que vender logo 5 por 2$000!

E o raio da diferença de dez tostões a surgir na quantia total! E o feirante ameaçava a Matemática com pragas terríveis.

A solução do caso é simples e aparece, perfeitamente indicada, na figura abaixo. No retângulo superior estão indicados os abacaxis de *A* e no retângulo inferior, de *B*.

O feirante só dispunha — como a figura mostra — de 10 grupos que podiam ser vendidos, sem prejuízo, à razão de 5 por 2$000. Vendidos esses 10 grupos restavam 10 abacaxis que pertenciam exclusivamente ao camponês *B* e que portanto não podiam ser vendidos senão a 500 réis cada um.

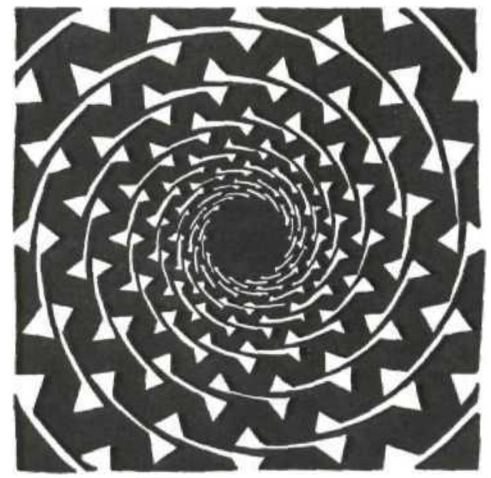


Resultou daí a diferença que o camponês verificou ao terminar o negócio, e que nunca pôde explicar!

AS INVENÇÕES DA MATEMÁTICA

Descartes

A Matemática apresenta invenções tão sutis que poderão servir não só para satisfazer os curiosos como, também, para auxiliar as artes e poupar trabalho aos homens.



ILUSÃO DE ÓTICA

A pessoa que examinar com atenção a curiosa figura acima será capaz de jurar que as curvas que nela aparecem são espirais perfeitas.

Essa afirmação é errónea. A figura constitui uma notável ilusão de ótica imaginada pelo Dr. Frazer.

Todas as curvas do desenho são círculos perfeitos. Um simples compasso trará essa certeza ao espírito do observador.

O PAPIRO RHIND

Um colecionador inglês chamado Rhind adquiriu um documento antiquíssimo encontrado pelos árabes entre as ruínas dos túmulos dos faraós. Consistia esse documento — conforme provaram os sábios que o traduziram — num papiro escrito vinte séculos antes de Cristo por um sacerdote egípcio chamado Ahmés.

Ninguém pode avaliar a dificuldade que os egiptólogos encontraram para levar a termo a tarefa de decifrar o papiro. No velho documento tudo aparece confuso e emaranhado! Subordinado a um título pomposo — *Regras para inquirir a natureza, e para saber tudo que existe, cada mistério, cada segredo*—, não passa afinal o célebre papiro de um caderno de aluno contendo exercício de escola. É essa a opinião de um cientista notável, chamado Revillout, que analisou com o maior cuidado o documento egípcio.

O papiro contém problemas de Aritmética, questões de Geometria e várias regras empíricas para o cálculo de áreas e de volumes.

Vamos incluir aqui, a título de curiosidade, um problema do papiro:

> *Dividir 700 pões por 4 pessoas de modo a caber dois terços à primeira, um meio à segunda, um terço à terceira e um quarto à quarta.*

No papiro de Ahmés — segundo mostrou o prof. Raja Gabaglia[4] —, em vários problemas a adição e a subtração aparecem indicadas por um sinal representado por duas pernas. Quando essas pernas estavam voltadas na direção da escrita, representavam *mais;* quando voltadas na direção oposta, indicavam *menos.* Foram esses, talvez, os primeiros sinais de operação usados em Matemática.

E o colecionador Rhind — por causa desse papiro — ficou célebre em Matemática sem ter jamais cultivado o estudo dessa ciência.

Raja Gabaglia — "O mais antigo documento de matemática que se conhece", 1899, p. 16.

A ECONOMIA DO PÃO-DURO

Um avarento — que o povo apelidara Pão-Duro —, movido pela mania mórbida de ajuntar dinheiro, resolveu, certa vez, economizar da seguinte forma: no primeiro dia do mês, guardaria num cofre 1 vintém; no segundo dia, 2 vinténs; no terceiro dia, 4 vinténs; no quarto dia, 8 vinténs e, assim, dobrando sucessivamente, durante trinta dias seguidos.

Quanto teria o Pão-Duro amealhado, desse modo, quando terminasse o mês? Mais de um conto de réis? Menos de um conto?

Para que o leitor não se sinta embaraçado, vamos dar alguns esclarecimentos.

Ao fim de uma semana, ou melhor, oito dias depois, o avarento teria economizado apenas 255 vinténs, isto é, 5$100.

E no fim das 4 semanas?

Um professor de Matemática propôs esse problema de improviso a uma turma de 50 estudantes. A solução devia ser dada mentalmente.

Um dos alunos respondeu logo que a soma não passaria de 500$000.

Outro avaliou em dois contos de réis a quantia final.

Um terceiro, inspirado por alguma desconfiança sobre o resultado do problema, assegurou que o Pão-Duro teria quase 200 contos de réis.

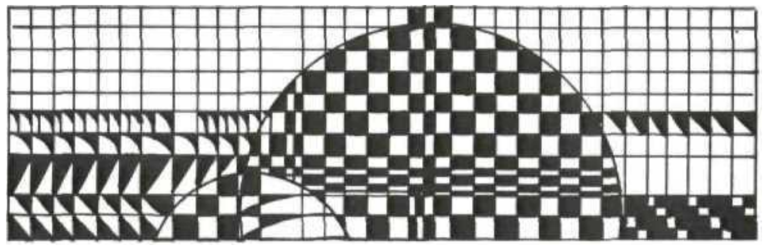
— Não chega a 100 contos! — afirmou com segurança o primeiro calculista da turma.

E afinal não houve um único estudante que dissesse um resultado aproximadamente verdadeiro.

Ao cabo de 30 dias, o avarento teria economizado um número de vinténs igual a 1073741824, o número que equivale à quantia de 21.474:836:480. Mais de vinte e um mil contos! O leitor não acredita? Faça então as contas e verifique como esse resultado é precisamente exato!

OS CÉLEBRES GEÔMETRAS

TALES DE MILETO — *célebre astrónomo e matemático grego. Viveu cinco séculos antes de Cristo. Foi um dos sete sábios da Grécia e fundador da escola filosófica denominada Escola Jônica. Foi o primeiro a explicar a causa dos eclipses do Sol e da Lua. Descobriu várias proposições geométricas. Morreu aos noventa anos de idade, asfixiado peta multidão, quando se retirava de um espetáculo.*



QUANTOS VERSOS TÊM 05 *LUSÍADAS ?*

Como todos sabem, Os Lusíadas *apresentam 1102 estrofes e cada estrofe contém 8 versos.*
Quantos versos tem todo o poema?

Apresentado esse problema, a uma pessoa qualquer, ela responderá na certa:

— Isso é uma pergunta infantil. Basta multiplicar 1.102 por 8. *Os Lusíadas* têm 8.816 versos.

Pois essa resposta, com grande surpresa para os algebristas, não está certa. *Os Lusíadas,* embora tendo 1.102 estrofes com 8 versos cada uma, apresentam 8.814 versos e não 8.816, como era de esperar.

A razão é simples. Há neles dois versos repetidos, que não podem ser, portanto, contados duas vezes.

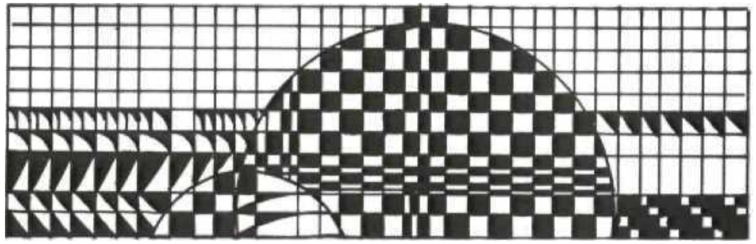
Ainda um novo problema sobre o número de versos do célebre poema épico português:

Quantos versos tem Camões em Os Lusíadas?

Aquele que responder que o imortal poeta compôs 8.114, julgando, desta vez, acertar, erra redondamente!

Camões apresenta em *Os Lusíadas* apenas 8.113 versos, pois dos 8.114 é preciso descontarmos um verso de Petrarca,[5] incluído na estrofe 78 do Canto IX.

***O verso do lírico italiano é o seguinte: "Fra Ia spica e Ia man qual muro ho messo", e corresponde ao provérbio português: "Da mão à boca se perde muitas vezes a sopa."**



PRODUTOS CURIOSOS

Alguns números, resultantes da multiplicação de fatores inteiros, apresentam seus algarismos dispostos de um modo singular. Esses números, que aparecem nos chamados *produtos curiosos*, têm sido objeto da atenção dos matemáticos.

Citemos alguns exemplos.

Tomemos o número 12345679 no qual figuram, na ordem crescente de seus valores, todos os algarismos significativos à exceção do 8.

Multipliquemos esse número pelos múltiplos de 9, a saber: 9, 18, 27, 36 etc, e obtemos:

$$\begin{aligned}12345679 \times 9 &= 111111111\\ 12345679 \times 18 &= 222222222\\ 12345679 \times 27 &= 333333333\\ 12345679 \times 36 &= 444444444\end{aligned}$$

Vemos que o produto é dado por um número de 9 algarismos iguais.

Os produtos que abaixo indicamos contêm um fator constante igual a 9

9 X 9 = 81
9 x 98 = 882
9 X 987 = 8883
9 X 9876 = 88884

apresentam, também, uma singularidade. Neles figura o algarismo 8 repetido 1, 2, 3 vezes etc, conforme o número de unidade do último algarismo à direita.

A GEOMETRIA

O espaço é o objeto que o geômetra deve estudar.

Poincaré

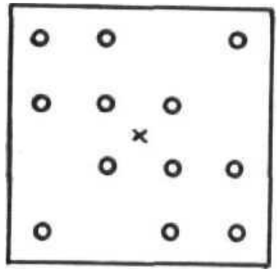
A HERANÇA DO FAZENDEIRO

Um fazendeiro deixou como herança para os seus quatro filhos um terreno em forma de um quadrado no qual havia mandado plantar 12 árvores.

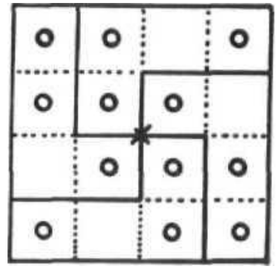
O terreno devia ser dividido em 4 partes geometricamente iguais, contendo cada uma delas o mesmo número de árvores.

A figura II, à direita, indica claramente como devia ser repartido o terreno de modo que fossem obedecidas as exigências impostas pelo fazendeiro.

(I)



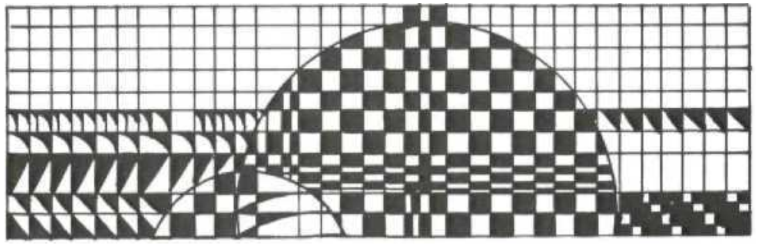
(II)



ORIGEM DO SINAL DE ADIÇÃO

O emprego regular do sinal + (mais) aparece na *Aritmética Comercial* de João Widman d'Eger publicada em Leipzig em 1489.

Os antigos matemáticos gregos, como se observa na obra de Diofanto, limitavam-se a indicar a adição justapondo as parcelas — sistema que ainda hoje adotamos quando queremos indicar a soma de um número inteiro com uma fração. Como sinal de operação *mais* usavam os algebristas italianos a letra *P*, inicial da palavra latina *plus*.



NÚMEROS AMIGOS

Certas propriedades relativas aos números inteiros recebem denominações curiosas, que não raras vezes surpreendem os espíritos desprevenidos ou não afeitos aos estudos das múltiplas transformações aritméticas. Alguns matemáticos procuram dentro da ciência abrir campos largos onde possam fazer aterrar — com a perícia de grandes pilotos — as mais extravagantes fantasias.

Citemos, para justificar a nossa asserção, o caso dos chamados números amigos, que são minuciosamente estudados em vários compêndios.

Como descobrir, perguntará o leitor, entre os números aqueles que estão presos pelos laços dessa amizade matemática? De que meios se utiliza o geômetra para apontar, na série numérica, os elementos ligados pela estima?

Em duas palavras podemos explicar em que consiste o conceito de números amigos em Matemática.

Consideremos, por exemplo, os números 220 e 284.

O número 220 é divisível exatamente pelos seguintes números:

1, 2, 4, 5, 10, 11, 20, 22, 44, 55 e 110

São esses os divisores de 220 e menores que 220.

O número 284 é, por sua vez, divisível exatamente pelos seguintes números:

1, 2, 4, 71 e 142

São esses os divisores de 284, e menores que 284.

Pois bem. Há entre esses dois números uma coincidência realmente notável. Se somarmos os divisores de 220 acima indicados, vamos obter uma soma igual a 284; se somarmos os divisores de 284, o resultado será igual a 220. Dizem por isso os matemáticos que esses dois números são *amigos*.

Há uma infinidade de números amigos, mas até agora só foram calculados 26 pares.

Tomemos, por exemplo, o número 6, que é divisível pelos números 1, 2 e 3. A soma desses números (1 + 2 + 3) é igual a 6. Concluímos, portanto, que o número 6 é amigo de 6 mesmo, ou seja. é amigo dele próprio.

Já houve quem quisesse inferir desse fato ser o 6 um número egoísta.[6]

Mas isso — como diria Kipling — já é outra história...

A HIPÉRBOLE DE UM POETA

Guilherme de Almeida, um dos nossos mais brilhantes poetas, tem no seu livro *Encantamento* (p. 57) uma linda poesia na qual incluiu os seguintes versos:

E como uma cobra,
corre mole e desdobra
então,
em hipérboles lentas
sete cores violentas
no chão.

[6]Leia o artigo subordinado ao **título** "Números perfeitos", neste mesmo livro.

A linda e original imagem sugerida pelo talentoso acadêmico não pode ser, infelizmente, admitida em Geometria. Uma hipérbole é uma curva do *2º* grau, constituída de dois ramos, logo uma cobra, a não ser partida em quatro pedaços, jamais poderá formar *hipérboles lentas no chão.*

Em *Carta a minha noiva*, encontramos uma interessante expressão geométrica empregada também pelo laureado vate:

é no centro
desse círculo que hás de ficar
como um ponto;
ponto final do longo e aborrecido conto.

Para que alguma coisa possa ficar no centro de um círculo, deve ser, previamente, é claro, reduzida a um ponto, pois, segundo afirmam os matemáticos, o centro de um círculo é um ponto...

E, nesse "ponto", Guilherme de Almeida tem razão.

A MATEMÁTICA DOS CALDEUS

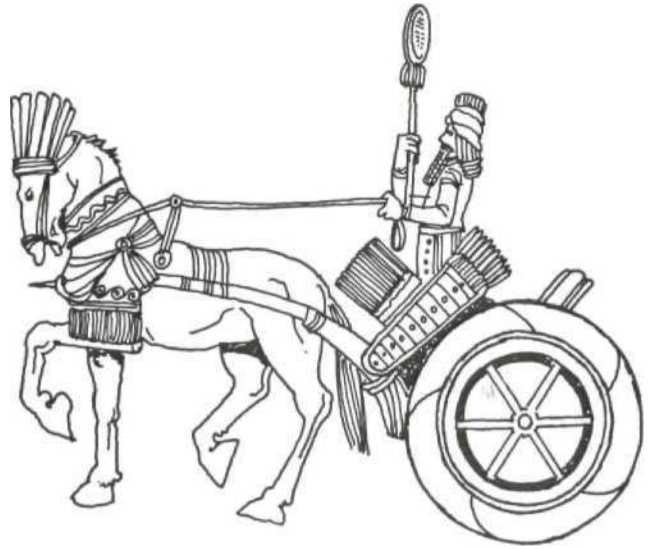
Certos documentos concernentes à Matemática dos Caldeus datam de 3000 a.C.,[7] ao passo que os documentos egípcios mais antigos precedem cerca de 1700 da era cristã.

Os fragmentos que vieram revelar à ciência o desenvolvimento da Matemática na famosa Babilônia são vastos, é verdade, mas completamente isolados uns dos outros.

Os caldeus adotavam — e a tal respeito não subsiste mais dúvida alguma — um sistema de numeração que tinha por base o número 60, isto é, no qual 60 unidades de uma ordem formam uma unidade de ordem imediatamente superior. E com tal sistema chegavam apenas ao número 12960000, que corresponde à quarta potência da base 60.

[6]Abel Rey.

A Geometria dos caldeus e assírios tinha um caráter essencialmente prático e era utilizada nos diversos trabalhos rudimentares de agrimensura. Sabiam decompor, para determinação da área, um terreno irregular em triângulos retângulos, retângulos e trapézios. As áreas do quadrado (como caso particular do retângulo), do triângulo retângulo e do trapézio são corretamente estabelecidas. Chegaram também (3000 a.C!) ao cálculo do volume do cubo, do paralelepípedo e talvez do cilindro.[8]

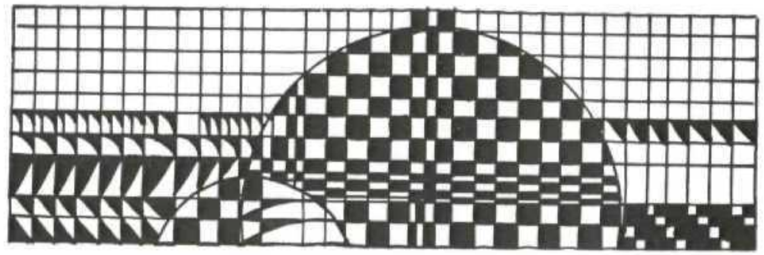


É interessante assinalar que na representação dos carros assírios as rodas apareciam sempre com 6 raios, opostos diametralmente e formando ângulos centrais iguais. Isso nos leva a concluir, com segurança, que os caldeus conheciam o hexágono regular e sabiam dividir a circunferência em 6 partes iguais. Cada uma dessas partes da circunferência era dividida em 60 partes também iguais (por causa do sistema de numeração) resultando daí a divisão total da circunferência em 360 partes ou graus.

[8]H. G. Zeuthen — *História da Matemática.*

O MOINHO DE FARADAY

Dizia Faraday, o célebre químico: A Matemática é como um moinho de café que mói admiravelmente o que se lhe dá para moer, mas não devolve outra coisa senão o que se lhe deu.



O NÚMERO 142857

Quando nos referimos aos *produtos curiosos,* procuramos destacar as singularidades que apresentam certos números pela disposição original de seus algarismos. O número 142857 é, nesse gênero, um dos mais interessantes da Matemática e pode ser incluído entre os chamados *números cabalísticos.*

Vejamos as transformações curiosas que podemos efetuar com esse número.

Multipliquemo-lo por 2. O produto será:

$$\begin{array}{r} 142857 \\ 2 \\ \hline 285714 \end{array}$$

Vemos que os algarismos do produto são os mesmos do número dado, escritos, porem, em outra ordem.

Efetuemos o produto do número 142857 por 3.

$$142857 \times 3 = 428571$$

Ainda uma vez observamos a mesma singularidade: os algarismos do produto são precisamente os mesmos do número, alterada apenas a ordem.

A mesma coisa ocorre, ainda, quando o número é multiplicado por 4, 5 e 6.

142857 x 4 = 571428
142857 x 5 = 714285
142857 X 6 = 857142

Uma vez chegado ao fator 7, vamos notar outra particularidade. O número 142857 multiplicado por 7 dá para produto

999999

formado de seis noves!

Experimentem multiplicar o número 142857 por 8. O produto será:

$$\begin{array}{r} 142857 \\ 8 \\ \hline 1142856 \end{array}$$

1142856

Todos os algarismos do número aparecem ainda no produto, com exceção do 7. O 7 do número dado foi decomposto em duas partes 6 e 1. O algarismo 6 ficou à direita, e o 1 foi para a esquerda completar o produto.

Vejamos agora o que acontece quando multiplicamos o número 142857 por 9:

$$\begin{array}{r} 142857 \\ 9 \\ \hline 1285713 \end{array}$$

Observem com atenção esse resultado. O único algarismo do multiplicando que não figura no produto é o 4. Que teria acontecido com esse 4? Aparece decomposto em duas parcelas 1 e 3 colocadas nos extremos do produto.

Do mesmo modo poderíamos verificar as irregularidades que apresenta o número 142857 quando multiplicado por 11, 12, 13, 15, 17, 18 etc.

Alguns autores chegaram a afirmar que há uma espécie de *coesão*, entre os algarismos do número 142857, e que não permite que esses algarismos se separem.

Vários geômetras notáveis — Fourrey, E. Lucas, Rouse Bali, Guersey, Legendre e muitos outros — estudaram minuciosamente as propriedades do número 142857.

Fourrey, em seu livro *Récréatiorts Arithmétiques*, apresenta-nos o produto do número 142857 por 327451. Ao efetuar essa operação, notamos uma interessante disposição numérica: as colunas dos produtos parciais são formadas por algarismos iguais.

Retomemos o número 142857 e determinemos o produto desse número pelos fatores 7, 14, 21, 28 etc, múltiplos de 7. Eis os resultados:

142857 X 7 = 999999
142857 x 14 = 1999998
142857 X 21 = 2999997
142857 x 28 = 3999996

Os resultados apresentam uma disposição muito interessante. O primeiro produto é um número formado de seis algarismos iguais a 9; no segundo produto aparecem apenas cinco algarismos iguais a 9, sendo que o sexto foi "decomposto" em duas parcelas que foram ocupar os extremos dos resultados. E assim por diante.

Como aparece em Aritmética esse número 142857?

Se convertermos a fração ordinária

$$\frac{1}{7}$$

em número decimal, vamos obter uma dízima periódica simples cujo período é precisamente 142857. Quem já estudou frações ordinárias e decimais poderá compreender facilmente que as frações ordinárias

$$\frac{2}{7} \quad \frac{3}{7} \quad \frac{4}{7} \quad \frac{5}{7} \quad \text{e} \quad \frac{6}{7}$$

quando convertidas em decimais darão, também, periódicas simples, cujos períodos são formados pelos algarismos 1, 4, 2, 8, 5 e 7 que aparecerão em certa ordem, conforme o valor do numerador. Eis a explicação simples da famosa "coesão" aritmética pretendida por alguns pesquisadores.

Para os antigos matemáticos, o número 142857 era "cabalístico", com propriedades "misteriosas"; estudando, porém, do ponto de vista aritmético, não passa de um período de uma dízima periódica simples.

Estão no mesmo caso os períodos das dizimas obtidas com as frações

$$\frac{1}{17} \quad \frac{1}{23} \quad \text{etc.}$$

O número 142857, que alguns algebristas denominaram "número impertinente", não é, portanto, o único a apresentar particularidade em relação à permanência de algarismos nos diversos produtos.

A ORIGEM DA GEOMETRIA

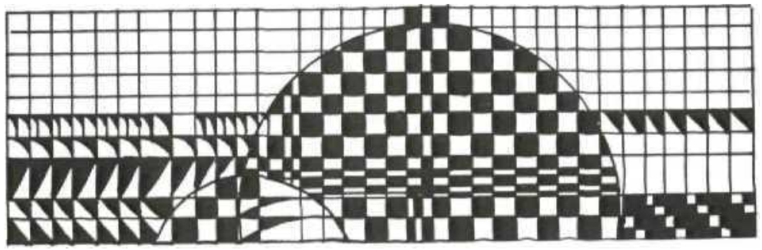
Os historiadores gregos, sem exceção, procuram colocar no Egito o berço da Geometria, e atribuir, portanto, aos habitantes do vale do Nilo a invenção dessa ciência. As periódicas inunda-

ções do célebre rio forçaram os egípcios ao estudo da Geometria, pois uma vez passado o período da grande cheia, quando as águas retomavam o seu curso normal, era necessário repartir, novamente, as terras, e minar o grau de inteligência dos corvos, chegou a entregar aos senhores as antigas propriedades, perfeitamente delimitadas. A pequena faixa de terra, rica e fértil, era disputada por muitos interessados; faziam-se medições rigorosas a fim de que cada um, sem prejuízo dos outros, fosse reintegrado na posse exata de seus domínios.

OS GRANDES GEÔMETRAS

PITÁGORAS — *matemático e filosofo grego. Nasceu seis séculos a. C, na ilha de Samos. Fundou em Crótona, ao sul da Itália, uma escola filosófica que se tornou notável. Os seus discípulos denominavam-se os pitagóricos. Sobre a vida de Pitágoras há uma trama infindável de lendas.*

Morreu, em 470 a.C, assassinado em Tarento durante uma revolução política.



ANIMAIS CALCULADORES

Cecil Thiré[9]

Um observador curioso, Leroy, querendo concluir com segurança, depois de várias experiências, que esses animais podem contar, sem erro, até cinco.

Eis o artifício empregado por Leroy.

Tendo verificado que os corvos nunca voltam para o ninho quando há alguém nas vizinhanças, fez construir uma choupana a pequena distância de um ninho de corvos. No primeiro dia, Leroy mandou que um homem entrasse na choupana e observou que os corvos não procuraram o ninho senão após o homem terse retirado da choupana. No segundo dia, a experiência foi feita com dois homens; os corvos aguardaram que os dois homens abandonassem o improvisado esconderijo. O mesmo resultado foi obtido sucessivamente, nos dias seguintes, com três, quatro e cinco homens.

Essas experiências mostraram, claramente, que os corvos contaram os homens não só quando estes entraram, mas também depois, quando, com pequenos intervalos, saíam da choupana.

[9]Do livro *Matemática — 1º ano,* de Cecil Thiré e Mello e Souza.

Com seis homens, as coisas já não se passaram do mesmo modo; os corvos enganaram-se na conta — para eles muito complicada — e voltaram para o ninho quando a choupana ainda abrigava alguns dos emissários de Leroy.

Os cães e os elefantes são, igualmente, dotados de admirável inteligência. Spencer, filósofo inglês, refere-se, no seu livro *A Justiça,* a um cão que contava até três.

E Lucas, nas suas originalíssimas *Récréations Mathématiques,* apresenta-nos um caso bastante singular. Trata-se de um chimpanzé do Jardim Zoológico de Londres, que aprendeu a contar até cinco.

A FORMA DO CÉU

Aristóteles

O céu deve ser necessariamente esférico, pois a esfera, sendo gerada pela rotação do círculo, é, de todos os corpos, o mais perfeito.

Os números governam o mundo.

PLATÃO

UM PLANETA DESCOBERTO PELO CÁLCULO

Em meados do século XIX os astrônomos haviam verificado, de modo indiscutível, que o planeta Urano apresentava certas irregularidades em seu movimento. Como explicar a causa dessas irregularidades?

O CÁLCULO DE
NETUNO

Fernandes Costa

Leverrier, que reviu
Um intricado problema,
Mais de um planeta previu
Dentro do nosso sistema.

E como assim o estudasse,
Ao saber-lhe o movimento,
Ordenou-lhe que brilhasse
Num ponto do firmamento!

O telescópio assestado
Foi logo, em face do céu,
E, no ponto designado,
Netuno compareceu.

Le Verrier, seguindo os conselhos de Arago, resolveu abordar a solução desse famoso problema astronômico. O sábio francês, que era ainda muito moço, pois tinha apenas 35 anos de idade, soube, desde logo, dar feliz orientação às suas pesquisas. E, para abordar a questão, resolveu atribuir as perturbações de Urano a um astro cuja posição no céu era preciso determinar.

E Le Verrier, ainda na incerteza dos resultados, escreveu:

"Poder-se-á fixar o ponto do céu onde os astrónomos observadores deverão reconhecer o corpo estranho, fonte de tantas dificuldades?[10]

Alguns meses depois a solução era encontrada. No dia 1º de junho de 1846, Le Verrier apresentava à Academia Francesa as coordenadas celestes do planeta perturbador de Urano. Existiria, realmente, aquele astro que Le Verrier calculara mas que até então ninguém tinha visto? A academia recebeu com

[10] H. Vokringer — *Les étapes de la physique,* 1929, p. 196.

certa desconfiança a asserção arrojada do jovem matemático.

Galle, astrônomo do Observatório de Berlim, menos por convicção do que para atender ao pedido de Le Verrier, procurou observar o trecho da abóbada celeste onde devia achar-se o "planeta desconhecido", e verificou que ali existia um astro que correspondia exatamente à estimativa do sábio francês, como se fora feito *sob medida.* Esse astro recebeu o nome de Netuno.

Tal resultado, além de representar um incomparável triunfo para a Mecânica Celeste, veio demonstrar a fecundidade assombrosa das leis físicas quando empregadas judiciosamente.

A NOTA DE CEM MIL-RÉIS

Um indivíduo entrou numa sapataria e comprou um par de sapatos por 60$000, entregando, em pagamento, uma nota de 100$000.

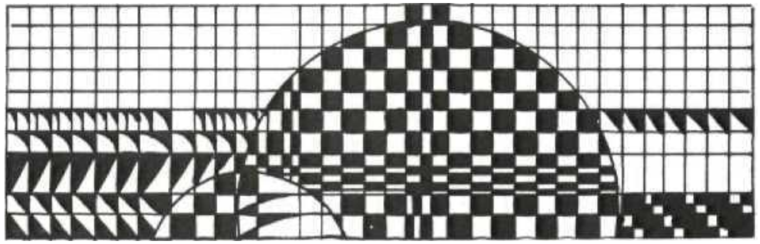
O sapateiro, que no momento não dispunha de troco, mandou que um de seus empregados fosse trocar a nota numa confeitaria próxima. Recebido o dinheiro, deu ao freguês o troco e o par de sapatos que havia sido adquirido.

Momentos depois, surgiu o dono da confeitaria exigindo a devolução do seu dinheiro: a nota era falsa! E o sapateiro viu-se forçado a devolver os cem mil-réis que havia recebido.

Surge, afinal, uma dúvida: qual foi o prejuízo que o sapateiro teve nesse complicado negócio?

A resposta é simples e fácil. Muita gente, porém, ficará embaraçada sem saber como esclarecer a questão.

O prejuízo do sapateiro foi de 40$000 e um par de sapatos.



ORIGEM DO SINAL DE SUBTRAÇÃO

É interessante observar as diferentes formas por que passou o sinal de subtração e as diversas letras de que os matemáticos se utilizaram para indicar a diferença entre dois elementos.

Na obra de Diofanto, entre as abreviaturas que constituíam a linguagem algébrica desse autor, encontra-se a letra grega $\pitchfork$ indicando subtração. Essa letra era empregada pelo famoso geômetra de Alexandria como sinal de operação invertida e truncada.

Para os hindus — como se encontra, na obra de Bhaskara[11] — o sinal de subtração consistia num simples ponto colocado sob o coeficiente do termo que servia de subtraendo.

A letra *M* — e, às vezes, também *m* — foi empregada, durante um longo período, para indicar a subtração, pelos algebristas italianos. Luca Pacioli, além de empregar a letra *m*, colocava entre os termos da subtração a expressão *DE*, abreviatura de *demptus*.

Aos alemães devemos a introdução do sinal — (menos), atribuído a Widman. Pensam alguns autores que o símbolo — (me-

[11] Bhaskara — famoso astrônomo e matemático hindu. Viveu no século XII.

nos), tão vulgarizado e tão simples, corresponde a uma forma limite para a qual tenderia a letra *m* quando escrita rapidamente. Aliás, Viète — considerado como o fundador da Álgebra moderna — escrevia o sinal = entre duas quantidades quando queria indicar a diferença entre elas.

A GEOMETRIA

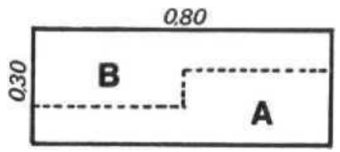
A geometria, em geral, passa ainda por ser a ciência do espaço.

Couturat

O PROBLEMA DA PRANCHA

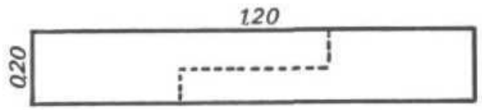
Um carpinteiro possui uma prancha de 0,80m de comprimento e 0,30m de largura.

Quer cortá-la em dois pedaços iguais de modo a obter uma peça retangular que tenha 1,20m de comprimento e 0,20m de largura.



Solução

A prancha deve ser cortada, como indica a linha pontilhada, nos pedaços *A* e *B*, e esses pedaços deverão ser dispostos conforme indica a figura.



PRECOCIDADE

Blaise Pascal, aos 16 anos de idade, escreveu um tratado sobre as cônicas, considerado como um dos fundamentos da Geometria moderna.

Evaristo Galois, aos 15 anos, discutia e comentava as obras de Legendre e Lagrange.

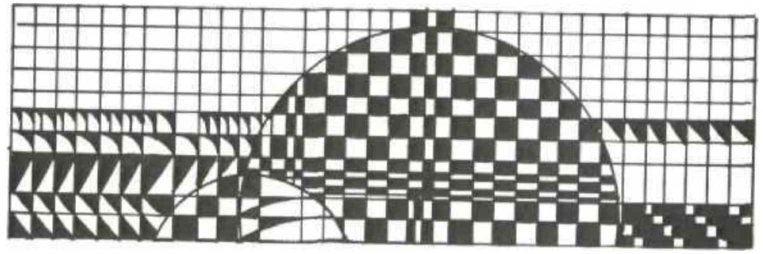
Alexis Clairaut achava-se, aos dez anos, apto a ler e compreender as obras do marquês de 1'Opitar sobre cálculo.

Joseph Bertrand, aos 11 anos, iniciava o curso na escola Politécnica, e aos 17 recebia o grau de doutor.

Nicolas Henri Abel, norueguês, filho de um pastor protestante, aos 16 anos de idade fazia investigações sobre o problema de resolução da equação do quinto grau. Morreu com 26 anos.

OS GRANDES GEÔMETRAS

PLATÃO — *geômetra e filósofo grego. Nasceu em Atenas no ano 430 e morreu no ano 347 a. C. Instruiu-se a princípio no Egito e mais tarde entre os pitagóricos. Introduziu na Geometria o método analítico, o estudo das seções cónicas e a doutrina dos lugares geométricos. Apelidou Deus o* Eterno Geômetra *e mandou escrever por cima da entrada de sua escola* "Não entre aqui quem não for geômetra".



UMA SUBTRAÇÃO FEITA HÁ MAIS DE MIL ANOS

Vamos mostrar como era feita, no ano 830, uma subtração de números inteiros.

Para que o leitor possa acompanhar com facilidade todas as operações, vamos empregar, na representação dos números, algarismos modernos.

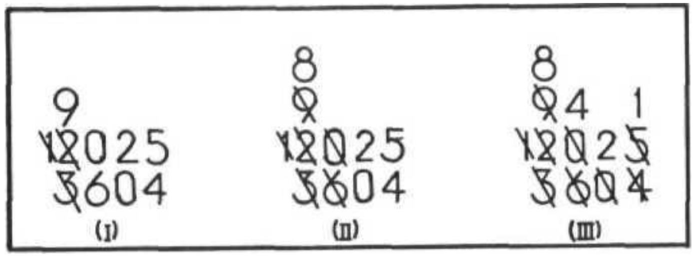
Do número 12025 vamos tirar 3604.

A operação era iniciada pela esquerda (operação I). Dizemos: de 12 tirando 3 restam 9; cancelamos os algarismos considerados e escrevemos o resto obtido em cima do minuendo. (Veja figura na página seguinte.)

Continuamos: de 90 tirando 6 restam 84.

A diferença obtida (operação II) é escrita sobre o minuendo, e os algarismos que formavam os termos da subtração aparecem cancelados.

Finalmente: de 8425 tirando 4 restam 8421 (operação III).



É essa a diferença entre os números dados.

Era assim que Mohamed Ben Musa Alkarismí, geômetra árabe, um dos sábios mais notáveis do Século IX, realizava uma subtração de números inteiros.[12]

Que coisa complicada!

ILUSÃO

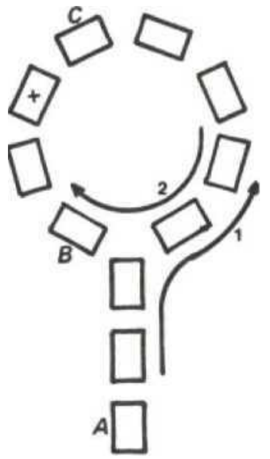
Qualquer pessoa que observar a ilustração da página ao lado será capaz de pensar que das três figuras que aí aparecem o homem é a mais alta.

[12]Cf. Rey Pastor — *Elementos de Aritmética* — Madri, 1930.

Puro engano! Os três têm a mesma altura

ADIVINHAÇÃO MATEMÁTICA

Coloque a mesa várias cartas dispostas como indica a figura. Algumas das cartas (três, por exemplo) são postas em linha reta, e as outras formam uma curva que se fecha sobre a linha formada pelas primeiras.



Isso feito, pede-se a uma pessoa que pense num número qualquer e conte, a partir da carta *A*, tantas cartas quantas forem as unidades desse número; e que a partir da última carta obtida retroceda, no caminho indicado pela seta 2, tantas cartas quantas forem as unidades do número pensado.

Podemos "adivinhar" imediatamente a carta a que a pessoa chegou sem conhecer o número e sem ver, muito menos, realizar as operações que acabamos de indicar.

Vamos supor que a pessoa tenha, por exemplo, pensado no número 8. Contando 8 a partir de *A* (seta 1), ela irá parar na carta C; retrocedendo 8 cartas a partir de C (seguindo a seta 2), ela irá fatalmente parar na carta indicada por uma cruz.

Para se saber a carta final deve-se contar de *B* (seta 2) tantas cartas quantas forem aquelas que estiverem em linha reta fora da curva.

Convém alterar sempre, depois de cada *adivinhação* feita,

não só o número de cartas dispostas em linha reta como também o número de cartas que formam a curva.

ORIGEM DO SINAL DE MULTIPLICAÇÃO

O sinal **x**, com que indicamos a multiplicação, é relativamente moderno. O matemático inglês Guilherme Oughtred, empregou-o, pela primeira vez, no livro *Clavis Matematicae* publicado em 1631. Ainda nesse mesmo ano, Harriot, para indicar também o produto a efetuar, colocava um ponto entre os fatores.

Em 1637, Descartes já se limitava a escrever os fatores justapostos, indicando, desse modo abreviado, um produto qualquer. Na obra de Leibniz encontra-se o sinal ⌢ para indicar multiplicação; esse mesmo símbolo colocado de modo inverso indicava divisão.

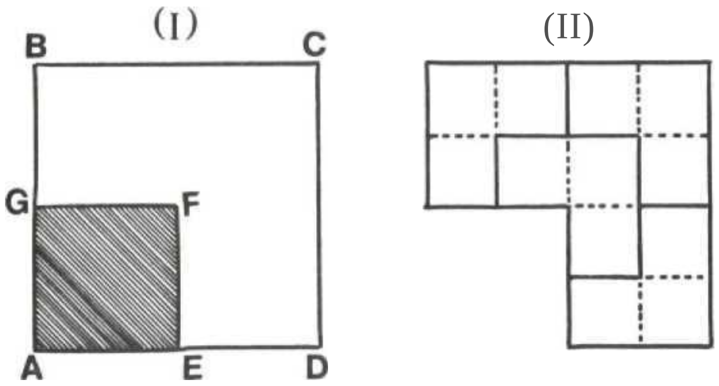
A PRAÇA QUADRANGULAR

Um proprietário possuía um terreno *A B C D* com a forma exata de um quadrado. Vendeu uma quarta parte à prefeitura, e essa quarta parte *A G F E* tinha também a forma de um quadrado.

A parte restante devia ser repartida em quatro partes que fossem iguais em forma e em tamanho.

Como resolver esse problema?

A figura II indica perfeitamente a solução.



O SÍMBOLO DOS PITAGÓRICOS

Rouse Ball

Jâmblico, a quem devemos a revelação deste símbolo,[13] refere que estando em jornada certo pitagórico, adoeceu na estalagem a que se recolhera para passar a noite. Era ele pobre e estava fatigado, mas o estalajadeiro, homem bondoso, prestou-lhe carinhosa assistência e tudo fez para restituir-lhe a saúde. Não obstante, a despeito de seu desvelo, o doente piorava. Percebendo que ia morrer e não podendo pagar o que devia ao estalajadeiro, o enfermo pediu uma tábua e nela traçou a famosa estrela simbólica. Apresentando-a ao seu hospedeiro, pediu-lhe que a pusesse suspensa à porta, de modo a poder ser vista por todos os transeuntes, asseverando-lhe que dia viria em que sua caridade seria recompensada. O estudioso morreu, foi enterrado convenientemente, e a tábua exposta consoante o seu desejo.

Longo tempo decorrera quando, um dia, o símbolo sagrado atraiu a atenção de um viajante que passava pela hospedaria. Apeando-se, entrou nela e, depois de ter ouvido o relato do estalajadeiro, recompensou-o generosamente.

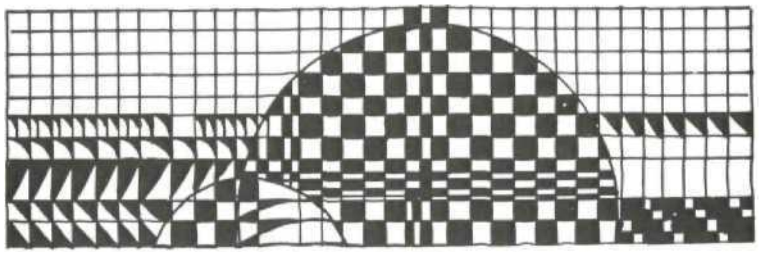
Tal é a anedota de Jâmblico. Se lhe falta veracidade é, ao menos, curiosa.

[13]O símbolo dos pitagóricos era um pentágono regular estrelado.

A MATEMÁTICA

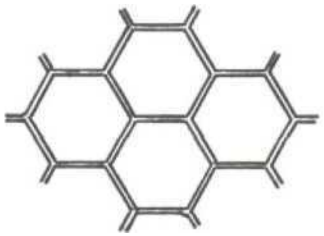
Pedro Tavares

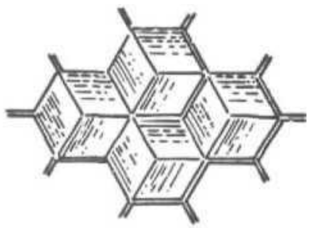
A Matemática não é exclusivamente o instrumento destinado à explicação dos fenômenos da natureza, isto é, das leis naturais. Não. Ela possui também um valor filosófico, de que aliás ninguém duvida; um valor artístico, ou melhor, estético, capaz de lhe conferir o direito de ser cultivada por si mesma, tais as numerosas satisfações e júbilos que essa ciência nos proporciona. Já os gregos possuíam, num grau elevado, o sentimento da harmonia dos números e da beleza das formas geométricas.



O PROBLEMA DAS ABELHAS

Afirma Maeterlinck, no seu famoso livro sobre as abelhas, que esses animais, na construção de seus alvéolos, resolvem um problema de *alta matemática.*

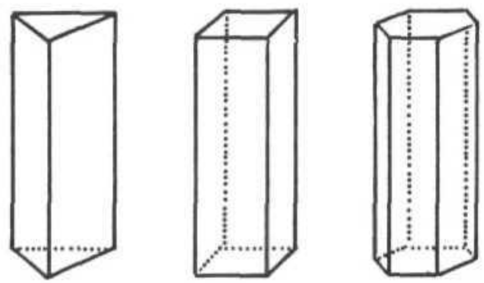




Há nessa asserção certo exagero do escritor belga: o problema que as abelhas resolvem pode ser abordado, sem grande dificuldade, com os recursos da Matemática elementar.

Não nos importa, porém, saber se o problema é elementar ou transcendente; a verdade é que esses pequeninos e laboriosos

insetos resolvem um interessantíssimo problema por um artifício que chega a deslumbrar a inteligência humana.



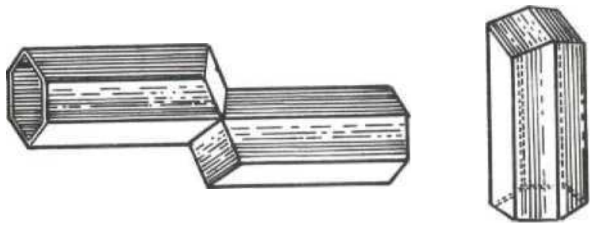
Todos sabem que a abelha constrói os seus alvéolos para neles depositar o mel que fabrica. Esses alvéolos são feitos de cera. A abelha procura, portanto, obter uma forma de alvéolos que seja a mais econômica possível, isto é, que apresente maior volume para a menor porção de material empregado.

É preciso que a parede de um alvéolo sirva, também, ao alvéolo vizinho. Logo, o alvéolo não pode ter forma cilíndrica, pois do contrário cada parede só serviria a um alvéolo.

Procuraram as abelhas uma forma prismática para os seus alvéolos. Os únicos prismas regulares que podem ser justapostos sem deixar interstício são: o triangular, o quadrangular e o hexagonal. Foi este último que as abelhas escolheram. E sabem por quê? Porque dos três prismas regulares *A, B* e *C* construídos com porção igual de cera, o prisma hexagonal é o que apresenta *maior volume.*

Eis o problema resolvido pelas abelhas:

Dados três prismas regulares da mesma altura A (triangular), B (quadrangular), C (hexagonal), tendo a mesma área lateral, qual é o que tem maior volume?



Uma vez determinada a forma dos alvéolos, era preciso fechá-los, isto é, determinar o meio mais econômico de cobrir os alvéolos.

A forma adotada foi a seguinte: o fundo de cada alvéolo é constituído de três losangos iguais.[14]

Maraldi, astrónomo do Observatório de Paris, determinou, experimentalmente, com absoluta precisão, os ângulos desse losango e achou 109°28', para o ângulo obtuso, e 70°32', para o ângulo agudo. ,

O físico Réaumur, supondo que as abelhas eram guiadas, na construção dos alvéolos por um princípio de economia, propôs ao geômetra alemão Koening, em 1739, o seguinte problema:

Entre todas as células hexagonais, com o fundo formado de três losangos, determinar a que seja construída com a maior economia de material.

Koening, que não conhecia os resultados obtidos por Maraldi, achou que os ângulos do losango do alvéolo *matematicamente mais económico* deviam ser 109°26' para o ângulo obtuso e 70°34' para o ângulo agudo.

A concordância entre as medidas feitas por Maraldi e os resultados calculados por Koening era espantosa. Os geômetras concluíram que as abelhas cometiam, na construção dos seus alvéolos, um erro de 2' no ângulo do losango de fechamento.[15]

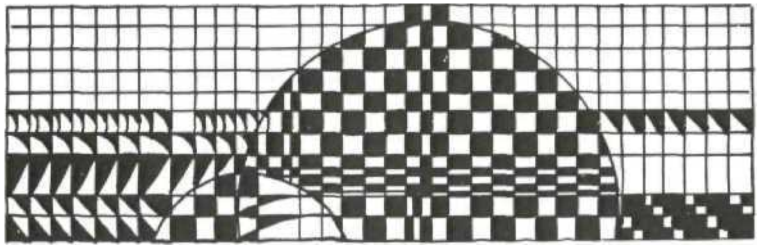
[14] A adoção do fundo romboidal traz, sobre o de fundo plano, uma economia de um alvéolo em cada 50 que são construídos.

[15] Essa diferença é tão pequena que só pode ser apreciada com auxilio de instrumentos de precisão.

Concluíram os homens de ciência que as abelhas erravam, mas entre o alvéolo que construíam e o alvéolo *matematicamente certo* havia uma diferença extremamente pequena.

Fato curioso! Alguns anos depois (1743), o geômetra Mac Laurin retomou novamente o problema e demonstrou que Koening havia errado e que o resultado era traduzido precisamente pelos valores dos ângulos dados por Maraldi — 109°28' e 70°32'.

A razão estava, pois, com as abelhas. O matemático Koening é que havia errado!



0 EMPREGO DAS LETRAS NO CÁLCULO

Almeida Lisboa

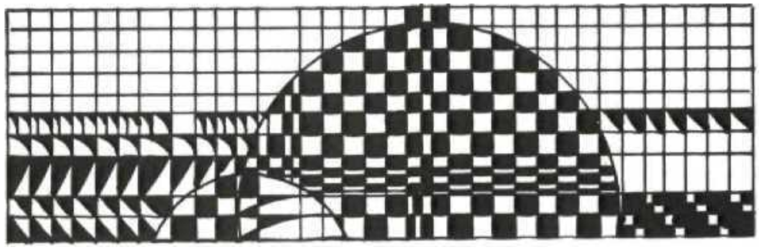
Os gregos já empregavam letras para designar números e mesmo objetos. É com os gregos que surgem os primeiros vestígios do cálculo aritmético efetuado sobre *letras.* Diofanto de Alexandria (300 a.C.) empregava as letras com *abreviação,* mas só tinha um simbolismo perfeitamente sistematizado para uma única quantidade, para as suas potências até a sexta e para os inversos dessas potências. Em geral, os gregos representavam as quantidades por linhas, determinadas por uma ou duas letras, e raciocinavam como em Geometria.

Os cálculos sobre letras são mais numerosos nos autores hindus do que nos gregos. Os árabes do Oriente empregavam símbolos algébricos a partir da publicação da "Aljebr walmukâbala" de Alkarismí (século IX) e os árabes do Ocidente, a partir do século XII; no século XV, Alcalsâdi introduz novos símbolos.

A Álgebra moderna só adquire caráter próprio, independente da Aritmética, a partir de Viète, que sistematicamente substitui a Álgebra numérica pela Álgebra dos símbolos.

Viète não empregava o termo *Álgebra,* e sim *Análise,* para designar esta parte da ciência matemática onde brilha seu nome.

Outrora, atribuía-se a origem da palavra Álgebra ao nome do matemático árabe Geber; na realidade, esta origem acha-se na operação que os árabes denominavam *aljebr.*



A MATEMÁTICA NA LITERATURA, CÍRCULOS E EIXOS

É interessante observar as formas curiosas e imprevistas que os escritores e poetas, indiferentes às preocupações científicas, dão às expressões matemáticas de que se utilizam. Muitas vezes, para não sacrificar a elegância de uma frase, o escritor modifica um conceito puramente matemático, apresentando-o sob um aspecto que fica muito longe de ser rigoroso e exato. Submisso às exigências métricas, não hesitará, também, o poeta em menosprezar todos os fundamentos da velha Geometria.

Não só as formas essencialmente geométricas, como também muitas proposições algébricas, vestem os esqueletos de suas fórmulas com a indumentária vistosa da literatura.

Certos escritores inventam, por vezes, comparações tão abstrusas que fazem a hilaridade dos que cultivam a ciência de Lagrange. Vejamos, por exemplo, como o Sr. Elcias Lopes, no seu livro *Teia de aranha*[16] descreve a tarefa complicada de um aracnídeo:

À proporção que os fusos se desenrolam, a bilrar aquela caprichosa renda de filigranas, aumentam, ampliam-se e avultam os círculos concêntricos, sobrepostos uns aos outros, numa admirável simetria, e, ligados entre si, por um chuveiro de raios convergentes para o eixo central.

[16]Elcias Lopes — *Teia de aranha*, p. 12.

Esse longo período, que parece emaranhado no fio da própria tela, não tem sentido algum para o matemático. Aqueles *círculos concêntricos sobrepostos* formam uma figura que não pode ser definida em Geometria. E como poderíamos admitir "círculos concêntricos sobrepostos numa admirável simetria"! O sr. Elcias não ignora naturalmente que a aranha aplica, na construção da teia, princípios da Resistência dos Materiais relativos à distribuição mais econômica de forças num sistema em equilíbrio. E ainda mais: a aranha formando figuras homotéticas demonstra possuir esse "espírito geométrico" que o naturalista Huber, de Gênova, queria atribuir às abelhas. Uma aranha seria, pois, incapaz de conceber "círculos concêntricos simétricos". Simétricos em relação a quê? A um ponto? A uma reta?

E segundo o autor da *Teia de aranha*, os "círculos concêntricos" admitem um eixo central(!) para o qual convergem raios! A esse respeito pedimos a um professor de Desenho que traçasse numa folha de papel uma figura formada por "círculos concêntricos sobrepostos numa admirável simetria e ligados entre si por um chuveiro de raios convergentes para o eixo central". O professor confessou, desde logo, que era incapaz de reproduzir essa figura pelo simples fato de não poder concebê-la.

Qualquer estudante bisonho da 1ª série ginasial sabe que um eixo não pode ser um ponto. A noção de eixo é simples, elementar, quase intuitiva. Admiremos agora a definição dada pelo ilustre padre Augusto Magne:[17]

Eixo é o ponto sobre o qual se move um corpo que gira.

O eminente sacerdote e filólogo que formulou essa definição estava longe de imaginar que ela poderia ser, mais tarde, passada pelo cadinho severo do rigor matemático. A definição de eixo (como sendo um ponto), completamente errada, é inaceitável.

[17]Padre Augusto Magne, S. J. — *Revista de Filologia e História* — tomo 1, fascículo IV, p. 16

TALES E A VELHA

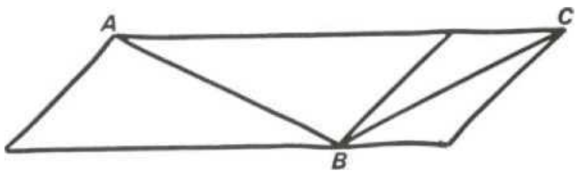
Eis um dos muitos episódios anedóticos atribuídos a Tales:

Uma noite passeava o filósofo completamente absorto na contemplação das estrelas e, por não ter dado atenção alguma ao terreno em que pisava, caiu descuidado dentro de um grande fosso. Uma velha, que casualmente assistira à desastrada queda de Tales, observou-lhe: "Como quereis, ó sábio!, aprender o que se passa no céu se nem ao menos sois capaz de saber o que ocorre a vossos pés?"

Algarismos romanos

ILUSÃO DE ÓTICA

Pedimos ao leitor que observe com atenção a figura abaixo, na qual aparece um quadrilátero formado por dois paralelogramos. Em cada um desses paralelogramos foi traçada uma diagonal.



Qual das duas diagonais *AB* e *BC é* a maior?

A figura parece mostrar que *AB* é maior do que *BC*

Puro engano — consequência de uma ilusão de ótica. Os segmentos *AB* e *BC* são perfeitamente iguais.

O FIM DA CIÊNCIA

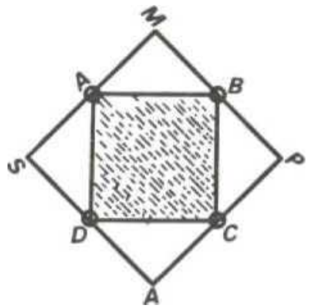
Jacobi

O fim único da Ciência é a honra do espírito humano, e tanto vale, afinal, uma questão sobre a teoria dos números como um problema sobre o sistema do mundo.

O PROBLEMA DA PISCINA

Um clube dispunha de uma piscina de forma quadrada, tendo em cada vértice *A*, *B*, *C*, e *D* um poste de iluminação.

A diretoria do clube resolveu aumentar a piscina, tornando-a duas vezes maior e sem alterar a sua forma, isto é, conservando a forma de um quadrado.



O aumento devia ser feito sem alterar a posição dos postes que continuariam junto à borda da piscina.

Na figura, o quadrado *M PA S* indica o traçado da nova piscina depois de ampliada.

Ι Γ Δ Η Χ

Algarismos gregos (antigos)

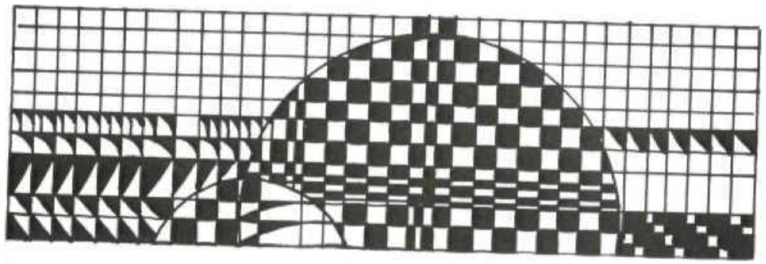
A NOÇÃO DO INFINITO

J. Tannery

A noção do infinito, de que é preciso se fazer um mistério em Matemática, resume-se no seguinte princípio: depois de cada número inteiro existe sempre um outro.

OS GRANDES GEÔMETRAS

ARISTÓTELES — *nasceu na Macedônia384 a.C. Foi mestre e amigo de Alexandre, e deixou um grande número de obras de História Natural, Lógica, Física, Matemática, Política etc. O nome de Aristóteles é muitas vezes citado como a personificação do espírito filosófico e cientista. As obras de Aristóteles, depois da morte desse filósofo, estiveram esquecidas durante duzentos anos.*



DISPOSIÇÃO CURIOSA

Tomemos o quadrado de 4 e o quadrado de 34.

$$4^2 = 16$$
$$34^2 = 1156$$

Notemos uma disposição curiosa: para se passar de 16 (quadrado de 4) a 1156 (quadrado de 34), é suficiente colocar o número 15 entre os algarismos de 16.

Experimentemos agora colocar entre os algarismos do quadrado de 34, isto é, entre os algarismos de 1156 o número 15. Vamos formar, desse modo, o número 111556 que é, precisamente, o quadrado de 334.

É inútil levar adiante as nossas pesquisas. Já descobrimos uma disposição curiosa que apresentam os algarismos que formam os quadrados dos números, 4, 34, 334, 3334 etc. Cada um deles é obtido pela intercalação feita do número 15 entre os algarismos do anterior. Eis os resultados:

$$
\begin{aligned}
4^2 &= 16\\
34^2 &= 1156\\
334^2 &\bullet 111556\\
3334^3 &= 11115556
\end{aligned}
$$

Será possível descobrirem-se formações análogas para outras séries de quadrados? Vale a pena, por exemplo, a experiência com os números 7, 67, 667 etc.

UM PAPA GEÔMETRA

Gerbert, geômetra famoso, arcebispo de Ravena, subiu à cátedra de São Pedro no ano 999.

Esse homem, apontado como um dos mais sábios de seu tempo, teve o nome de Silvestre II na série dos papas. Foi o primeiro a vulgarizar no Ocidente latino o emprego dos algarismos arábicos.

Faleceu no ano de 1003.[18]

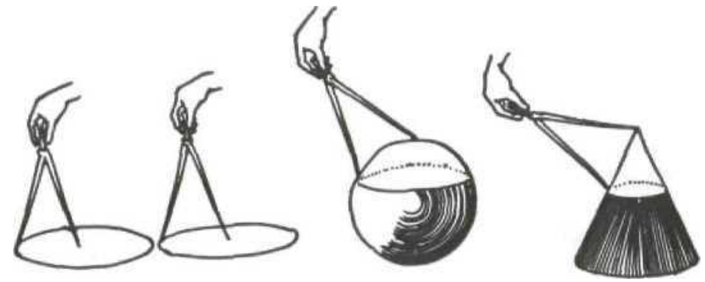
CÍRCULOS DIFERENTES

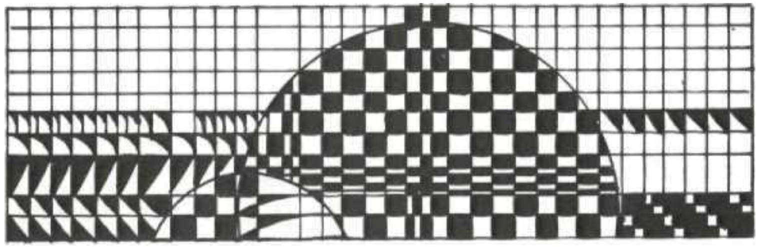
O problema proposto é o seguinte:

Com a mesma abertura do compasso traçar quatro círculos diferentes.

[18] Cf. o artigo **do Padre Leonel Franca,** S. **J.** no livro *Matemática, 2? ano,* **de** Thiré e Mello e Souza.

A figura abaixo mostra, claramente, como se deve proceder para chegar-se à solução desejada.





AS NOVENTA MAÇÃS

Um camponês tinha três filhas, e como quisesse, certa vez, pôr à prova a inteligência das jovens, chamou-as e disse-lhes:

— Aqui estão 90 maçãs que vocês deverão vender no mercado. Maria, que é a mais velha, levará 50; Clara receberá 30, e Lúcia ficará com as 10 restantes. Se Maria vender 7 maçãs por um tostão, as outras deverão vender também pelo mesmo preço, isto é, 7 maçãs por um tostão; se Maria resolver vender a 300 réis cada uma, será esse o preço pelo qual Clara e Lúcia deverão vender as maçãs que possuírem. O negócio deve ser feito de modo que todas as três apurem, com a venda das maçãs, a mesma quantia.

— E eu não posso dar de presente algumas das maçãs que levo? — perguntou Maria.

— De modo algum — replicou o velho camponês. — A condição por mim imposta é essa: Maria deve vender 50, Clara deve vender 30, e Lúcia só poderá vender 10. E pelo preço que Maria vender, as outras devem também vender. Façam a venda de modo que apurem, no final, quantias iguais.

E como as moças se sentissem atrapalhadas, resolveram consultar, sobre o complicado problema, um mestre-escola que morava nas vizinhanças.

O mestre-escola, depois de meditar durante alguns minutos, disse:

— Esse problema é muito simples. Vendam as maçãs conforme o velho determinou e chegarão ao resultado que ele pediu.

As jovens foram ao mercado e venderam as maçãs; Maria vendeu 50; Clara vendeu 30 e Lúcia 10. O preço foi o mesmo para todas, e cada uma apurou a mesma quantia.

Diga-nos agora o leitor como as moças resolveram a questão?

Solução

Maria iniciou a venda fixando o preço de 7 maçãs por um tostão. Vendeu desse modo 49 maçãs, ficando com uma de resto, e apurou nessa primeira venda 700 réis. Clara, obrigada a ceder as maçãs pelo mesmo preço, vendeu 28 por 400 réis, ficando com duas de resto. Lúcia, que dispunha de 10 maçãs, vendeu sete por um tostão ficando com 3 de resto.

A seguir, Maria vendeu a maçã com que ficara por 300 réis. Clara, segundo a condição imposta pelo pai, vendeu as duas maçãs que ainda possuía pelo novo preço, isto é, a 300 réis cada uma, obtendo 600 réis, e Lúcia vendeu as três maçãs de resto por 900 réis, isto é, também a 300 réis cada uma.

Terminado o negócio, como é fácil verificar, cada uma das moças apurou l$000.

SUPERFÍCIE E RETA

Os conceitos de "superfície" e de "reta", que os geômetras aceitam sem definição, aparecem na linguagem literária como se tivessem a mesma significação. Do livro *Veneno interior*, do apreciado escritor e filósofo Carlos da Veiga Lima, destaquemos o seguinte aforisma:

> *A alma é uma superfície para a nossa visão — linha reta para o infinito.*

Esse pensamento, analisado do ponto de vista matemático, é incompreensível. Se a alma é uma "superfície para a nossa visão", nã pode ser, em caso algum, linha reta para o infinito. Os algebristas demonstram, realmente, a existência de uma reta cujos pontos estão infinitamente afastados do nosso universo e que se denomina, por causa de certas propriedades, "reta do infinito". É possível que o Dr. Veiga Lima tivesse querido comparar a alma a essa reta do infinito. Nesse caso, porém, seria conveniente abandonar a superfície e adaptar a alma a uma espécie de Geometria "filosófica" unidimensional.

O plano, sendo a mais simples das superfícies, é caracterizado por meio de postulados. Os escritores — que jamais leram um Legendre ou folhearam um Hadamard — atribuem ao plano propriedades indemonstráveis para o geômetra. Peregrino Júnior, no livro *Pussanga,* diz o seguinte (p. 168):

> *"A paisagem obedece à monotonia de planos geométricos invariáveis."*

Como poderíamos definir um plano geométrico invariável? Pela sua posição em relação a pontos fixos determinados, ou pela propriedade das figuras sobre ele traçadas?

Aliás, convém acentuar que a impropriedade de linguagem que apontamos em Peregrino Júnior não chega a constituir erro em Matemática. Não vemos, por exemplo, Euclides da Cunha, escritor e engenheiro, falar, em "círculo irregular" — expressão que não tem sentido para o geômetra?

PARADOXO GEOMÉTRICO
64 = 65

Tomemos um quadrado de 64 casas e façamos a decomposição desse quadrado, como indica a figura, em trapézios retângulos e em triângulos.

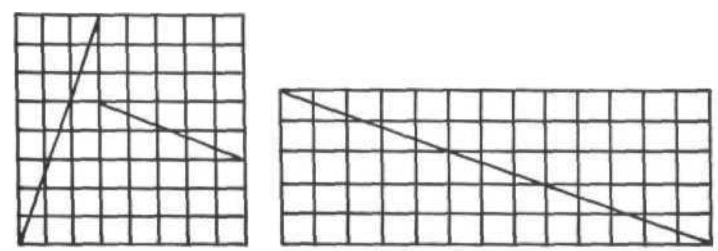
Reunindo esses trapézios e triângulos como vemos na figura II, vamos obter um retângulo de 13 por base e 5 de altura, isto é, um retângulo de 65 casas.

Ora, como o retângulo das 65 casas foi formado pelas partes em que decompusemos o quadrado, o número de casas do retângulo deve ser precisamente igual ao número de casas do quadrado Logo, temos:

$$64 = 65$$

Igualdade que exprime um absurdo.

A sutileza desse sofisma consiste no seguinte: as partes em que o quadrado foi decomposto não formam precisamente um retângulo. Pela posição em que deviam ficar, os dois segmentos que



formam a suposta *diagonal* do retângulo não são colineares. Há uma pequena diferença de ângulo, e entre os dois traços devia ficar um intervalo vazio equivalente precisamente a uma casa.

AS COISAS SÃO NÚMEROS

Émile Picard

Ao nome de Pitágoras prende-se a explicação de tudo por meio dos números, e uma célebre fórmula de sua escola, que era toda uma metafísica, proclamava que *"as coisas são números"*. Ao mesmo tempo, a Geometria se constitui; seus progressos incessantes fazem dela, a pouco e pouco, o tipo ideal da ciência, onde tudo é de uma inteligibilidade perfeita, e Platão escreve na entrada de sua escola: "Não entre aqui quem não for geômetra."

NÚMEROS PERFEITOS

A denominação de *número perfeito* é dada a um número inteiro quando esse número é igual à soma dos seus próprios divisores — excluindo-se, é claro, dentre esses divisores o próprio número.

Assim, por exemplo, o número 28 apresenta cinco divisores menores que 28. São: 1, 2, 4, 7 e 14.

A soma desses divisores é 28.

$$1 + 2 + 4 + 7 + 14 = 28$$

Logo, segundo a definição dada acima, o número 28 pertence à categoria dos números perfeitos.

E entre os números perfeitos já calculados podemos citar:

6, 28, 496 e 8128

Só conhecemos números perfeitos pares. Descartes acreditava na possibilidade de se determinar números perfeitos ímpares.[19]

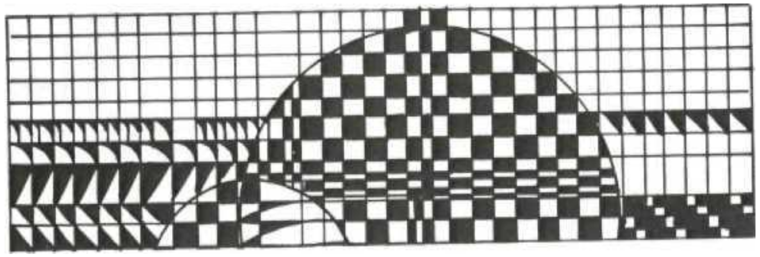
[19]Eduardo Lucas — *Théorie des nombres*, 1891, p. 376.

UM ERRO DE ANATOLE FRANCE

O erro vem, às vezes, insinuar-se nas obras literárias mais famosas. Anatole France, no romance *Thais* (50ª ed., p. 279), revelou completa ignorância em Cosmografia. Vale a pena reproduzir a cincada do célebre imaginador de "Sylvestre Bonnard"-

> *"Antoine demanda:*
>
> *— Doux enfant, que vois-tu encore? Paul protena vainement ses regarás du zenith au nadir, du couchant au levam quand tout à coup sesyeux rencontrèreni 1'abbé d'Antinoé."*

Eis aí relatada uma proeza impraticável. Todo mundo sabe que a ninguém é possível "correr os olhos do zênite ao nadir", visto que para um observador qualquer que seja o nadir fica no hemisfério celeste invisível.



MULTIPLICAÇÃO RUSSA

Aos antigos camponeses russos atribuem alguns matemáticos um processo especial de multiplicação, processo que nada tem de simples mas que não deixa de apresentar uma face curiosa.

Vamos supor que, movidos por uma desmedida excentricidade, resolvemos aplicar o sistema russo para obter o produto do número 36, pelo número 13.

Escrevemos os dois fatores (36 e 13), um ao lado do outro, e um pouco afastados:

36	13

Determinemos a metade do primeiro e o dobro do segundo, escrevendo os resultados em baixo dos fatores correspondentes:

36	13
18	26

Procedamos do mesmo modo com os resultados obtidos; isto é, tomemos a metade do primeiro e o dobro do segundo:

36	13
18	26
9	52

Vamos repetir a mesma operação: calcular a metade do número à esquerda e o dobro do número à direita. Como chegamos a um número ímpar (que no nosso caso é 9), devemos subtrair uma unidade e tomar a metade do resultado. De 9, tirando 1 fica 8, cuja metade é 4. E assim procedamos até chegarmos ao termo igual a 1 na coluna à esquerda.

Temos, portanto:

36	**13**
18	**26**
9	**52 (x)**
4	**104**
2	**208**
1	**416 (x)**

Somemos os números da coluna à direita que correspondem aos números ímpares da coluna à esquerda. (Esses números estão marcados com o sinal (x).) Essa soma será:

52 + 416 = 468

O resultado assim obtido (468) será o produto do número 36 por 13.

Ainda um exemplo: vamos multiplicar, por esse extravagante processo, o número 45 por 32.

45	**32 (x)**
22	**64**
11	**128 (x)**
5	**256**
2	**512**
1	1024 (x)

Somando os números (x), que correspondem aos termos ímpares da coluna à esquerda, obtemos o resultado 1440, que exprime o produto de 45 por 32.

O chamado "processo dos camponeses russos", que acabamos de indicar, não passa de uma simples curiosidade aritmética, pois o processo que aprendemos nas nossas escolas pode ser muito burguês, mas não deixa de ser muitíssimo mais simples e mais prático.

UM GRANDE NÚMERO

Denomina-se *fatoríal* de um número ao produto dos números naturais desde 1 até esse número.[20]

Assim, por exemplo, o fatorial de 5 é dado pelo produto 1 x 2 x 3 x 4 x 5 .

Essa expressão é indicada abreviadamente pela notação 5! que se lê: *fatorial* de 5.

Determinemos os fatoriais de alguns números:

3! = 6
4! = 24
5 ! = 120
9! = 362880

Com auxílio do sinal de fatorial podemos escrever expressões numéricas muito interessantes.

Calculemos, por exemplo, o fatorial de 362880, isto é, o produto de todos os números desde 1 até 362880, Esse produto é, como já sabemos, indicado pela notação

362880!

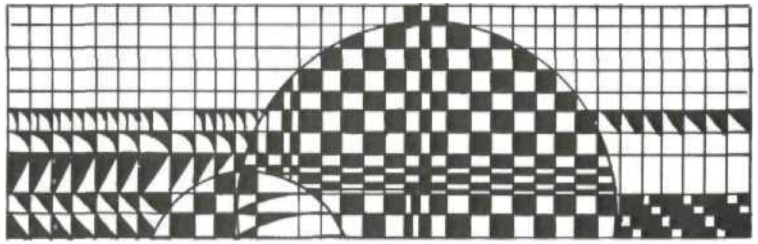
[20]Esse número é suposto inteiro e positivo. Segundo convenção, o fatorial da unidade e o fatorial de zero sào iguais a 1.

Esse número 362880 que aí figura é o fatorial de 9; podemos, portanto, substituí-lo pelo símbolo 9!. Temos pois:

362880! = (9!)!

Esse número (9!)!, no qual figura um único algarismo igual a 9, se fosse calculado e escrito com algarismos de tamanho comum, teria cerca de 140 quilômetros de comprimento.

É um número respeitável!



O CÍRCULO

Pitágoras considerava o círculo como a figura plana mais perfeita, ligando, assim, a idéia de círculo à de perfeição.[21]

"Durante muitos séculos", escreve Raul Bricard, "ninguém poderia duvidar que, sendo o universo perfeito, as órbitas dos astros não fossem rigorosamente circulares."

"Devant le mouvement périodique d'un point que décrit un cercle, 1'instinct métaphysique s'est ému il a conçu cet infinifermé qu'est 1'Eternel Retour, et l'on ne saurait dégager d'images tournantes Ia doctrine antique dont Nietzsche s'est naívement cru le père.[22]

Há um contraste frisante entre a facilidade com que definimos a circunferência e a dificuldade, até agora inextricável, que se nos depara quando tentamos formular a definição de reta. E essa disparidade constitui, no campo das investigações geométricas, uma particularidade que deve ser sublinhada.

A importância do círculo nas preocupações humanas pode ser demonstrada por uma observação de fundo puramente etimológico; são inúmeras as palavras, apontadas nos dicionários entre as que se derivam do vocábulo que em grego significava "círculo". Quando um indivíduo desocupado atira pedras na água tranquila, para admirar os círculos concêntricos que se formam na superfície, revela, sem querer, através da sua estranha ciclolatria, uma acentuada tendência para chegar-se ao filósofo pitagórico que pretendia construir o universo unicamente com círculos.[23]

Não menos interessante é a observação que decorre do traçado da reta e do círculo: Para se traçar um segmento de reta, é indispensável uma boa régua; ao passo que com um compasso qualquer, grosseiro e malfeito, que apresente segurança entre as hastes, podemos obter uma circunferência perfeita. Daí a impor tância que tem, do ponto de vista do rigor das soluções, a *Geometria do compasso* devida ao matemático italiano Rev. Mascheroni.[24]

Na *Geometria do compasso,* os diversos problemas são resolvidos unicamente com o emprego desse instrumento. "Para mais salientar o interesse das construções geométricas, basta lembrar que os métodos gráficos constituem hoje admirável instrumento de cálculo, empregado em Física, em Astronomia e em todos os ramos da engenharia".[25]

PAPEL DE PAREDE

Luis Freire[26]

O general Curvino Krukowiski, depois de obtida a sua reforma, havendo-se retirado para Palibino, com a família, man-

[21] Montucla — *Histoire des Mathématiques,* 1 vol. p. 109.
[22] R. Bricard — Do prefácio escrito para o livro *Geométrie du Compas,* de A. Quemper de Lonascol.
[23] R. Bricard — Op. cit.
[24] O abade Mascheroni deirOlmo, poeta e matemático, nasceu em 1730 e faleceu em 1800. Manteve relações de amizade com Napoleão a quem dedicou não so a sua principal obra de matemálica como muitas das produções poéticas que deixou.
[25] Almeida Lisboa — *Geometria do compasso.*
[26] Trecho de um artigo publicado na *Revista Brasileira de Matemática.*

dou forrar de papel as paredes de sua nova residência. Como, porém, o papel de que dispunha não fosse suficiente para forrar as paredes do quarto das duas filhas, lançou-se mão das folhas de um tratado de cálculo infinitesimal pelo qual Krukowiski estudara esse ramo da Matemática.

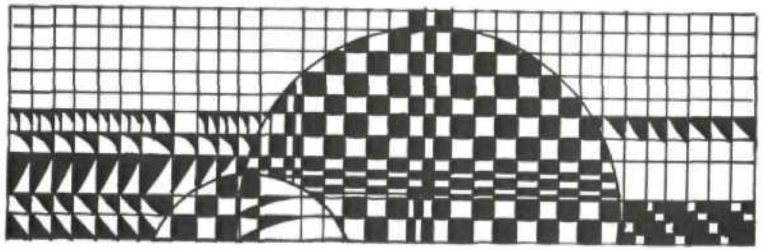
Nesse incidente fortuito se encontra a fagulha que haveria de incendiar, numa explosão de altas concepções matemáticas, um cérebro genial de mulher: a jovem Sofia Curvino,[27] filha do general, volveu toda a proverbial curiosidade do seu sexo para aquele mundo de infinitamente pequenos — tão infinitamente grande de belezas e sugestões — que constelava as paredes do quarto.

E naquele original papel de parede do seu quarto de moça estava escrito, traçado, todo um destino em equações. Sofia ansiou em conhecê-lo, procurando assim, compreender a linguagem potentíssima que os símbolos falam e que bem poucos sabem realmente interpretar.

OS GRANDES GEÔMETRAS

ARQUIMEDES — *o mais célebre dos geômetras. Viveu três séculos antes de Cristo. É admirável a obra que realizou com os fracos recursos da ciência de sua época. Produziu memoráveis trabalhos sobre assuntos de Aritmética, Geometria, Mecânica, Hidrostática e Astronomia. De todos esses ramos da ciência, tratou com maestria "apresentando conhecimentos novos, explorando teorias novas, com uma originalidade que dá ao geômetra o mais alto posto na História". Morreu em 212 a.C, assassinado por um soldado romano.*

[27]Tornou-se, mais tarde, Sofia Kovalewski, que pode ser citada entre os grandes matemáticos do século XIX. Convém ler a biografia de Sônia no livro *Matemática — 2º ano* de Thíré e Mello e Souza.



A GEOMETRIA DE CHATEAUBRIAND

A imaginação do escritor quando procura dar vivacidade e colorido a uma descrição não poupa nem mesmo as figuras geométricas mais simples. A fantasia caprichosa dos literatos de talento não encontra barreira diante dos rigores formais da Matemática.

Vamos colher um curioso exemplo na obra admirável de Chateaubriand. Esse célebre escritor francês, autor do *Génie du Christianisme* ao descrever o prodígio de um canadense que encantava serpentes ao som de um flauta, diz precisamente o seguinte:

> *"Começou, então, o canadense a tocar sua flauta. A serpente fez um movimento de surpresa e atirou a cabeça para traz. À medida que era dominada pelo efeito mágico, os olhos perdiam a aspereza, as vibrações da cauda tornavam-se mais lentas e o ruído que ela emitia diminuía lentamente atese extinguir.*
>
> *"Menos perpendicular sobre a sua linha espiral, as curvas da serpente encantada vêm uma a uma pousar sobre a terra em círculos concêntricos."*
> (*Génie du Christianisme, parte I, livro III, capítulo II*).

Não é possível que uma serpente repouse no solo formando com o corpo "círculos concêntricos". Ainda mais: não há em Geometria uma linha que seja, em relação a outra, *menos* perpendicular. O autor de *A tala* ignorava, com certeza, como se define em Matemática o ângulo de uma reta com uma curva.

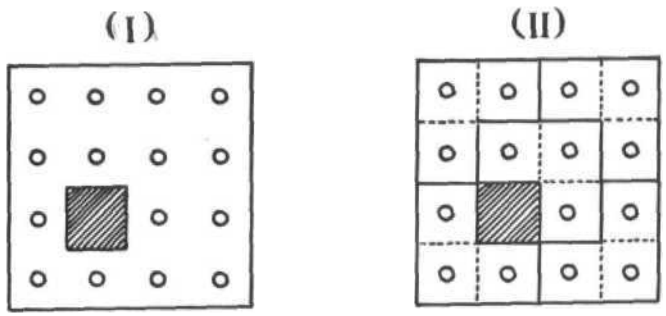
Dirão, afinal, os admiradores de Chateaubriand:

"Sendo atraente o estilo e agradável a descrição, que importa a Geometria!"

Chegamos assim a um ponto, em relação ao qual não desejamos, de modo algum, manter polêmica com o leitor.

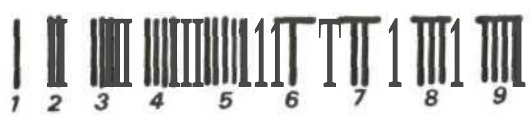
O PROBLEMA DAS ÁRVORES

Em um terreno de forma quadrada um proprietário fizera erguer uma casa. Nesse terreno existiam, plantadas segundo a disposição regular, 15 árvores.

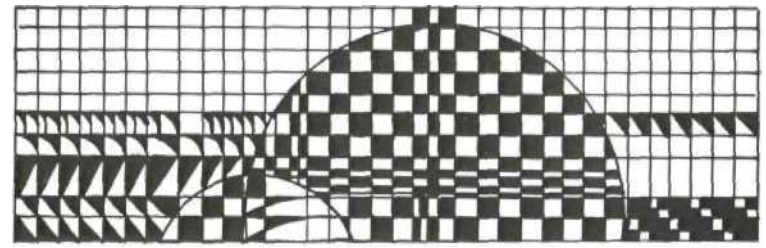


Como dividir o terreno em 5 partes iguais em forma e em grandeza, de modo que cada uma dessas partes contenham o mesmo número de árvores?

A solução é indicada pela figura II.



Algarismos chineses



PROBLEMAS ERRADOS

Everardo Backheuser[28]

São frequentemente apresentados aos meninos e meninas problemas cuja verificação nos fatos da vida prática deixaria mal o professor que os formulasse. Como exemplo deste caso, podemos relembrar os famosos problemas sobre "construção de um muro" ou sobre "fabrico de pano" por certo número de operários. Preparados sem a preocupação de adaptá-los à realidade, acabam se tornando ridículos.

Seja, por exemplo; *3 operários fazem um muro de 40m de comprimento, 2m de altura e 0,25m de espessura em 15 dias; quantos dias serão necessários para que 4 operários executem um muro de 35m de comprimento, l,5m de altura e 0,20m de espessura?*

O resultado aritmético dessa "regra de três" dará, evidentemente, uma solução expressa por um número de dias inferior a 15. Todavia, qualquer pedreiro rir-se-á do resultado, porque, para fazer-se um muro de 0,20m em vez de 0,25m de espessura, gasta-se muito mais tempo. E a razão é simples: 0,25m é a espessura

[28]Do livro *A Aritmética na escola primária.*

correspondente ao comprimento do tijolo; para a espessura de (0,20m) que é um pouco menor, impõe-se o trabalho de quebrar os tijolos segundo o comprimento desejado, o que vai exigir, para a execução da obra, um espaço de tempo muito maior.

A mesma disparidade entre a solução matemática e o resultado real ocorre com o problema relativo ao fabrico do pano: *"Se tantos operários fazem certo número de metros de pano de l,50m de largura em dado prazo, qual o tempo para, mantidas as demais condições, se fabricar pano de 0,20m de largura?"* O resultado aritmético seria de menos de metade do tempo, ao passo que na prática o tempo é, rigorosamente, o mesmo, porquanto o tear não trabalha mais rapidamente em função da largura do tecido.

Assim como estes, inúmeros outros são os casos em que o organizador de problemas se deve documentar previamente para evitar *absurdos* sem conta.

BLASFÊMIA DE UM REI

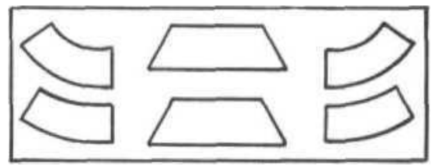
Émile Picard

Conta-se que no século XIII Afonso, o Sábio, rei de Castela, tendo ordenado aos astrônomos árabes que construíssem tábuas dos movimentos planetários, achou-as bastante complicadas, e exclamou: "Se Deus, antes de criar o mundo, tivesse me consultado, teria feito melhor as coisas." Não endossamos a blasfêmia do rei de Castela, e repetiremos, mais modestamente, a frase que o grande matemático Galois, algumas horas antes da sua morte prematura, escrevera numa espécie de testamento: "A ciência é obra do espírito humano, que é antes destinado a estudar do que a conhecer, a procurar a verdade, do que a achá-la."

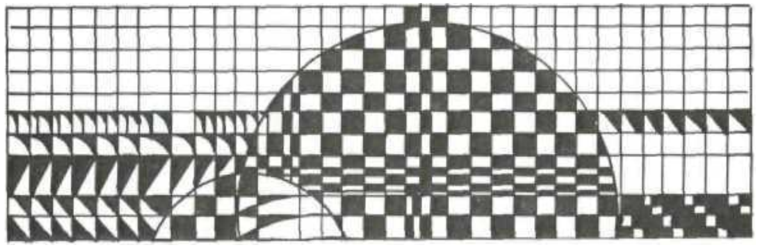
ILUSÃO DE ÓTICA

No desenho abaixo aparecem nada menos de seis figuras geométricas.

Aquele que as observar com certa atenção será levado a afirmar que os lados das figuras que estão na parte superior do quadro são maiores do que os lados correspondentes das figuras de baixo.



Existe, entretanto, uma ilusão de ótica que nos conduz a uma impressão falsa. Os trapézios indicados na figura têm os lados respectivamente iguais.



A MATEMÁTICA NA LITERATURA, OS ÂNGULOS

Entre as figuras geométricas mais citadas pelos escritores, devemos apontar em primeiro lugar o "ângulo".

Graça Aranha, na *Viagem maravilhosa,*[29] descrevendo uma estrada pela qual era galgada uma montanha, empregou figuras geométricas com admirável precisão:

"As linhas relas iam formando ângulos agudos e obtusos na encosta da montanha, que subia intricada e ardente."

Théo Filho, nas *Impressões transatlânticas*, utiliza-se da expressão "ângulo reintrante", que não é das mais comuns entre os literatos:

> *"Vistas do ângulo mais reintrante do primeiro plano..."*

[29] Graça Aranha — *Viagem maravilhosa,* p. 361.

Em geral, os escritores não distinguem um diedro de um ângulo plano. Citemos um exemplo característico colhido em *O Guarani* de José de Alencar:

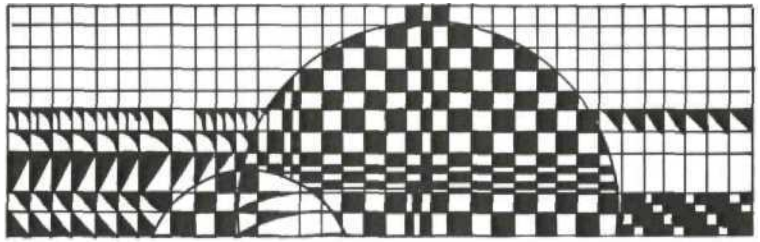
> *"Tirou a sua adaga e cravou-a na parede tão longe quanto lhe permitia a curva que o braço era obrigado a fazer para abarcar o ângulo."*

Essa frase, indicada como exemplo, ficaria sacrificada se o famoso romancista tivesse escrito:

> *"... que o braço era obrigado a fazer para abarcar o diedro".*

Convém lembrar, aliás, que o poeta Augusto dos Anjos, na primeira quadra de um dos seus sonetos, conseguiu encaixar um diedro perfeito:

> *"Ah! Porque monstruosíssimo motivo prenderam para sempre, nesta rede, dentro do ângulo diedro das paredes."*



A GEOMETRIA E O AMOR

Aos 17 anos de idade, Madame de Staël estava sendo educada num convento da França. Costumava ir visitar uma amiga, que vivia do outro lado da praça, para a qual dava uma das fachadas do convento. Um irmão dessa amiga insistia sempre em acompanhá-la no regresso a casa, e conduzia-a, ladeando duas das faces da praça. Mas, como as primeiras impressões causadas por ela iam perdendo o primitivo ardor, ele, gradualmente, e de visita para visita, foi encurtando o caminho; até que, por fim adotou a linha mais curta, seguindo pela diagonal da praça. Madame de Staël, relembrando mais tarde este caso, observou: "Deste modo, reconheci que o seu amor foi diminuindo, na proporção exata da diagonal para os dois lados do quadrado."

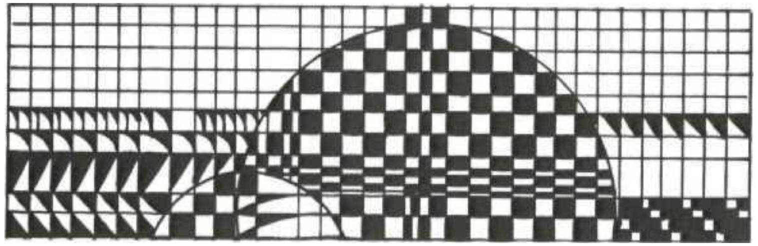
Com essa observação, de forma puramente matemática, quis, talvez, a autora de *Delphine* revelar os seus conhecimentos sobre uma proposição famosa da Geometria: "A relação entre a diagonal e o lado do quadrado é igual à raiz quadrada de 2."

Formulou, entretanto, uma comparação falsa, errada e inaceitável em Geometria.

OS GRANDES GEÔMETRAS

ERATÓSTENES — *astrônomo grego notável e amigo do célebre Arquimedes. Era poeta, orador, matemático, filósofo e atleta completo. Tendo ficado cego em consequência de uma oftalmia, suicidou-se de desgosto, deixando-se morrer de fome.*

Viveu quatro séculos a.C.



AS PÉROLAS DO RAJÁ

Um rajá deixou para as filhas certo número de pérolas e determinou que a divisão fosse feita do seguinte modo: a filha mais velha tiraria 1 pérola e um sétimo do que restasse; viria depois a segunda e tomaria para si 2 pérolas e um sétimo do restante; a seguir a terceira jovem se apossaria de 3 pérolas e um sétimo do que restasse. Assim sucessivamente.

As filhas mais moças queixaram-se ao juiz alegando que por esse sistema complicado de partilha seriam fatalmente prejudicadas.

O juiz — reza a tradição —, que era hábil na resolução de problemas, respondeu de imediato que as reclamantes estavam enganadas; a divisão proposta pelo velho rajá era justa e perfeita.

E ele tinha razão. Feita a partilha, cada uma das herdeiras recebeu o mesmo número de pérolas.

Pergunta-se: quantas eram as pérolas e quantas filhas tinha o rajá?

Resolução

As pérolas eram em número de 36 e deviam ser repartidas por 6 pessoas.

A primeira tirou uma pérola e mais um sétimo de 35, isto é, 5; logo tirou 6 pérolas.

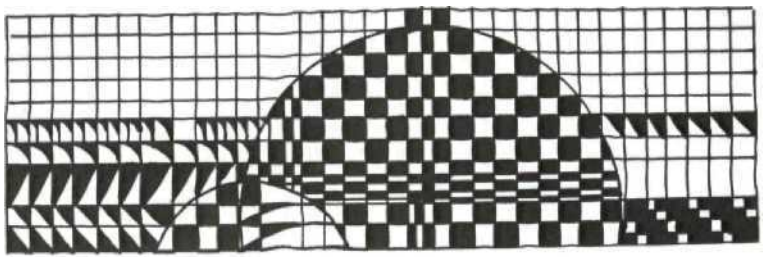
A segunda, das 30 que encontrou, tirou 2 mais um sétimo de 28, que é 4; logo tirou 6.

A terceira, das 24 que encontrou tirou 3 mais um sétimo de 21 ou 3. Tirou, portanto, 6.

A quarta, das 18 que encontrou, tirou 4 e mais um sétimo de 14. E um sétimo de 14 e 2. Recebeu também 6 pérolas.

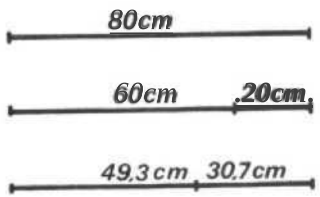
A quinta encontrou 12 pérolas; dessas 12 tirou 5 e um sétimo de 7, isto é, 1; logo tirou 6.

A filha mais moça recebeu, por fim, as 6 pérolas restantes.



DIVISÃO ÁUREA

Em que consiste a *divisão áurea* de um segmento?



Expliquemos, de modo elementar, esse curioso problema de Geometria.

Tomemos um segmento de 80cm de comprimento, por exemplo.

Dividamos esse segmento em duas partes desiguais, tendo a maior 60cm, e a menor 20cm.

Calculemos a razão entre o segmento todo e a maior; para isto, dividimos 80 por 60, e achamos:

$$80 : 60 = 1{,}33$$

Dividindo a parte maior (60) pela menor (20) teremos:

$$60 : 20 = 3$$

Notamos assim que os resultados não são iguais. O primeiro quociente é 1,33 e o segundo é 3.

Procuremos dividir o segmento dado em duas partes tais que o segmento *total* (80) dividido pela maior dê o mesmo resultado que a maior dividida pelo menor.

No exemplo proposto, a solução será obtida se dividirmos o segmento de 80cm em duas partes medindo respectivamente 49,3cm e 30,7cm. Temos, como é fácil verificar:

$$\frac{80}{49{,}3} = 1{,}61 \qquad \frac{49{,}3}{30{,}7} = 1{,}61$$

Daí a proporção:

$$\frac{\text{Segmento total}}{\text{Parte maior}} = \frac{\text{Parte maior}}{\text{Parte menor}}$$

Lê-se: O segmento total está para a parte maior assim como a parte maior está para a menor.

A divisão de um segmento feita segundo essa proporção denomina-se *divisão áurea ou divisão em média e extrema razão.*

Na divisão áurea a parte maior é denominada *segmento áureo.*

O número que exprime sempre a relação entre o segmento áureo tem o seguinte valor aproximado 1,618.

Esse número é, em geral, designado pela letra grega φ (fi).

É evidente que se quiséssemos dividir um segmento *AB* em duas partes desiguais, teríamos uma infinidade de maneiras. Há uma, porém, que parece ser a mais *agradável* ao espírito como se traduzisse uma operação harmoniosa para os nossos sentidos — é a divisão em *média e extrema razão, a sectio divina* de Lucas Paccioli,[30] também denominada *sectio aurea* por Leonardo da Vinci.[31]

O matemático alemão Zeizing formulou, em 1855, nas suas Aetetische Farschungen, o seguinte princípio:

> *"Para que um todo dividido em duas partes desiguais pareça belo do ponto de vista da forma, deve apresentar entre a parte menor e a maior a mesma relação que entre esta e o todo."*

"Até hoje", acentua João Ribeiro, "não se conseguiu descobrir a razão de ser, o 'porquê' dessa beleza."[32] Zeizing, que levou até muito longe os estudos, aponta vários e curiosos exemplos que constituem uma eloquente demonstração para o princípio da *sectio aurea.*

É fácil observar que o título posto na lombada de uma obra divide, em geral, o compartimento total do livro em média e extrema razão. O mesmo acontece com a linha dos olhos que divide, nas pessoas bem conformadas, o comprimento total do rosto em média e extrema razão. Observa-se também a *sectio divina* nas partes em que as falanges dividem os dedos das mãos.

A divisão áurea aparece ainda na Música, na Poesia, na Pintura e até na Lógica.

Uma relação notável — demonstrada em Geometria — define o lado do decágono regular como sendo o segmento áureo do raio.

A divisão áurea, da qual Vitruvio[33] teve rápido vislumbre, surgiu para o mundo científico na obra de Paccioli — *Divina proportione* —, publicada em Veneza em 1509. Leonardo da Vinci,

[30]Lucas Paccioli ou Lucas de Burgo, monge franciscano, nasceu em Burgo, na Toscana, em meados do século XV e morreu em Florença no princípio do século XVI.
[31]Leonardo da Vinci (1452-1519), célebre artista florentino, autor da Gioconda e da Ceia. Foi escultor, arquileto, pintor, engenheiro, escritor **e** músico.
[32]João Ribeiro — *Páginas de estética.*
[33]Maiita C. Ghyka — *Le nombre d'or,* 3ª ed. **1931, I** vol.

com a polimorfia de seu incomparável talento, sentiu-se também seduzido pelo mistério da chamada simetria geométrica realçada pela divisão áurea. O célebre astrônomo alemão João Kepler, que formulou as leis da gravitação universal, era um verdadeiro fetichista da divina proporção." A Geometria", dizia ele "tem dois tesouros. Um é o teorema de Pitágoras; o outro é a *sectio divina."*[34]

> *Sem os recursos da Matemática não nos seria possível compreender muitas passagens da Santa Escritura.*
>
> SANTO AGOSTINHO

PERCENTAGEM

Raros são os escritores de renome que não erraram em Matemática. Rui Barbosa, num vibrante discurso pronunciado no Senado, deixou escapar esta expressão:

> *"Isto é, no jogo dessas transações, que tão gigantesca soma de valores representam, não há deslocação do meio circulante senão na percentagem de 8 para 92." (Finanças e política da República, 1892, p.74.*)

A relação de 8 para 92 não exprime, como julgava a águia de Haia, uma percentagem. O prof. Cecil Thiré, no seu compêndio de Matemática, diz claramente: "A relação entre grandezas, quando estabelecida a tanto por cento, é denominada percentagem."

Quem poderá confundir número com algarismo? E, no entanto, Francisco d'Auria, contabilista notável, escreveu na sua *Matemática comercial,* p. 82:

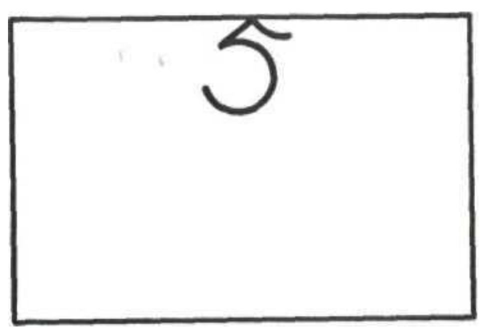
> "*... foi adotado, na prática, o número 100 como algarismo de referência."*

[34]**Cf.** ***Curso de*** *Matemática* — ***4º*** *ano* de **Euclides Roxo, Thiré e Mello e Souza.**

TRANSFORMAÇÃO CURIOSA

É possível transformar-se o algarismo 3, escrito à esquerda, num 5 (escrito à direita), com auxílio de uma linha fechada; isto é, sem levantar a caneta do papel?

A questão proposta pertence ao número daquelas que desafiam a sagacidade dos mais hábeis solucionistas.



A solução — aliás muito simples — é dada pela figura acima: prolonga-se a perna superior do algarismo 3 e forma-se um retângulo; ao atingir o ponto final de fechamento completa-se o algarismo 5 com a pequena curva superior.

MORTE TRÁGICA DE ALGUNS MATEMÁTICOS

Tales de Mileto — asfixiado pela multidão ao sair de um espetáculo.

Arquimedes — assassinado por um soldado romano.

Eratóstenes — suicidou-se, deixando-se morrer de fome.

Hipátia — lapidada por um grupo de exaltados durante um motim em Alexandria.

Evaristo Galois — morto em duelo.

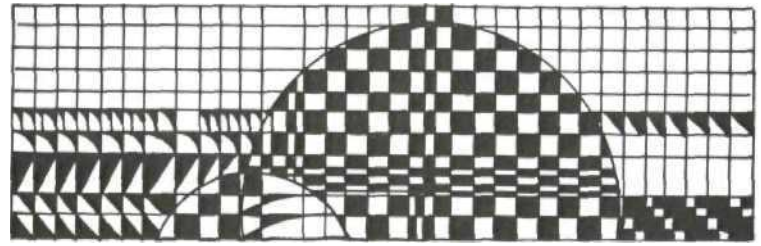
Pitágoras — assassinado, em Tarento, durante uma revolução.

Algarismos árabes

LEIBNIZ

No seu elogio de Leibniz, Fontenele disse do grande geômetra e filósofo: "Ele gostava de ver crescerem nos jardins de outrem as plantas para as quais fornecera a semente. Estas sementes tão frequentemente mais apreciadas que as próprias plantas; a arte de descobrir em Matemática é mais preciosa que a maioria das coisas que se descobrem."

HIPARCO — *um dos mais eminentes astrônomos gregos, nasceu em 160 a.C. Ao ser informado do aparecimento de uma estrela de grande brilho, resolveu compor um catálogo no qual conseguiu reunir 1 .080 estrelas fixas. Foi o primeiro a fixar a posição de um ponto da superfície da terra com auxílio da latitude e da longitude.*



O HOMEM QUE CALCULAVA

Malba Tahan[35]

CAPÍTULO 1

''No qual encontro, durante uma excursão, um singular viajante. Que fazia o viajante e quais eram as palavras que ele pronunciava."

Voltava eu, certa vez, ao passo lento do meu camelo, pela estrada de Bagdá, de uma excursão às famosas ruínas de Samarra, nas margens do Tigre, quando avistei, sentado numa pedra, um viajante modestamente vestido, que parecia repousar das fadigas de alguma viagem.

Dispunha-me a dirigir ao desconhecido o *salam*[36] trivial dos caminhantes, quando, com grande surpresa, o vi se levantar e pronunciar vagarosamente:

[35]Do livro *Contos de Malba Tahan.*
[36]*Salam,* saudação.

— Um milhão, quatrocentos e vinte e três mil, setecentos e quarenta e cinco!

Sentou-se em seguida, e ficou em silêncio, a cabeça apoiada nas mãos, como se estivesse absorto em profunda meditação.

Parei a pequena distância e coloquei-me a observá-lo, como faria diante de um monumento histórico dos tempos lendários.

Momentos depois, o homem levantou-se novamente e, com voz clara e pausada, enunciou outro número igualmente fabuloso:

— Dois milhões, trezentos e vinte e um mil, oitocentos e sessenta e seis!

E assim, várias vezes, o singular viajante punha-se de pé, dizia em voz alta um número de vários milhões, e sentava-se, em seguida, na pedra tosca do caminho.

Sem saber dominar a curiosidade que me espicaçava, aproximei-me do desconhecido e, depois de saudá-lo em nome de Alá (com ele a oração e a glória!), perguntei-lhe a significação daqueles números que só poderiam figurar em gigantescas proporções.

— Forasteiro! — respondeu o viajante — Não censuro a curiosidade que te levou a perturbar a marcha dos meus cálculos e a serenidade dos meus pensamentos. E já que soubeste ser delicado no falar e no pedir, vou atender ao teu desejo. Para tanto, preciso, porém, contar-te a história da minha vida!

E narrou-me o seguinte:

CAPÍTULO II

"No qual o homem que calculava conta a história de sua vida. Como fiquei informado dos cálculos prodigiosos que ele realizava e porque nos tornamos companheiros de jornada."

— Chamo-me Ibraim Tavir, e nasci numa pequenina aldeia não longe de Disful, nas margens do rio Kerkab. Muito moço

ainda, empreguei-me como pastor a serviço de um rico senhor persa. Todos os dias, ao nascer do sol, levava para o campo o grande rebanho e era obrigado a trazê-lo ao abrigo antes de cair a noite. Com receio de perder alguma ovelha tresmalhada e ser, por tal negligência, severamente castigado, contava-as várias vezes durante o dia. Fui, assim, adquirindo, pouco a pouco, tal habilidade em contar que, por vezes, num relance, calculava sem erro o rebanho inteiro. Não contente com isso, passei a exercitar-me, contando os pássaros quando em bandos voavam pelo céu afora. Tornei-me habilíssimo nessa arte. Ao fim de alguns meses, graças a novos e constantes exercícios, contando formigas e outros pequeninos insetos, cheguei a praticar a proeza incrível de contar todas as abelhas de um enxame! Essa façanha de calculista, porém, nada viria a valer diante das muitas outras que mais tarde pratiquei! O meu generoso amo possuía, em dois ou três oásis distantes, grandes plantações de tâmaras e, informado das minhas habilidades matemáticas, encarregou-me de dirigir a venda delas, que eram por mim contadas nos cachos, uma a uma. Trabalhei assim, junto das tamareiras, cerca de dez anos. Contente com os lucros que obteve, o meu bondoso patrão, acaba de conceder-me alguns dias de repouso, e vou agora a Bagdá visitar a minha família que não vejo há muitos anos. E para não perder tempo, exercito-me durante a viagem, contando as folhas das árvores que encontro no caminho!

E, apontando para uma velha e grande figueira que se erguia a pequena distância, ajuntou:

— Aquela árvore, por exemplo, ostenta nos seus cento e noventa e dois ramos, a bagatela de um milhão, duzentos e quarenta e quatro mil, setecentos e vinte e duas folhas!

— Mac'Alá! — exclamei atônito. — É inacreditável que possa um homem contar, com um rápido olhar, todas as folhas de uma árvore! Tal habilidade pode proporcionar a qualquer pessoa, meio seguro de ganhar riquezas invejáveis!

— Como assim? — perguntou Ibraim. — Jamais me passou pela idéia que se pudesse ganhar dinheiro contando aos milhões folhas de árvores e enxames de abelhas!

— A vossa admirável habilidade — expliquei — pode ser empregada em vinte mil casos diferentes. Numa grande capital como Constantinopla, ou mesmo em Bagdá, sereis um auxiliar precioso para o governo. Podereis calcular populações, exércitos e rebanhos. Fácil vos será avaliar os recursos do país, o valor das colheitas, os impostos, as mercadorias e todas as fontes de renda do Estado. Asseguro-vos, pelas relações que mantenho, pois sou *bagdali,*[37] que não vos será difícil obter um lugar de destaque junto ao governador. Podeis, talvez, exercer o cargo de vizir tesoureiro ou secretário da Fazenda muçulmana!

— Se assim é, ó jovem — respondeu o calculista —, não hesito. Vou contigo para Bagdá.

E sem mais preâmbulos, acomodou-se como pôde em cima do meu camelo (único que possuíamos), e pusemo-nos a caminhar pela larga estrada em busca da gloriosa cidade de Bagdá.

CAPÍTULO III

"A singular aventura dos 35 camelos que deviam ser repartidos por três árabes. O homem que calculava faz uma divisão que parecia impossível contentando a três interessados. O lucro inesperado que obtivemos com a transação."

Poucas horas viajamos sem interrupção, pois, logo ocorreu uma curiosa aventura na qual o homem que calculava pôs em prática, com grande talento, as suas habilidades de exímio algebrista.

Encontramos perto de um antigo caravançará, já quase em abandono, três homens que discutiam acaloradamente ao pé de uma porção de camelos.

O inteligente Ibraim Tavir procurou informar-se do que se tratava.

[37] **De um artigo publicado no livro *Matemática — /." ano,* de Cecil Thiré e Mello t Souza.**

— Somos irmãos — disse o mais velho —, e recebemos como herança esses 35 camelos. Segundo a vontade expressa de meu pai, devo receber a metade, o meu irmão Hamed Namir, uma terça parte, e ao Harim, o mais moço, deve caber, apenas, a nona parte. Não sabemos, porém, como dividir dessa forma 35 camelos, pois a metade de 35 é 17,5! Como fazer a partilha se a terça parte e a nona parte de 35, também não são exatas?

— É muito simples — replicou o homem que calculava. — Encarrego-me de fazer, com justiça, essa divisão, se permitirem que eu junte aos 35 camelos da herança este belo animal que em boa hora aqui nos trouxe!

Neste ponto, procurei intervir na questão:

— Não posso consentir em semelhante loucura! Como poderíamos concluir a viagem se ficássemos sem o nosso camelo?

— Não te preocupes com o resultado, ó *bagdali* — replicou em voz baixa o homem que calculava. — Sei muito bem o que estou fazendo. Cede-me o teu camelo e verás no fim a que conclusão quero chegar.

Foi tal o tom de segurança com que ele falou, que não tive dúvidas em entregar-lhe o meu belo *jamal,* que, imediatamente, foi reunido aos 35 que ali estavam, para serem repartidos pelos três herdeiros.

— Vou agora — disse ele, dirigindo-se aos três irmãos — fazer a divisão justa dos camelos que são agora, como vêm, em número de 36.

Voltando-se para o mais velho dos irmãos, assim falou:

— Devias receber, meu amigo, a metade de 35, isto é, 17,5. Receberás a metade de 36, e portanto, 18. Nada tens a reclamar, pois saíste lucrando bastante na divisão!

E voltando-se para o segundo maometano, continuou:

— E tu, Hamed Namir, devias receber um terço de 35, isto é, l i e pouco. Vais receber um terço de 36, isto é, 12. Não poderás protestar, pois, também sais com visível lucro na transação.

E ao mais moço:

— E tu, jovem Harim Namir, segundo a vontade de teu pai, devias receber a nona parte de 35, isto é, 3 e tanto. Vais receber a nona parte de 36, isto é, 4. O teu lucro foi igualmente notável. Só tens a agradecer-me pelo resultado!

E o homem que calculava concluiu:

— Pela vantajosa divisão feita entre os irmãos Namir, partilha em que todos três saíram lucrando, couberam 18 camelos ao primeiro, 12 ao segundo e 4 ao terceiro, o que dá um resultado (18 + 12 + 4) de 34 camelos. Dos 36 camelos, sobram portanto, dois. Um pertence, como sabem, ao "bagdali", meu amigo e companheiro; o outro cabe por direito a mim, por ter resolvido, a contento de todos, o complicado problema da herança!

— Sois inteligente, ó estrangeiro! — exclamou o mais velho dos três irmãos. — Aceitamos a vossa partilha na certeza de que ela foi feita com justiça e equidade!

O homem que calculava tomou logo posse de um dos mais belos *jamales* do grupo e disse-me, entregando-me pela rédea o animal que me pertencia:

— Poderás agora, meu amigo, continuar a viagem no teu camelo manso e seguro! Tenho já um outro, especialmente para mim!

E continuamos a nossa jornada para Bagdá.

CAPÍTULO IV

"No qual encontramos um rico xeique a morrer de fome no deserto. A proposta que ele nos fez sobre os 8 pães que trazíamos, como se resolveu de modo imprevisto, o pagamento de 8 pães com 8 moedas."

Três dias depois, quando nos aproximávamos de uma pequena aldeia — denominada Lazzakka —, encontramos, caído na estrada, um pobre viajante roto e ferido.

Socorremos o infeliz e dele próprio ouvimos o relato de sua singular aventura.

Chamava-se Salem Nasair, e era um dos mais ricos mercadores de Bagdá. Ao regressar, poucos dias antes, de Bassora com uma grande caravana, fora naquele lugar atacado por um bando terrível de nômades persas do deserto. A caravana foi saqueada, e quase todos os homens pereceram nas mãos dos beduínos. Ele — o chefe — conseguira milagrosamente escapar, oculto na areia, entre os cadáveres dos seus escravos!

E, ao concluir a narrativa de sua desgraça, perguntou-nos com voz angustiosa:

— Trazeis, agora, ó muçulmanos, alguma coisa que se possa comer? Estou quase a morrer de fome!

— Tenho três pães — respondi.

— Tenho ainda cinco! — ajuntou, a meu lado, o homem que calculava.

— Pois bem — respondeu o xeique —, juntemos esses 8 pães e façamos uma sociedade única. Quando chegar a Bagdá, prometo pagar com 8 moedas de ouro o pão que comer!

Assim fizemos. No dia seguinte, ao cair da tarde, chegamos a Bagdá.

Quando atravessamos uma praça, encontramos um rico cortejo. Na frente marchava, em garboso alazão, o poderoso Ke-Pachá, um dos vizires do governador de Bagdá.

O vizir, ao avistar o xeique Salem Nasair em nossa companhia chamou-o, e fazendo parar a sua poderosa guarda, perguntou-lhe:

— Que te aconteceu, ó meu amigo? Por que te vejo chegar a Bagdá, roto e maltrapilho, em companhia de dois homens que não conheço?

O desventurado xeique narrou, minuciosamente, ao poderoso ministro tudo o que lhe ocorrera no caminho, fazendo a nosso respeito os maiores elogios.

— Paga sem perda de tempo esses dois forasteiros — ordenou-lhe o grão-vizir. E tirando de sua bolsa 8 moedas de ouro, entregou-as a Salem Nasair.

Feito o que, ajuntou:

— Quero levar-te agora mesmo ao palácio, pois o governador deseja, com certeza, ser informado da nova afronta que os bandidos e beduínos nos fizeram, atacando uma caravana de Bagdá!

O rico Salem Nasair disse-nos, então:

— Vou deixar-vos, meus amigos. Quero antes, porém, agradecer o grande auxílio que ontem recebi de vós. E para cumprir a palavra dada, vou pagar agora, com 8 dinares de ouro o pão que generosamente me destes!

E dirigindo-se ao homem que calculava, disse-lhe:

— Vais receber, pelos cinco pães, cinco moedas! — E voltando-se para mim, concluiu: — E tu, ó *bagdali* pelos três pães, vais receber três moedas!

Com grande surpresa, o calculista objetou, respeitoso:

— Perdão, ó xeique! Essa divisão pode ser muito simples, mas não é justa! Se dei 5 pães, devo receber 7 moedas; o meu companheiro *bagdali,* que deu 3 pães, deve receber apenas 1 moeda!

— Por Alá! — exclamou o oficial interessado, vivamente, pelo caso. — Como justificar, ó estrangeiro! tão disparatada forma de pagar 8 pães com 8 moedas! Se contribuíste com 5 pães, por que exiges 7 moedas? Se o teu amigo contribuiu com 3 pães, por que deve receber uma única moeda?

O homem que calculava, aproximando-se do prestigioso ministro, assim falou:

— Vou provar, ó vizir, que a divisão das 8 moedas pela forma por mim proposta é a mais justa e a mais exata. Quando, durante a viagem, tínhamos fome, eu tirava um pão da caixa em que estavam guardados e repartia-o em três pedaços, comendo cada um de nós um desses pedaços. Todos os 8 pães foram, portanto, divididos em 3 pedaços. Se dei 5 pães, dei, é claro, 15 pedaços; se o meu companheiro deu 3 pães, contribuiu com 9 pedaços. Houve, assim, um total de 24 pedaços. Desses 24 pedaços, cada um de nós comeu 8. Ora, se eu, dos 15 pedaços que dei, comi 8, dei, na realidade, 7; o meu companheiro deu, como disse, 9 pedaços e comeu também 8, logo deu apenas 1. Os 7 que dei com 1 que o *bagdali* deu foram os 8 que couberam ao xeique Salem Nasair. Logo, é justo, que eu receba 7 moedas, e o meu companheiro receba apenas 1.

O grão-vizir, depois de fazer os maiores elogios ao homem que calculava, ordenou que lhe fossem entregues 7 moedas, pois a mim me cabia apenas, por direito, uma.

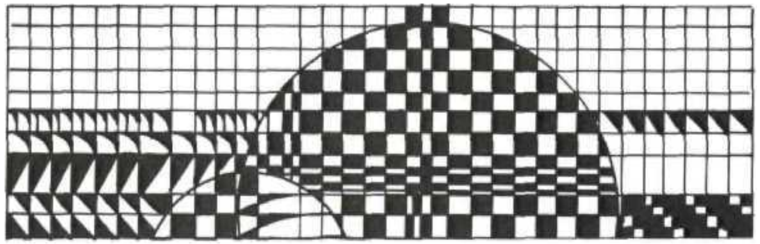
— Essa divisão — replicou o calculista —, conforme provei, é matematicamente justa, mas não é perfeita aos olhos de Deus!

E tomando as 8 moedas na mão, dividiu-as em dois grupos iguais, de 4 cada uma. Deu-me um dos grupos, guardando para ele o outro.

— Este homem é extraordinário! — exclamou o grão-vizir. — Além de me parecer um grande sábio, habilíssimo nos cálculos e na Aritmética, é bom para o amigo e generoso para o companheiro. Tomo-te hoje mesmo, ó exímio Matemático, para meu secretário!

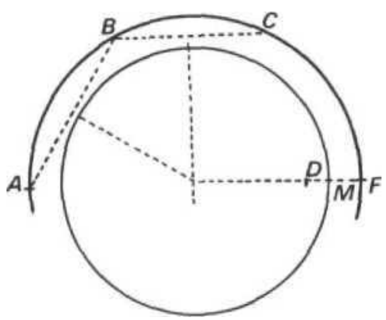
— Poderoso vizir — respondeu o homem que calculava —, vejo que acabas de fazer em 36 palavras, com um total de 185 letras, o maior elogio que ouvi em minha vida, que eu, para agradecer-vos, sou forçado a empregar 72 palavras nas quais figuram nada menos de 354 letras. O dobro precisamente! Que Alá vos abençoe e vos proteja!

Com tais palavras, o homem que calculava deixou a todos nós maravilhados de sua argúcia e do seu invejável talento de calculista.



O PROBLEMA DA PISTA

Quatro homens que possuíam cavalos de corrida tinham as suas casas situadas nos pontos A, B, C e D. Esses proprietários resolveram construir, de comum acordo, uma pista circular para corridas.



Para que não houvesse discussões combinaram que a pista passasse a igual distância das quatro casas.

O problema é simples e pode ser resolvido com a régua e o compasso.

Tracemos a circunferência que passa pelos pontos A, B, e C e que terá o centro em I. Tracemos o raio IF, que passa pelo ponto D. Pelo ponto M (meio do segmento DF), e com o centro em I, tracemos outra circunferência.

Esta circunferência resolverá o problema definido: o traçado da pista. Há outras soluções.

RETÂNGULO ÁUREO

Para que um retângulo seja harmonioso é necessário que a altura seja igual ao segmento áureo da base. O retângulo que apresenta essa relação notável entre as suas dimensões é denominado retângulo áureo ou retângulo módulo.

Encontramos o retângulo áureo, conforme observou Timerding no formato da maior parte dos livros, dos quadros, dos pequenos tabletes de chocolate, nos cartòes-postais, nos selos etc. Assinalamos ainda o retângulo áureo nas fachadas de muitos edifícios, que se distinguem pela elegância de suas linhas arquitetônicas, e no formato comum de quase todos os jornais e revistas.

No retângulo áureo a altura é igual, aproximadamente, ao produto da base pelo número 0,618.

AS POTÊNCIAS DE 11

As potências inteiras de 11 não deixam de chamar a nossa atenção e podem ser incluídas entre os produtos curiosos.

11 x 11 = 121
11 x 11 x 11 = 1331
11 x 11 x 11 x 11 = 14641

Disposição não menos interessante apresentam os algarismos dos números 9, 99, 999 etc. quando elevados ao quadrado:

$$9^2 = 81$$
$$99^2 = 9801$$
$$999^2 = 998001$$
$$9999^2 = 99980001$$

Vale a pena observar que o número de noves à esquerda é igual ao número de zeros que ficam entre os algarismos 8 e 1.

ILUSÃO DE ÓTICA

Eis uma curiosa ilusão de ótica. Na figura da página ao lado as curvas nos aparecem como se fossem elipses deformadas. **Puro** engano. Todas as curvas principais do desenho são círculos que têm o centro no centro da figura.

A Matemática possui uma força maravilhosa capaz de ***nos*** *fazer compreender muitos mistérios de nossa Fé.*

SÃO JERÔNIMO

OS GRANDES GEÔMETRAS

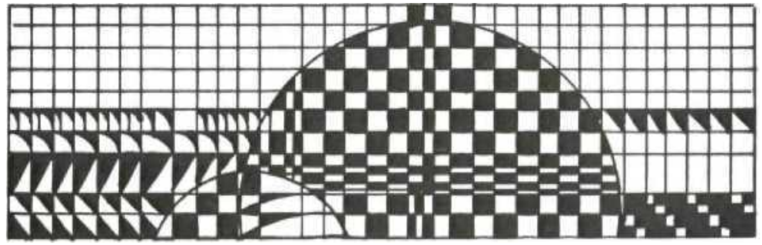
EUCLIDES — *um dos mais famosos geômetras da Antiguidade, nasceu no ano 300 a.C. e morreu em 275 a.C. Estudou em Atenas com os sucessores de Platão. Escreveu uma obra, intitulada* Os elementos, *que se tornou notável. Construiu as suas teorias geométricas baseado em várias proposições (postulados e definições) aceitas sem demonstrações. O V postulado* — o das paralelas —*foi que d'Alembert denominou o escândalo da Geometria.*

ORIGEM DOS SINAIS DE RELAÇÃO

Roberto Record, matemático inglês, terá sempre o seu nome apontado na história da Matemática por ter sido o primeiro a empregar o sinal = (igual) para indicar igualdade. No seu primeiro livro, publicado em 1540, Record colocava o símbolo entre duas expressões iguais; o sinal =, constituído por dois pequenos traços paralelos, só apareceu em 1557. Comentam alguns autores que nos manuscritos da Idade Média o sinal = aparece como uma abreviatura da palavra *est*.

Guilherme Xulander, matemático alemão, indicava a igualdade, em fins do século XVI, por dois pequenos traços paralelos verticais; até então a palavra *aequalis* aparecia, por extenso, ligando os dois membros da igualdade.

Os sinais > (maior que) e < (menor que) são devidos a Thomaz Harriot, que muito contribuiu com seus trabalhos para o desenvolvimento da análise algébrica.



PROTÁGORAS E O DISCÍPULO

Conta-se que Protágoras, sofista notável, admitiu em sua escola o jovem Enatlus. E como este fosse pobre, firmou com o mestre um contrato: pagaria as lições quando ganhasse a primeira causa.

Terminado o curso, Enatlus não se dedicou à advocacia e preferiu trabalhar no comércio, carreira que lhe pareceu mais lucrativa.

De quando em vez, Protágoras interpelava o seu ex-discípulo sobre o pagamento das aulas e ouvia como resposta invariável a mesma desculpa:

— Logo que ganhar a primeira causa, mestre! É do nosso contrato!

Não se conformou Protágoras com o adiamento indefinido do pagamento e levou a questão aos tribunais. Queria que o jovem Enatlus fosse obrigado, pela justiça, a efetuar o pagamento da dívida.

Ao ser iniciado o processo perante o tribunal, Protágoras pediu a palavra e assim falou:

— Senhores juizes! Ou eu ganho ou perco esta questão! Se eu ganhar, o meu ex-discípulo é obrigado a me pagar pois a sentença foi a meu favor; se eu perder, o meu ex-discípulo também é obrigado a me pagar em virtude do nosso contrato, pois ganhou a primeira causa.

— Muito bem! Muito bem! — exclamaram os ouvintes. — De qualquer modo, Protágoras ganha a questão!

Enatlus que era muito talentoso, ao perceber que o seu antigo mestre, queria vencê-lo por um hábil sofisma, pediu também a palavra e disse aos membros do tribunal:

— Senhores juizes! Ou eu perco ou ganho esta questão! Se perder, não sou obrigado a pagar coisa alguma, pois não ganhei a primeira causa; se ganhar também, não sou obrigado a pagar coisa alguma, pois a sentença foi a meu favor!

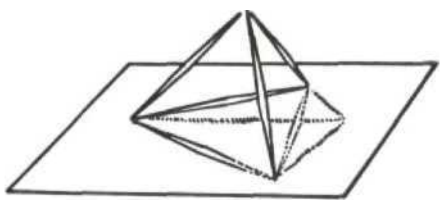
E dizem que os magistrados ficaram atrapalhados e não souberam lavrar a sentença sobre o caso.

O sofisma de Protágoras consistia no seguinte: quando convinha aos seus interesses, ele fazia valer o contrato, e quando este podia de qualquer forma prejudicá-lo, ele pretendia valer-se da sentença. Do mesmo sofisma, o jovem Enatlus lançou mão com grande habilidade.

COM SEIS PALITOS

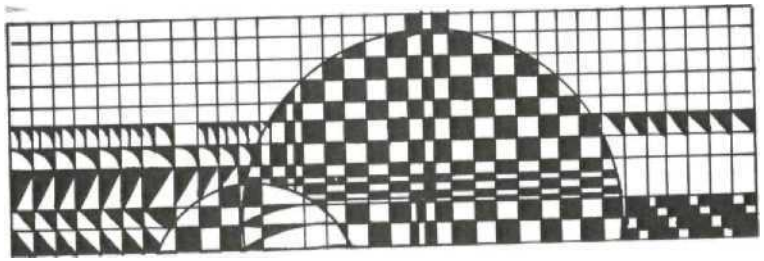
Construir com seis palitos iguais quatro triângulos também iguais.

Não é possível resolver esse problema colocando-se os seis palitos sobre uma superfície plana.



A única solução é a seguinte: colocamos os seis palitos de modo que eles formem as arestas de um tetraedro regular.

Os quatro triângulos pedidos corresponderão às quatro faces desse tetraedro.



A BRAVATA DE ARQUIMEDES

J. C. Mello e Souza

Um fato, a que Gino Loria atribui o cunho de lenda, caracteriza o valor de Arquimedes.

Mandara Hierão construir um navio de grandes dimensões, o qual, devido a seu peso considerável, não pôde ser retirado do estaleiro e lançado ao mar, Hierão, receoso de perder o sacrifício despendido na construção da pesada nave, pediu, para a solução do caso, o auxílio do reconhecido engenho de Arquimedes. Este, utilizando-se de uma máquina que inventou especialmente para tal fim, conseguiu, com geral surpresa, deslocar a enorme embarcação e levou-a, com relativa facilidade, até o mar.

Diz-se que, ao receber as felicitações do rei pelo êxito de seus esforços, o geômetra respondeu com uma frase que encerra a bravata célebre na ciência:

— Dá-me um ponto de apoio no espaço, e eu deslocarei terra e céu!

Como pretenderia o célebre siracusano levar a termo essa proeza?

Segundo calculou Ferguson, na *Astronomy Explained*, um

homem pesando 80 quilos, com uma alavanca de 20 quintilhões de quilómetros, ao cabo de vinte bilhões de anos, faria a Terra deslocar-se 25 milímetros! *Excusez du peu!*

O ESTUDO DA MATEMÁTICA[38]

Euclides Roxo

Para os gregos, a Geometria acabou por tornar-se uma ciência puramente teórica e lógica, que eles estudaram quase que só pela beleza da sua estrutura.

Modernamente, porém, o estudo da Geometria e da Matemática em geral tem um grande interesse prático pela aplicação de suas verdades a problemas vitais de engenharia, de arquitetura, de física e de todas as outras ciências. Além desse interesse prático, tem como objetivo, não menos importante, a educação do pensamento lógico e do raciocínio correto.

OS SETE NAVIOS

C. Laisant

Certa vez, já lá vão alguns anos, por ocasião de um congresso científico, e no fim de um almoço em que se encontravam reunidos vários matemáticos conhecidos, alguns deles ilustres, pertencentes a diversas nacionalidades, Eduardo Lucas anunciou-lhes, inesperadamente, que lhes ia propor um problema de matemática, e dos mais difíceis.

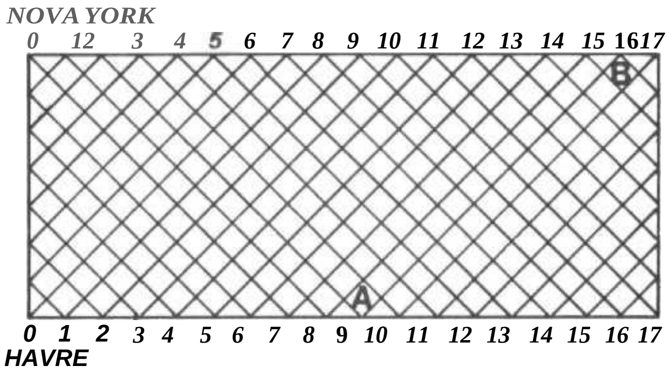
— Suponho — começou o ilustre geômetra —, é, infelizmente, simples suposição, que todos os dias, ao meio-dia, parte do Havre para Nova York um navio e que, à mesma hora, um paquete da

[38] Do livro *Curso de Matemática — 3.º ano*, p. 13.

mesma companhia parte de Nova York para o Havre. A travessia é feita sempre em sete dias, tanto num sentido como no outro. Quantos navios dessa companhia, seguindo a rota oposta, encontra, em caminho, o paquete que parte do Havre hoje ao meio-dia?

Alguns dos ilustres ouvintes responderam estouvadamente: "Sete." Outros ficaram silenciosos como se a questão os surpreendesse. Não houve um só que apresentasse a solução exata, que a figura abaixo patenteia com nitidez perfeita.

Esse episódio, absolutamente autêntico, encerra dois ensinamentos. Mostra-nos, em primeiro lugar, quanta indulgência e quanta paciência devemos ter para os alunos que não compreendem, à primeira vista, as coisas que constituem novidade para eles; depois, torna bem visível a grandessíssima utilidade das representações gráficas. Com efeito, se o mais vulgar dos matemáticos possuísse esta noção, a figura que apresentamos ter-se-ia formado espontaneamente no seu espírito; tê-la-ia visto e não teria hesitado. Os auditores de Lucas, pelo contrário, não pensavam senão nos navios que deviam partir, e esqueciam-se dos que já iam a caminho; raciocinavam, mas não viam.



É, pois, certo que um vapor, cujo gráfico é AB, tendo partido do Havre no dia 9 chega a Nova York no dia 16, encontra-se no mar com 13 barcos, mais o que entra no Havre no momento da partida, e mais o que sai de Nova York no momento da chegada, isto é, 15 ao todo.

MULTIPLICAÇÃO PELA ESQUERDA

Uma multiplicação é, em geral, iniciada pelo algarismo da direita do multiplicador; um calculista excêntrico poderia, porém, começá-la pelo algarismo da esquerda, sem tornar, por tal sistema, a operação mais trabalhosa.

No exemplo que damos abaixo, a multiplicação dos números 632 e 517 pode ser efetuada pelos dois processos.

Vemos, pela disposição dos cálculos, que os produtos parciais são os mesmos em ambos os casos, apenas colocados em ordem diversa.

Além disso, para obter-se, no segundo caso, a correspondência das unidades da mesma espécie, é preciso avançar cada produto parcial uma coluna para a direita, em relação ao produto anterior, em vez de recuá-lo uma coluna para a esquerda, como se faz comumente.

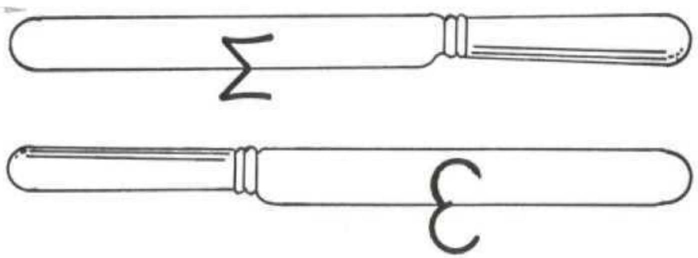
Exemplo:

```
    632        632
    517        517
  -----      -----
   4424       3160
   632         632
  3160         4424
  -----      ------
 326744     326744
```

METAMORFOSE DO NÚMERO 2

O número dois pode se converter, por um processo bem simples, num número três, e, além disso, na letra ***M*** também.

Para tanto, não é preciso mais do que um papel branco e uma faca com a lâmina limpa e reluzente.



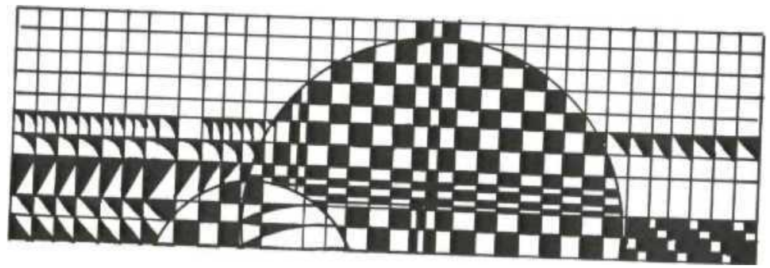
Para efetuar-se esta curiosa experiência, basta colocar a faca sobre o 2, precisamente no centro. A metade superior refletida no lado da folha formará o algarismo 3, assim como a parte inferior, refletida também na parte oposta da folha da faca, formará a letra *M*.

CURVAS E EQUAÇÕES

Dizia Taine que uma pequenina equação contém a curva imensa cuja lei traduz.[39] Completando o pensamento do grande filósofo francês, podemos acrescentar que uma curva, em sua singeleza, encerra uma infinidade de propriedades; reflete um semnúmero de fórmulas; sugere um mundo de transformações. Aliás, na expressão feliz de Sofia Germain, "a Álgebra é uma Geometria escrita, e a Geometria, uma Álgebra figurada".

"O matemático não é perfeito", observa Goethe, "senão quando sente a beleza da verdade." Assim, pois, se uma equação, traduzindo certa lei, vem revelar-nos uma propriedade nova, a curva representativa dessa equação realça a incomparável "beleza dessa verdade".

[39]*A. Rebière* — Op. cit. p. 38.



O MASSACRE DOS JUDEUS

O historiador Josefo, governador da Galiléia, que resistiu heroicamente ao ataque das legiões de Vespasiano, sendo, afinal, vencido, refugiou-se numa caverna com 40 judeus patriotas. Sitiados pelos romanos, decidiram todos antes matarem-se do que se entregarem aos inimigos. Formaram-se em roda, e contaram 1, 2 e 3, e todo aquele em que caía o número 3 era morto.

Em que lugar, devia estar Josefo para escapar a esta horrenda matança?

A solução desse problema pode ser obtida facilmente com auxílio de um dispositivo prático: basta escrever em roda 41 números, e, começando pelo primeiro, cancelar com um traço cada número de 3 em 3.

Depois de passar por todo o quadro, continuar do mesmo modo a contar, não tomando mais em consideração os números cancelados, porque estes passam a representar os soldados mortos. Findo o trabalho, vê-se que só dois judeus escaparam àquele morticínio: foram os que se achavam nos lugares 16 e 31. Um desses lugares privilegiados escolhera para si o governador Josefo, o qual em vez de matar o seu companheiro e depois suicidar-se, resolveu entregar-se, com todas as garantias, a Vespasiano.

Eis uma lenda que parece datar do século I da era cristã.

OS REIS E A GEOMETRIA

Ptolomeu Soter, rei do Egito, fundador de uma dinastia que se notabilizou, resolveu criar em Alexandria um centro de estudos, capaz de rivalizar com as escolas gregas mais notáveis de Platão e de Pitágoras.

Mandou, pois, o soberano egípcio chamar Euclides e convidou-o a ocupar, na nova "escola", em Alexandria, uma das posições mais elevadas.

Na distribuição das matérias que deviam ser estudadas na academia, a parte referente à Aritmética e à Geometria coube naturalmente a Euclides. Recomendou-lhe Ptolomeu que escrevesse um tratado no qual as noções de Geometria fossem expostas com clareza, precisão, e, também, com simplicidade.

Uma vez terminada a tarefa, Euclides levou ao rei o seu trabalho. Auxiliava-o um escravo que conduzia as numerosas folhas cuidadosamente enroladas.

O monarca, rodeado de seus generais e cortesãos, recebeu o geômetra em audiência solene. Surpreendido, talvez, com o grande desenvolvimento dado ao trabalho, o rei perguntou a Euclides se não havia outro caminho mais suave, menos espinhoso, que lhe permitisse chegar ao conhecimento da Geometria.

Respondeu o geômetra:

— Não, príncipe. Em Matemática não existe caminho algum feito especialmente para os reis!

A MODÉSTIA DE STURM

Sturm, quando se referia ao célebre teorema por ele descoberto, dizia:

"O teorema, cujo nome eu tenho a honra de usar."

MORTE DE HIPÁTIA

Viveu outrora em Alexandria uma mulher que se tornou notável pela cultura matemática que possuía. Chamava-se Hipátia, e nasceu no ano 375 de nossa era. Conseguiu Hipátia atrair grande número de discípulos que dela se aproximavam atraídos pela sua eloquência, pelo seu talento, pela sua beleza e pelas suas virtudes. Essa mulher formosa, que comentou as obras de Diofanto, teve um fim trágico: foi assassinada pela populaça exaltada durante um motim ocorrido nas ruas de Alexandria.

A COROA DE HIERÃO

Hierão, rei de Siracusa, no ano de 217 a.C, mandou ao seu ourives 10 libras de ouro para a confecção de uma coroa que ele desejava oferecer a Júpiter. Quando o rei teve a obra acabada, verificou que ela tinha as 10 libras de peso, mas a cor do ouro inspirou-lhe a desconfiança de que o ourives tivesse ligado prata com o ouro. Para pôr a limpo a dúvida, consultou Arquimedes, matemático famosíssimo.

Arquimedes, tendo achado que o ouro perde na água 52 milésimos do seu peso, e a prata, 99 milésimos, procurou saber o peso da coroa mergulhada na água e achou que era de 9 libras e 6 onças; com estes três dados, descobriu a quantidade de prata que tinha a coroa.

Quem nos poderá calcular a quantidade de ouro e de prata que continha o presente destinado ao deus dos deuses?

Há, em relação a esse problema, uma lenda muito curiosa:

Conta-se que Arquimedes pensou muito tempo sem poder resolver o problema proposto pelo rei Hierão. Um dia, estando no banho, descobriu o modo de solucioná-lo, e, entusiasmado, saiu dali a correr para o palácio do monarca, gritando pelas ruas de Siracusa: Eureca! Eureca! — o que quer dizer: Achei! Achei!

EPITÁFIO DE DIOFANTO

Um problema da antologia grega apresentado sob a forma curiosa de epitáfio:

"Eis o túmulo que encerra Diofanto — maravilha de contemplar! Com um artifício aritmético a pedra ensina a sua idade:"

"Deus concedeu-lhe passar a sexta parte de sua vida na juventude; um duodécimo na adolescência; um sétimo, em seguida, foi passado num casamento estéril. Decorreram mais cinco anos, depois do que lhe nasceu um filho. Mas esse filho — desgraçado e, no entanto, bem amado! — apenas tinha atingido a metade da idade de seu pai e morreu. Quatro anos ainda, mitigando a própria dor com o estudo da ciência dos números, passou-os Diofanto, antes de chegar ao termo de sua existência."

Em linguagem algébrica, o epigrama da antologia seria traduzido pela seguinte equação do 1? grau:

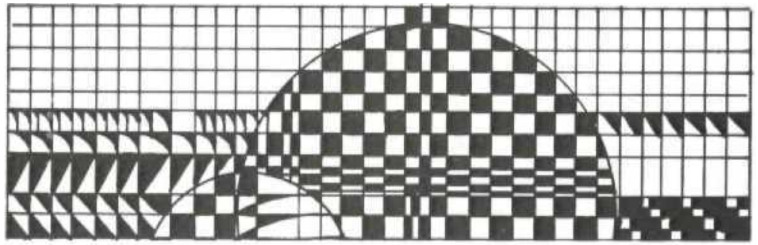
$$\frac{x}{6} + \frac{x}{12} + \frac{x}{7} + 5 + \frac{x}{2} + 4 = x$$

6 12 7 2

na qual x representa o número de anos que viveu Diofanto.

OS GRANDES GEÔMETRAS

PTOLOMEU - *célebre astrônomo grego. Nasceu no Egito no século II e muito contribuiu, com seus estudos, para o desenvolvimento da Matemática e da Geografia. Admitia que a Terra era fixa e colocada no centro do nosso sistema. Escreveu uma obra para provar que o espaço não podia ter mais de três dimensões.*



MORTE DE ARQUIMEDES

Arquimedes possuía, diz Malet, em alto grau, todas as qualidades de um grande cabo-de-guerra: o saber, a previdência, a decisão. Afora o caso da coroa de Hierão, o episódio, sem dúvida, mais citado da carreira de Arquimedes foi o do aparelho formado por espelhos côncavos, com o qual, pela concentração de raios solares, ele conseguiu incendiar navios romanos que lhe passassem ao alcance, fazendo incidir sobre eles "um raio ardente e destruidor".

O certo é que, por três anos, lutou Marcelo em vão contra a resistência pertinaz dos siracusanos. A força romana não lograva vencer o engenho de Arquimedes.

Siracusa só foi tomada porque certo dia, ocupados com uma festa solene em homenagem a Diana, os habitantes deixaram desguarnecido um dos lados da muralha. Os romanos, que ainda na véspera haviam sofrido sério revés, aproveitaram-se do descuido e invadiram a cidade, que foi, assim, tomada e posta a saque.

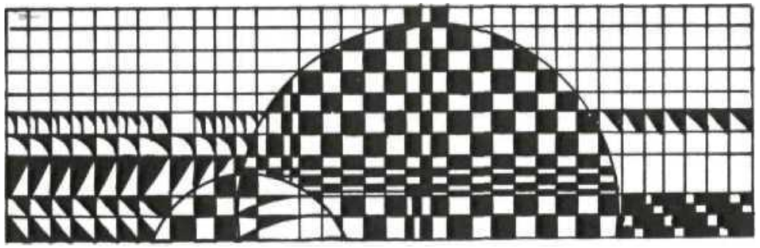
Conta-se que Arquimedes estava absorto no estudo de um problema, para cuja solução havia traçado uma figura geométrica na areia.

Um legionário romano encontrou-o e intimou-o a comparecer à presença de Marcelo. O sábio pediu-lhe que esperasse algum tempo, para que pudesse concluir a demonstração que estava fazendo.

Irritado por não ser imediatamente obedecido, o sanguinário romano, de um golpe de espada, prostrou sem vida o maior sábio do tempo.

Marcelo, que havia dado ordens no sentido de ser poupada a vida de Arquimedes, não ocultou o pesar que sentiu ao saber da morte do genial adversário. Sobre a laje do túmulo que erigiu, mandou Marcelo gravar uma esfera inscrita num cilindro, figura que lembrava um teorema do célebre geômetra.

Arquimedes, cujo nome é um patrimônio da ciência, provou o quanto pôde a inteligência humana posta ao serviço de um acendrado patriotismo.



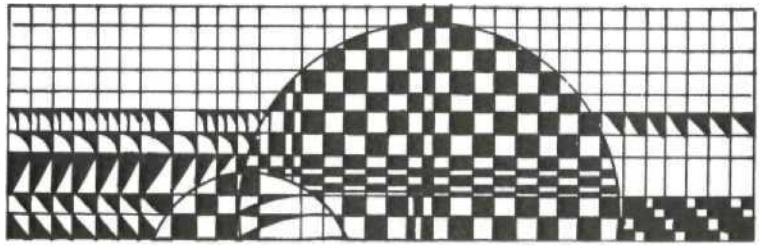
LUGAR PARA O 6

Tomemos o número 21578943 no qual figuram todos os algarismos significativos com exceção do 6.

Se multiplicarmos esse número por 6, vamos obter um resultado muito interessante. É um número formado por todos os algarismos, inclusive o próprio 6.

$$\begin{array}{r} 21578943 \\ 6 \\ \hline 129473658 \end{array}$$

Um curioso das transformações numéricas observou que os algarismos mudaram de posição de modo a permitir que o 6 pudesse aparecer no produto. Foi, afinal, uma espécie de "gentileza" que os algarismos do multiplicando quiseram fazer ao algarismo único do multiplicador.



CONE TRUNCADO

Há certas figuras geométricas completamente esquecidas pelos escritores, e que por isso não aparecem citadas nos trabalhos literários. A pirâmide truncada, por exemplo, é uma forma pouco apreciada.

Entre os corpos redondos, encontramos o tronco de cone citado com admirável precisão por Menotti del Picchia no romanl ce *Laís:*

"Em redor, garotos lambiam a neve açucarada em cones truncados de beiju" (p. 13, 5ª ed.).

Esse mesmo escritor, no livro *Dente de ouro* (p. 136), deixou cair de sua pena esta figura interessante:

Dois ciprestes cônicos, paralelos...

Seria interessante observar essas duas figuras cónicas paralelas. O paralelismo, naturalmente, só se verifica entre os eixos dos dois cones.

SOFISMA ALGÉBRICO

$$2 = 3$$

Vamos provar que o número 2 é igual a 3.
Tomemos a igualdade:

$$2-2 = 3-3$$

A expressão $2-2$ pode ser escrita sob a forma $2(1-1)$, e a diferença $3-3$ é equivalente a $3(1-1)$. Temos pois:

$$2(1-1) = 3(1-1)$$

Cancelando em ambos os membros dessa igualdade o fator comum, vem:

$$2 = 3$$

resultado que exprime um absurdo.

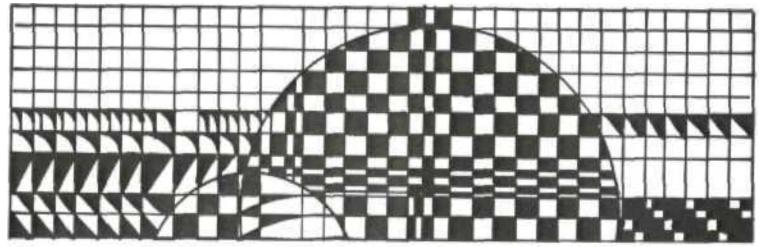
Observação

O erro do sofisma consiste em dividir ambos os membros de uma igualdade por $1-1$, isto é, por zero — operação que não é permitida em Álgebra.

ELOGIO DA MATEMÁTICA

Sem a Matemática, não poderia haver Astronomia; sem os recursos maravilhosos da Astronomia, seria completamente impossível a navegação. E a navegação foi o fator máximo do progresso da humanidade.

Amoroso Costa



A LINHA RETA

Vamos encontrar nos *Elementos* de Euclides, que é a obra clássica da Geometria, as seguintes definições.

> *Linha é uma quantidade somente longa, isto é, sem largura nem grossura.*
> *Linha reta é a que corre direita de um extremo a outro sem torcer para nenhuma parte.*[40]

É evidente que as definições euclidianas não podem resistir a uma crítica medianamente severa, por isso que não satisfazem os requisitos que se exigem para uma boa definição. Os conceitos de comprimento e de largura, dos quais Euciides se utilizou para definir a reta, não podem ser compreendidos sem que previamente se haja fixado o conceito geral de linha.[41]

[40] Esses enunciados foram reproduzidos na tradução portuguesa dos *Elementos*, publicada em 1735 pelo padre Manoel Campos S. J,
[41] As chamadas definições euclidianas não passam, afinal, de descrições mais ou menos imperfeitas, baseadas em dados intuitivos.

É interessante assinalar, porém, as diversas interpretações dadas pelos autores às definições do geômetra grego.

Max Dimon, para a definição de reta, adotou o seguinte enunciado:

Reta é a curva que se conserva igual em todos os seus pontos.[42]

A forma dada por Simon, conforme a análise feita por Ugo Amaldi, pode ser interpretada de diferentes maneiras. A propriedade atribuída à reta *"de se conservar ou de se estender uniformemente em todos os seus pontos"*, não pertence exclusivamente **a** essa linha.

Euclides, entre os postulados, incluiu a seguinte proposição: *"Duas retas não limitam espaço algum"*[43] que encerra a propriedade relativa à determinação de uma reta por dois pontos.

Arquimedes pretendia definir a reta como sendo a *distância mais curta entre dois pontos*. Essa definição, endossada por Legendre, teve larga aceitação; no entanto, a definição arquimediana aparece deformada pelo círculo vicioso a que está presa. Como firmar o conceito de distância independentemente da noção de reta?[44]

"Na fixação das realidades iniciais em que se detém o trabalho do sábio, o princípio racional se exerce sempre sob forma negativa, reservada à experiência o papel positivo. Que desde a estreia da especulação geométrica haja a experiência intervindo de modo decisivo, é o que atesta a definição da reta conservada no *Parmênide* de Platão: "Chama-se reta a linha cujo meio está colocado sobre o trajeto entre as duas extremidades."

[42] Encontramos um Ugo Amaldi — *La retta é que/Ia linea che giace sui suai punti in modo uniforme*. Cf. *Questioni riguardanti le Matematiche Elementari* — 1 vol. p. 43.

[43] Esse princípio foi incluído entre as "noções comuns" Cf. Paul Tannery — *Mémoires scienlifiques* — II vol. p. 50.

[44] Questa definizione (de Legendre) ebbe il medesimo largo successo degli *Elemenls de Géometrie*. Ma sono sen'zaltro manifesti i difetti che essa presenta, se non é associam ad un opportuno sistema di postulati, i quali determinando, independentemente dalla retta N concetto di lunghezza, rendendo possibile il confronto, rispeito di lunghezza di linee diverse e siabiliscano 1'esistenza e 1'ucinitá dei minimo — Ugo Amaldi, op. cit. p. 45.

Esta definição não é invenção engenhosa de um teórico; refere-se à prática. "A fim de assegurar-se da retidão da linha traçada, age-se de tal sorte que o olho esteja na extremidade da linha como faz o sargento para alinhar seus homens. Corrigidos todos os desvios que se puderem perceber, a linha reduz-se **a** um ponto; está reta."[45]

Leibniz procurava para a reta uma definição baseada na idéia de movimento: *"A reta éa linha tal que basta imobilizarmos dois de seus pontos para que todos os outros pontos fiquem também imóveis"*; ou então: *"a reta é a linha que fica imóvel quando gira em torno de dois pontos fixos."*[46]

São também citadas, entre as definições apresentadas **para** a reta, as seguintes:

Reta é a linha que é dividida por um ponto em duas partes iguais.

Reta é **a** linha que divide o plano em duas partes que coincidem por superposição.

Esta última, atribuída a Leibniz, apresenta o grave inconveniente de subordinar a definição de reta ao conceito de plano; a outra exprime uma propriedade que se observa igualmente na hélice cilíndrica.

OS ALGARISMOS

É interessante observar, através dos documentos antigos, como evoluíram os algarismos antes de chegarem às formas definitivas que hoje apresentam.

Pelo quadro que damos na página seguinte, podemos observar as curiosas transformações dos símbolos de que nos servimos no cálculo.

[45] L. Brunschvicg — Les étapes de Ia philosophie mathérnaiique, 1929, p. 504.

[46] A linha não poderá ser definida senão por suas propriedades, para a compreensão das quais se torna indispensável um apelo à intuição direia. Cf. C. Conseth — *Lesfondemenis des mathématiques*, 1926, p. 5.

Na primeira linha estão representados algarismos hindus que eram usuais no século X. O 6 parecia um cinco e o 5 lembra perfeitamente o quatro moderno. Esses algarismos (4, 5 e 6) remontam talvez a 150 a.C.

Na segunda linha, encontramos algarismos árabes em uso no século XII. O 7 difere muito do árabe moderno mas aproxima-se da forma que tem atualmente.

(950)

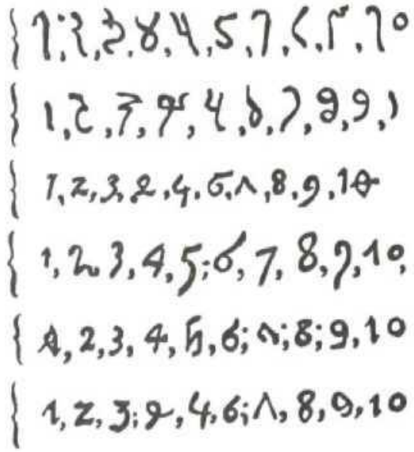
(1100)

(1385)

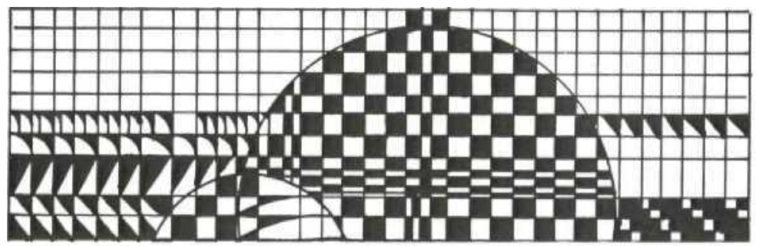
(1400)

(1480)

(1482)



Já no século XIV, como podemos observar na terceira linha, os algarismos tendem para as formas mais simples; o 8 e o 9 e os três primeiros (1,2 e 3) aparecem nitidamente com seus traços bem definidos.



O PROBLEMA DO XADREZ[47]

Malba Tahan

Diz uma antiga lenda que Lahur Sessa ofereceu ao rei Iodava, senhor de Taligana, o jogo de xadrez por ele inventado. O monarca, encantado com o maravilhoso presente, quis dar a Sessa uma recompensa.

E, dirigindo-se ao jovem brâmane, disse-lhe:

— Quero recompensar-te, meu amigo, por este maravilhoso presente que de tanto me serviu para alívio das velhas angústias. Dize-me, pois, o que desejas para que eu possa, mais uma vez, demonstrar o quanto sou grato para com aqueles que se mostram dignos de prémios.

As palavras com que o rei traduzia o generoso oferecimento deixaram Sessa imperturbável. A sua fisionomia serena não traiu a menor emoção, a mais insignificante mostra de alegria ou sur-

[47]Incluímos aqui apenas a parte final de um conto de Malba Tahan intitulado "Recompensa de Sessa", do livro *Lendas do oásis.*

presa. Os vizires olhavam-no atônitos e entreolhavam-se pasmados diante da apatia de uma cobiça a que se dava o direito da mais livre expansão.

— Rei poderoso! — exclamou o jovem. — Não desejo, pelo presente que hoje vos trouxe, outra recompensa, além da satisfação de ter proporcionado ao senhor de Taligana um passatempo agradável que lhe vem aligeirar as horas dantes alongadas por uma tristeza acabrunhante. Já estou, portanto, sobejamente aquinhoado e outra qualquer paga seria excessiva.

Sorriu desdenhosamente o bom soberano ao ouvir aquela resposta que refletia um desinteresse tão raro entre os ambiciosos hindus. E, não crendo na sinceridade das palavras de Sessa, insistiu:

— Causa-me assombro a tua simplicidade e o teu desamor aos bens materiais, ó moço! A modéstia, quando excessiva, é como o vento que apaga o archote, deixando o viandante nas trevas de uma noite interminável. Para que possa o homem vencer os múltiplos obstáculos que se lhe deparam na vida, precisa ter o espírito preso às raízes de uma ambição que o encaminhe a um ideal qualquer. Exijo, portanto, que escolhas, sem mais demora, uma recompensa digna da tua valiosa oferta. Queres uma bolsa cheia de ouro? Desejas uma arca repleta de jóias? Já pensaste em possuir um palácio? Almejas a administração de uma província? Aguardo a tua resposta por isto que à minha promessa está ligada a minha palavra!

— Recusar o vosso oferecimento depois de vossas últimas palavras — respondeu Sessa — seria menos uma descortesia do que desobediência ao rei. Vou, pois, aceitar pelo jogo que inventei uma recompensa que corresponda à vossa generosidade; não desejo, contudo, nem ouro nem terras ou palácios. Peço o meu pagamento em grãos de trigo.

— Grãos de trigo? — exclamou o rei, sem ocultar o espanto que lhe causava semelhante proposta. — Como poderei pagar-te com tão insignificante moeda?

— Nada mais simples — elucidou Sessa. — Dar-me-eis um grão de trigo pela primeira casa do tabuleiro; dois, pela segunda; quatro, pela terceira, oito, pela quarta; e, assim, dobrando sucessivamente até a sexagésima quarta e última casa do tabuleiro.

Peço-vos, ó rei, de acordo com a vossa magnânima oferta, que autorizeis o pagamento em grãos de trigo, e assim como indiquei!

Não só o rei como os vizires e venerandos brâmanes presentes riram-se estrepitosamente ao ouvir a estranha solicitação do tímido inventor. A desambição que ditara aquele pedido era, na verdade, de causar assombro a quem menos apego tivesse aos lucros materiais da vida, O moço brâmane, que bem poderia obter do rei um palácio ou uma província, contentava-se com grãos de trigo!

— Insensato! — exclamou o rei. — Onde foste aprender tão grande desamor à fortuna? A recompensa que me pedes é ridícula. Bem sabes que há, num punhado de trigo, um número incontável de grãos. Deves, compreender, portanto, que com duas ou três medidas de trigo eu te pagarei, folgadamente, consoante o teu pedido, pelas sessenta e quatro casas do tabuleiro. É certo, pois, que pretendes uma recompensa que mal chegará para distrair, durante alguns dias, a fome do último "pária"[48] do meu reino. Enfim, visto que minha palavra foi dada, vou expedir ordens para que o pagamento se faça imediatamente conforme teu desejo.

Mandou o rei chamar os algebristas mais hábeis da corte e ordenou-lhes que calculassem a porção de trigo que Sessa pretendia.

Os sábios matemáticos, ao cabo de algumas horas de acurados estudos, voltaram ao salão para submeter ao rei o resultado completo de seus cálculos.

Perguntou-lhes o rei, interrompendo a partida que então jogava:

— Com quantos grãos de trigo poderei, afinal, desobrigar-me da promessa que fiz ao jovem Sessa?

— Rei magnânimo — respondeu o mais sábio dos geômetras. — Calculamos o número de grãos de trigo que constituirá o pagamento pedido por Sessa, e obtivemos um número[49], cuja grandeza é inconcebível pela imaginação humana. Avaliamos, em seguida, com o maior rigor, a quantos sacos corresponderia esse total de grãos, e chegamos à seguinte conclusão: a porção de tri-

[48]Nome dado aos indivíduos privados de quaisquer direitos religiosos ou morais.
[49]Esse número comem 20 algarismos e é o seguinte: 18.446.744.073.709.551.615.

go que deve ser dada a Lahur Sessa equivale a uma montanha que tendo por base a cidade de Taligana, fosse cem vezes mais alta do que o Himalaia! A Índia inteira, semeados todos os seus campos, taladas todas as suas cidades, não produziria, num século, a quantidade de trigo que, pela vossa promessa, cabe, em pleno direito, ao jovem Sessa!

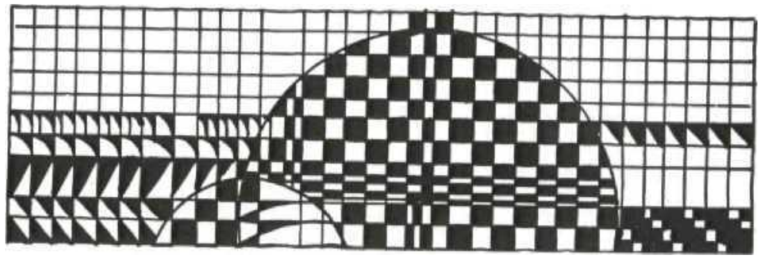
Como descrever aqui a surpresa e o assombro que essas palavras causaram ao rei ladava e a seus dignos vizires? O soberano hindu via-se, pela primeira vez, diante da impossibilidade de cumprir a palavra dada.

Lahur Sessa — rezam as crónicas do tempo —, como bom súdito, não quis deixar aflito o seu soberano. Depois de declarar publicamente que abria mão do pedido que fizera, dirigiu-se respeitosamente ao monarca e assim falou:

— Meditai, ó rei, sobre a grande verdade que os brâmanes prudentes tantas vezes repetem: Os homens mais avisados iludem-se, não só diante da aparência enganadora dos números, mas também com a falsa modéstia dos ambiciosos. Infeliz daquele que toma sobre os ombros o compromisso de honra por uma dívida cuja grandeza não pode avaliar com a tábua de cálculo de sua própria argúcia. Mais avisado e o que muito pondera e pouco promete! Após ligeira pausa, acrescentou: — Menos aprendemos com a ciência vã dos brâmanes do que com a experiência direta da vida e as suas lições de todo o dia, a toda hora desdenhadas! O homem que mais vive, mais sujeito está às inquietações morais, mesmo que não as queira. Achar-se-á ora triste ora alegre; hoje fervoroso, amanhã tíbio; já ativo, já preguiçoso; a compostura alternará com a leviandade. Só o verdadeiro sábio, instruído nas regras espirituais, eleva-se acima dessas vicissitudes, paira por sobre todas essas alternativas.

Essas inesperadas e tão sábias palavras calaram fundo no espírito do rei. Esquecido da montanha de trigo que, sem querer, prometera ao jovem brâmane, nomeou-o seu primeiro-vizir.

E Lahur Sessa, distraindo o rei com engenhosas partidas de xadrez e orientando-o com sábios e prudentes conselhos, prestou os mais assinalados benefícios ao seu povo e ao país para maior segurança do trono e maior glória de sua pátria.



A FAMA DE EUCLIDES

A fama que Euclides alcançou foi incomparável. Basta dizer que o nome de Euclides, em seu tempo, menos designava a pessoa do geômetra do que o conjunto de seus trabalhos científicos. Alguns escritores da Idade Média chegaram até a negar a existência de Euclides, e com admirável e engenhoso artifício **linguístico,** explicavam que a palavra Euclides não passava da corruptela de uma expressão grega formada por duas palavras que significavam, respectivamente, *chave* e *geometria*.

O NÚMERO 100

Escrever uma expressão igual a 100 e na qual figurem, sem repetição, os 9 algarismos significativos.

Eis duas das soluções apresentadas para esse problema:

$$100 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 \times 9$$

$$100 = 91 + \frac{5742}{638}$$

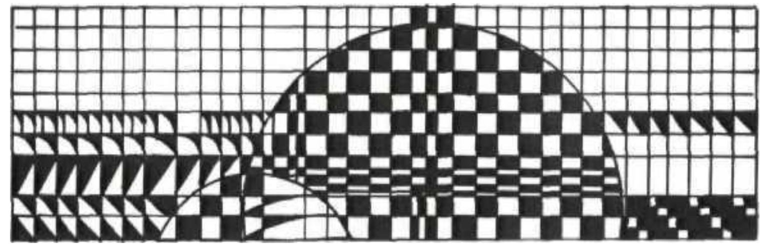
Podemos também escrever o número 100 com 4 noves:

$$100 = 99 + \frac{9}{9}$$

Empregando sete vezes o algarismo 8, podemos formar uma expressão igual a 100:

$$100 = 88 + \frac{8}{8} + \frac{88}{8}$$

Há, nesse gênero, uma infinidade de pequeninos problemas numéricos.



QUADRADOS MÁGICOS

Tomemos um quadrado e dividamo-lo em 4, 9, 16... quadrados iguais — os quais denominaremos casas.

Em cada uma dessas casas, coloquemos um número inteiro. A figura obtida será um *quadrado mágico* quando a soma dos números que figuram numa coluna, numa linha ou sobre uma diagonal for sempre a mesma. Esse resultado invariável é denominado *constante* do quadrado, e o número de casas de uma linha é o *módulo* do quadrado.

Os números que ocupam as diferentes casas de um quadrado mágico devem ser todos diferentes.

No original desenho de Acquarone figura um quadrado mágico de módulo 3 com a constante igual a 15.

É obscura a origem dos quadrados mágicos. Acredita-se que a construção dessas figuras constituía já, em época remota, um passatempo que prendia a atenção de um grande número de curiosos.

Como os antigos atribuíam a certos números propriedades cabalísticas, era muito natural que vissem virtudes mágicas nos arranjos especiais desses números.

Os quadrados mágicos de módulo ímpar, escreve Rouse Bali,[50] foram construídos na Índia em um período anterior à era cristã, e introduzidos por Moschopoulos, apareceram na Europa nos primeiros anos do século XV. Não poucos astrônomos e físicos da Idade Média estavam convencidos da importância desses arranjos numéricos. O famoso Cornélio Agrippa (1486-1535) construiu quadrados mágicos com os módulos 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9, que representavam, simbolicamente, os sete astros que os astrólogos daquele tempo denominavam *planetas:* Saturno, Júpiter, Marte, Sol, Vênus, Mercúrio e Lua. Para ele o quadrado com uma casa (módulo 1), tendo nessa casa única o número 1, simbolizava a unidade e a eternidade de Deus, e como o quadrado com 4 casas não podia ser construído, ele inferia desse fato a imperfeição dos quatro elementos: o ar, a terra, a água e o fogo; posteriormente — acrescenta ainda Rouse Bali — outros escritores afirmaram que esse quadrado devia simbolizar o pecado original. Agrippa, acusado de exercer feitiçaria, foi condenado a um ano de prisão.

2	9	4
7	5	3
6	1	8

Quadrado Mágico

4	5	16	9
14	11	2	7
1	8	13	12
15	10	3	6

Quadrado hipermágico

[50]Rouse Bali — *Récréations mathématiques,* II vol, p. 156.

Os orientais, que apreciavam todos os fatos correntes da vida sob o prisma da superstição, acreditavam que os quadrados mágicos eram amuletos e serviam de preservativos de certas moléstias. Um quadrado mágico de prata, preso ao pescoço, evitava o contágio da peste.

Quando um quadrado mágico apresenta certa propriedade, como, por exemplo, a de ser decomponível em vários quadrados mágicos, é denominado um *quadrado hipermágico.*

Entre os quadrados hipermágicos podemos citar os *quadrados diabólicos.* São assim denominados os quadrados que continuam mágicos quando transportamos uma coluna ou uma linha de um lado para o outro.

Entre os quadrados mágicos singulares, poderíamos citar os *bimágicos* e os *trimágicos.*

Denomina-se *bimágico* o quadrado que continua mágico quando elevamos todos os seus elementos ao quadrado. *Trimágico é* aquele que não perde a sua propriedade quando elevamos os seus elementos ao cubo.

Para a construção dos quadrados mágicos, há diversos processos.[51]

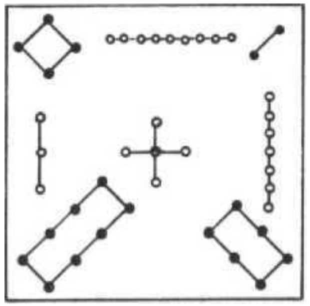
Em 1693, Frenicle de Barry publicou um estudo sobre os quadrados mágicos, apresentando uma lista completa de 880 quadrados mágicos de módulo igual a 9.

Fermat, famoso matemático francês, fez também admiráveis estudos sobre quadrados mágicos.

Entre os que contribuíram para o desenvolvimento da teoria dos quadrados mágicos, devemos citar Euler, que consagrou várias memórias a essa curiosa recreação matemática.

Damos a seguir um quadrado mágico muito interessante de origem chinesa e que parece remontar a 2800 a.C. É curioso assinalar que nesse quadrado mágico chinês os números não são ainda representados por algarismos, mas por coleções de objetos.

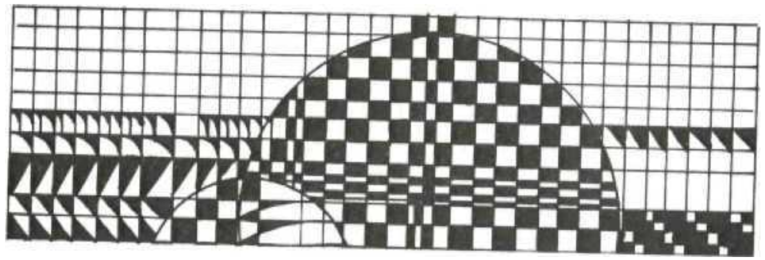
[51]Para um estudo mais completo, indicamos M. Kraitchik: *Trailé des magiques Gauthier* — Villars, 1930.



ORIGEM DOS SINAIS DE DIVISÃO

As formas a/b e $\frac{a}{b}$, indicando a divisão de *a* por b, são atribuídas aos árabes; Oughtred, em 1631, colocava um ponto entre o dividendo e o divisor.

A razão entre duas quantidades é indicada pelo sinal:, que apareceu em 1657 numa obra de Oughtred. O sinal $\div$, segundo Rouse Bali, resultou de uma combinação de dois sinais existentes - e :.



A MULHER QUE PELA CIÊNCIA SACRIFICOU A BELEZA

Luis Freire

O sábio matemático português Gomes Teixeira, em uma bela conferência sobre Mme. de Kovalewski, conta o que ouviu da esposa de Kowningsberger, o primeiro professor de Sofia: "Disse-me que Sonja tinha estado em sua casa pouco tempo depois de ser coroada pela Academia de Ciências de Paris, e que, devendo estar cheia de satisfação e orgulho por ter conseguido uma distinção tão elevada, que muitos homens desejam e poucos obtêm, estava triste e desalentada, chegando a dizer-lhe que a mulher não deve ocupar-se das ciências, que o seu destino natural é outro, que as Matemáticas são muito árduas para cérebros femininos e, enfim, que a ciência não lhe dera a felicidade."

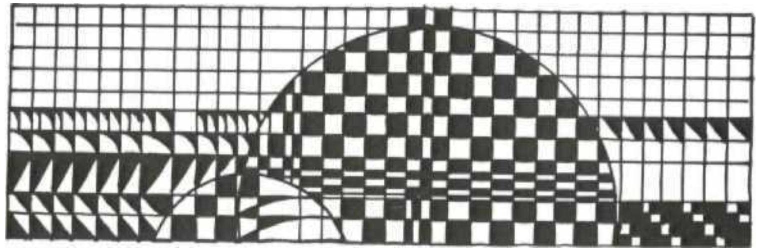
Perguntando-lhe eu se ela era bela e se tinha o olhar sugestionador celebrado pelos seus biógrafos, respondeu: "Era muito gentil quando veio para Heidelberg; tinha fisionomia viva e meiga, olhos maravilhosos e lindos cabelos; mas ultimamente tinha perdido muito dos seus encantos por causa de uma doença nervosa, resultante dos esforços exagerados que fizera para vencer as dificuldades das questões elevadas de que se ocupara; assim, o rosto tinha-se-lhe enrugado, o aspecto tornara-se um pouco duro, os olhos tinham diminuído de brilho e os cabelos mal penteados tinham perdido a sua antiga beleza."

E Gomes Teixeira confessa com sinceridade:

— Impressionou-me o que ouvi. Causa dó ver uma mulher de tanto valor, depois de ter sacrificado à ciência a beleza, a saúde e a alegria, e, embora moça, ainda, já tão perto do fim da vida, lastimar-se por não ter sido verdadeiramente mulher, e exclamar, como um grito de dor, que a ciência não lhe trouxe felicidade.

"A glória de ter sido a discípula predileta de Weierstrass perdeu-a, porque teve de subir a regiões elevadas e difíceis da ciência, onde o trabalho exigiu dela meditação profunda e acurada, superior às suas forças físicas.

"Com um mestre de menor valor, teria trabalhado em campos científicos mais modestos, em que o seu espírito, cheio de talento e imaginação, havia de colher ainda resultados notáveis sem tão exagerado esforço.



A NUMERAÇÃO ENTRE OS SELVAGENS

Roja Gabaglia

Os tamanis do Orenoco têm nomes de etimologia desconhecida para os números até quatro;[52] já o número cinco é expresso por uma palavra que significa na linguagem corrente *mão inteira;* para indicar seis empregam a expressão *um de outra mão;* o sete, *dois de outra mão.* E assim vão formando sucessivamente os números até dez, que é designado por duas palavras: *duas mãos.*

Para o onze, apresentam eles as duas mãos e mostram um pé, enunciando uma frase que poderíamos traduzir: *um do pé;* o doze seria *dois do pé;* e assim por diante, até quinze, que corresponderá precisamente à frase: *um pé inteiro.*

O número dezesseis tem uma formação interessante, pois é indicado pela frase *um do outro pé;* passando ao dezessete, diriam *dois do outro pé,* e do mesmo modo iriam formando os outros números inteiros até vinte, que é *tevin itóto,* isto é, *um índio.*

[52] **Tylor — *Primitive Culiure.***

O número seguinte ao *tevin itóto,* o vinte e um, para os filhos do Orenoco, corresponde à expressão: uma das mãos de outro índio.

Método semelhante é usado entre os groenlandeses, para os quais o numeral cinco é *tatdiimat* (mão); seis é *arfinek ottausek* (um sobre outra mão); vinte é *inuk navdlugo* (um homem completo). Vale a pena citar aqui, a título de curiosidade, a maneira pela qual os naturais da Groenlândia exprimem o número cinquenta e três. Esse número é expresso por uma frase que quer dizer literalmente: *três dedos do primeiro pé do terceiro homem!*

Em grande número de tribos brasileiras:[53] cairiris, caraíbas, carajás, coroados guakis, júris, omaguas, tupis etc, aparecem, com algumas variantes, os numerais digitais: os omaguas empregam a palavra *pua,* que significa *mão,* para exprimir também cinco, e com a palavra *puapua* indicam dez; os júris, com a mesma frase, indicam, indiferentemente, *homem* ou cinco. Segundo Balbi, os guaranis dizem *po-mocoi* (duas mãos) para dez e *po-petei* (uma mão) para cinco.

No Bakahiri[54] há nomes *especiais* para designar os números um, dois e três; o quatro é formado pela expressão *dois e dois;* o cinco é indicado por uma frase que significa *dois e dois e um;* analogamente formam o número seis, dizendo: *dois e dois e dois.*

Desse número (6) em diante, limitam-se a mostrar todos os dedos da mão (como aliás já faziam para os primeiros números), e depois todos os dedos dos pés, apalpando-os vagarosamente, dedo por dedo, demorando-se no dedo correspondente ao número. É um exemplo admirável de uma língua onde o gesto indica o número, não havendo vocábulos próprios, senão para os três primeiros cardinais.

E mesmo em relação à existência de vocábulos especiais para esses primeiros (um, dois, três) há dúvidas, pois Von den Steinen declara que na primeira viagem ouviu o numeral três expresso por uma palavra que significava, propriamente, *dois e um;* mais tarde, 1887, ao realizar uma segunda viagem, ouviu o mesmo número (3) indicado por outra forma, sobre cuja etimologia nada conseguiu apurar.

[53] Marti us — *Oloesaria liguarum brasilium.*
[54] Segundo Von den Steinen, que os analisou cuidadosamente, como mais tarde provou o erudito J. Capistrano d'Abreu, estudando a mesma língua. (Nota de Raja Ciabaglia.)

A GEOMETRIA

Uma geometria *não* pode ser mais verdadeira do que outra; poderá ser apenas mais cómoda.

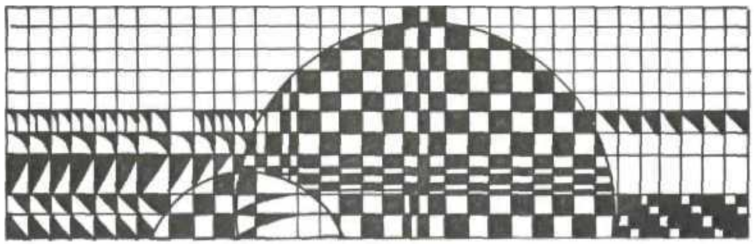
H. Poincaré

A Geometria faz com que possamos adquirir o hábito de raciocinar, e esse hábito pode ser empregado, então, na pesquisa da verdade e ajudar-nos na vida!

Jacques Bernoulli

Entre dois espíritos iguais, postos nas mesmas condições, aquele que sabe geometria é superior ao outro e adquire um vigor especial.

Pascal



OS GRANDES GEÔMETRAS

Ornar Khayyam

Trouxeram os árabes, do século IX ao período da Renascença, grande contribuição ao progresso e ao desenvolvimento da Matemática.

Sob duas faces distintas, devemos apreciar o trabalho dos sábios maometanos. Em primeiro plano, destaquemos as traduções que eles fizeram das obras antigas dos grandes filósofos e matemáticos gregos, pois foi através dessas traduções iniciadas durante o reinado de Al-Mamum,[55] que a Europa cristã veio a conhecer os génios de Arquimedes, Ptolomeu, Euclides e Apolônio.

E, além disso, os geômetras árabes enriqueceram a ciência com um grande número de pesquisas e descobertas, cuja originalidade já tem sido fartas vezes acentuada pelos historiadores.

E a obra da ciência árabe só conseguiu alcançar os centros de cultura do Ocidente depois de ter vencido, pela força irresistível de seu valor, a formidável barreira que a rivalidade religiosa fizera erguer entre cristãos e muçulmanos.

[55]Califa de Bagdá, filho do famoso sultão Harun-al-Raschid, tantas vezes citados nos contos de *As mil e uma noites.*

Mais de uma página teríamos, talvez, de consagrar, em suplemento, a este capítulo, se nos dispuséssemos a citar os nomes de todos os grandes matemáticos árabes que se distinguiram e que são focalizados na História. Julgamos, porém, que seria mais interessante deixar aqui apenas alguns traços biográficos de um algebrista famoso - Ornar Khayyam -, que é menos conhecido como geômetra do que como poeta.

Ornar Khayyam nasceu em Nichapour, na Pérsia, em 1040.[56] Era filho de um fabricante de tendas, e deste ofício proveio o apelido "Al-Khayyami",[57] que o poeta conservou como uma homenagem à memória de seu pai.

Quando ainda muito jovem, frequentou as aulas de um mestre-escola cujo ensino se limitava a fazer com que os discípulos decorassem as 114 *suratas* do *Alcorão.*[58] Teve nesse curso dois companheiros de sua idade — Nizham Almoulq e Haçan Ibn Sabbah — com os quais firmou boa amizade.

Certa vez, por simples gracejo, fizeram os três amigos um pacto. Aquele que viesse a ocupar, no futuro, um cargo elevado, procuraria amparar e auxiliar os companheiros, de modo que todos os três pudessem participar da mesma prosperidade.

Passaram-se vários anos, e o tempo, como era natural, imprimiu rumos diferentes ao destino dos três companheiros de infância. A sorte foi favorável a Nizham Almoulq que, após uma rápida carreira, viu-se escolhido para exercer o prestigioso cargo de grão-vizir do sultão alp-Arslan.

O poder, que deslumbra e fascina os mais fortes não fez com que Nizham esquecesse a promessa a que se achava preso desde

[56]Sobre a data do nascimento de Khayyam, só há indicações vagas e incertas. (Cf.
[57]Woepcke. L'*Algebre de Ornar Khayyam,* Paris, 1851, p. IV)
Al-Khayyami significa "o fabricante de tendas". A forma exata do nome de Khayyam tem sido objeto de longas discussões. Resolvemos manter a forma *Ornar Khayyam* que o escritor inglês Fitzgerald consagrou na sua célebre tradução.

[58]Livro sagrado para os muçulmanos. Contém 114 capítulos ou *suratas,* com um total de 6.236 versículos. Distribuído no Brasil pela Record.

a infância. Mandou buscar os dois amigos e ofereceu-lhes cargos de grande destaque na corte muçulmana.[59]

Ornar Khayyam, que jamais se sentira movido pela ambição, nem pela glória das posições elevadas, recusou os oferecimentos do poderoso vizir. Limitou-se a aceitar um lugar modesto que lhe permitisse continuar tranquilamente os trabalhos literários e científicos de sua predileção.

Pouco tempo depois, era Ornar Khayyam apontado como um dos astrônomos mais notáveis da corte do sultão Maliq-Chab. Elaborou, por ordem desse soberano, uma reforma no calendário, que entrou em vigor em 1079.

Das obras matemáticas de Ornar Khayyam, devemos citar: *Tratado sobre algumas dificuldades das definições de Euclides* e as *Demonstrações dos teoremas de Álgebra.* Esta última, traduzida para o francês por F. Woepcke, tem o seguinte título: *Memoire du sage excelient Ghyath Eddin Aboul Farth Ornar ben Ibrahim A Ikhayyami de Nichapour (que Dieu sanctifique son âme precieuse!) sur les demonstrations des problèmes de l'Algêbre.*

Ornar Khayyam abordou o estudo das equações do 2? grau e também procurou uma solução gráfica para as equações do 3º grau.

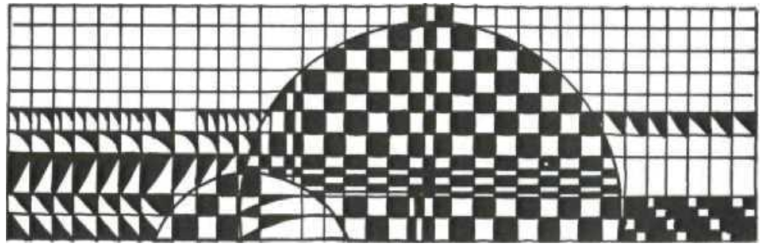
O obra poética de Ornar Khayyam, intitulada *Rubaiyat*[60] foi escrita em persa, mas já tem sido traduzida para quase todos os idiomas.[61] O simbolismo profundo que se nos depara no *Rubaiyat* deixa-nos perceber que Ornar Khayyam foi um descrente envenenado pelo mais negro pessimismo. Eis um de seus *rubai:*

> *"Fecha o teu Alcorão. Pensa livremente e serenamente encara o céu e a terra. Ao pobre que passa dá a metade do que possuis. Perdoa a todos os culpados. Não entristeças ninguém. E esconde-te para sorrir."*

[59] Haçan-abn-Sabbad, nomeado, a pedido de Nizham para o lugar de camarista, procurou trair o seu amigo e protetor, intrigando-o com o califa. O indigno Hacan (apelidado "O Velho da Montanha") foi o fundador da ordem dos *Assassinos.*

[60] Plural da palavra persa *rubai,* que significa *quadra.*

[61] Há uma tradução brasileira do Dr. Octavio Tarquinio de Souza. Para O francês, o *Rubaiya* mereceu uma admirável versão de Franz Touseaint.



RELATIVIDADE

Amoroso Costa

Se fôssemos transportados, juntamente com os nossos instrumentos de medida e com todos os objetos que nos cercam, para outra região do espaço, sem que variassem as distâncias entre todos esses objetos, nada nos revelaria semelhante mudança. É o que mostra o movimento de translação da terra, que só conhecemos pela observação dos corpos exteriores. A expressão "posição absoluta no espaço" não tem, pois, sentido algum, e só se deve falar da posição de um objeto em relação a outros.

O mesmo diremos da expressão "grandeza absoluta".

Se todos os objetos fossem simultaneamente aumentados ou diminuídos em certa proporção, o mesmo acontecendo com o nosso corpo e com os nossos instrumentos, isso nos passaria despercebido: o novo universo seria indiscernível do antigo. Não devemos, pois, considerar senão relações entre duas grandezas ou entre duas distâncias. Como admiravelmente diz Anatole France: "As coisas em si mesmas não são nem grandes nem pequenas, e quando nós achamos que o universo é vasto, essa ideia é

Malba Tahan

ÀS MARAVILHAS DA MATEMÁTICA

Êste compêndio, que Bloch Editôres oferece ao professorado brasileiro e aos cultores da Ciência de Lagrange, destaca-se nas três dimensões atuantes da moderna Pedagogia: pela sua forma impecável, pelo seu variadíssimo conteúdo recreativo e pela orientação puramente didática com que foram estudados os vários capítulos.

Ressaltam, ainda, em *As Maravilhas da Matemática*, pesquisas curiosas que, marcadas com o sinête do ineditismo, trazem o vinco da mais *absoluta* originalidade, como: 1.º — uma equação, com módulo da variável, cuja pintura geométrica é uma circunferência C com um ponto isolado no centro; 2.º — uma equação, também modulada, cuja pintura geométrica é um quadrado com um ponto isolado no centro; 3.º — uma parábola com ponto isolado; 4.º — equação algébrica modulada definindo duas circunferências concêntricas; 5.º — equação algébrica modulada definindo dois quadrados concêntricos de lados paralelos.

Essas cinco *recreações geométricas* exprimem fatos matemáticos totalmente desconhecidos para os pesquisadores e cientistas do mundo inteiro. São *descobertas* do autor, que não ocorreram até agora a matemáticos de fama mundial, como Gamow, Stern, Kraitchick, Basht, Moritz, Kasner, Thebault.

Achamos interessantes alguns neologismos, expressões singulares ou recursos didáticos, criados pelo autor, e que serão certamente aceitos de bom grado pelos professôres de Matemática. Apontemos os seguintes: complemento áureo — curva patológica — curva planitotal — diagonal exterior — espiral indecisa — números antipitagóricos — produto quilométrico — rosácea da perfeita harmonia — rosálida — transrosácea.

Êste livro marcará época no ensino vivo e interessante da nobre Ciência de Leibniz. Do duplo ponto de vista, didático e recreativo, foi muito além de todos os livros do mesmo gênero publicados até agora nos quatro cantos do mundo.

JESSÉ MONTELLO

Malba Tahan

As Maravilhas da Matemática

EDIÇÕES BLOCH

2ª Edição

Malba Tahan

As Maravilhas da Matemática

EDIÇÕES BLOCH

Segunda edição brasileira: 1973

BLOCH EDITORES S. A.
Rua do Russell, 804 — Rio de Janeiro, GB — Brasil
Printed in Brazil

MALBA TAHAN

AS MARAVILHAS DA MATEMÁTICA

COM O PARECER MATEMÁTICO, EM POSFÁCIO,
DO PROF. JESSÉ MONTELLO
BACHAREL E LICENCIADO EM MATEMÁTICA,
PELA FACULDADE NACIONAL DE FILOSOFIA,
E CATEDRÁTICO DE ANÁLISE MATEMÁTICA E
CÁLCULO ATUARIAL DA U. F. R. J.

OBRAS *DE MALBA TAHAN*

(Aqui citamos, apenas, 16 das 113 obras de M. T,)

O *Homem que Calculava* — Prémio da Academia Brasileira de Letras. Romance em 25.ª edição. Traduzido para o inglês e para o espanhol.

A *Sombra do Arco íris* — Em 10.ª edição. Novela-antologia, a única no mundo na qual são citados 843 poetas brasileiros.

Céu de Allah — Em 11.ª edição. Coletânea dos mais famosos contos orientais.

Salim, o Mágico — Romance sírio-libanês.

Maktub — Lendas orientais. Traduzido para o inglês.

O Mistério *do Mackenzista* — Romance policial verídico.

A *Arte de Ler e de Contar Histórias* — Em 6.ª edição. Obra puramente didática.

Numerologia — Estudo do número, do nome e do destino.

Paca, *Tatu* — Contos infantis.

Mistificações Literárias — O *negro* em Literatura.

Romance do Filho Pródigo — Novela histórica inspirada no Evangelho de São Lucas,

A *Arte de Ser um Perfeito Mau Professor* — Obra didática.

O *Mundo Precisa de Ti, Professor!* — Estudo da ética profissional do Professor. Obra didática.

Lendas do Céu e da Terra — Em 13.ª edição. Obra aprovada pela Igreja Católica.

Antologia da Matemática — Obra recreativa e cultural.

Sob o Olhar de Deus — Romance espiritualista.

Ao Coronel

Urassy Benevides

o bom e dedicado amigo
que tanto se interessou
pela publicação deste livro.

Homenagem do autor

Malba Tahan.
Caxambu, 1972.

"A MATEMÁTICA
É A RAINHA DAS CIÊNCIAS;
A ARITMÉTICA É A
RAINHA DA MATEMÁTICA."

KARL FRIEDBICH GAUSS
O PENSAMENTO MATEMÁTICO

"PRECISAMOS PROCURAR O PENSAMENTO MATEMÁTICO ONDE ÊLE SE CONSERVE PURO, ISTO É, NA ARITMÉTICA "

HENRI POINCARÉ
CIÊNCIA E MÉTODO

Sumário

Prefácio

Agrada-me mais a dúvida do que o saber, *dizia Dante, E esta é a essência da Matemática. Completa, séculos depois, Benjamín Franklin:*

Muita gente lamenta ter estudado isso ou aquilo. Consideram tempo perdido ou esforço inútil. Em relação à Matemática, porém, não houve, até hoje, quem lastimasse o tempo empregado em seu estudo, O arrependimento só brotou no espírito daqueles que não poderiam ter levado, em adiantamento, os estudos da Matemática.

O *próprio Voltaire, embora escritor, não hesitou em afirmar:*

Havia mais imaginação na cabeça de Arquimedes do que na de Homero.

Declarava o espanhol Rey Pastor, um dos maiores geômetras deste século (1888-1961):

A recreação matemática é um dos mais preciosos recursos motivadores de que podemos dispor para lecionar, com êxito, uma turma de adolescentes.

E salientando a importância do ensino da parte histórica da Matemática opinou Felix Klein (1849-1925). um dos mais insignes didatas na matéria:

O professor que ensina a Matemática desligada de sua parte histórica comete verdadeiro atentado contra a Ciência e contra a cultura em geral.

Aquele que ensina Matemática e que não pratica, de quando em quando, uma recreação aritmética, pode ser um gênio como Poincaré, um novo Weierstrass do século XX, um George Cantor da Álgebra Moderna, mas será sempre um péssimo, um detestável professor,

E aqui acrescentamos as judiciosas palavras de Edward Everett (1794-1865) em Orações e Discursos:

A Matemática existiu não unicamente nos domínios da Metafísica, mas na simples contemplação real da razão suprema. A razão humana, em sua inspiração, percorrendo toda a natureza e a vida em busca de imaginação para expressar a sabedoria e o poder de Deus, encontra a Matemática simbolizada no engenho- da obra do Criador. "Deus dimensionou os céus como se usasse régua e compasso." E um sábio antigo, sem falsidade ou irreverência, ousou dizer: "Deus é um geômetra."

Ademais, as divagações curiosas, as recreações numéricas apresentam, para o sábio, valor imenso. Vejamos a opinião de Joseph Louis François Bertrand (1822-1900), um dos maiores vultos da Análise Matemática. (Mathesis)

Essas pesquisas curiosas que Euler apreciava, acima de todas as divagações científicas, não devem ser consideradas como recreações pueris e inúteis, pois, por sua natureza intelectual, valem tanto como as mais belas descobertas teóricas.

Uma simples recreação aritmética sobre números primos até ao matemático poderá interessar.
Como disse o analista alemão]acob Jacobi (1804-1851), um dos génios exponenciais da Análise:

A finalidade única da Ciência é honrar o espírito humano e, dentro desse ponto de vista, uma recreação entre números vale tanto quanto uma nova teoria sobre o Sistema dos Mundos.

E *deve o professor de Matemática conhecer as recreações numéricas, os paradoxos curiosos e os episódios pitorescos relacionados com a Ciência'}*

Cumpre, pois, ao bom professor apresentar a Matemática com encanto e simplicidade, de modo a torná-la leve e agradável ao educando; fazer dela uma ciência cheia de atrações e faces pitorescas.

£ preciso que o adolescente tome gosto pela Matemática, que na opinião do filósofo e matemático francês Charles Laisant (1841-1920) é o mais maravilhoso instrumento criado pelo homem para a descoberta da Verdade.

Introdução

"SE O ENSINO DA MATEMÁTICA, NOS CURSOS BÁSICOS, FOSSE FEITO, COMO REALMENTE DEVERIA SER, COM VIVO INTERESSE, CLAREZA E SIMPLICIDADE, ESSA FABULOSA CIÊNCIA EXERCERIA SOBRE TODOS OS HOMENS ESTRANHA E DESMEDIDA FASCINAÇÃO."

REY PASTOR (1898-1961)
CONFERÊNCIAS, 102

A finalidade precípua deste livro pode ser esclarecida em poucas palavras.

Pretendemos oferecer uma coletânea bem variada de pequenos trechos sobre os mil e um temas curiosos, vivos e interessantes, que repontam no campo imensurável da Ciência e que vão reflorir, com as sete cores da fantasia, no prodigioso jardim da Matemática.

O leitor que abrir este livro — professor, estudante ou curioso — vai encontrar em suas páginas não teorias mirabolantes ou integrais rebarbativas, mas pequenos episódios, dados históricos, problemas pitorescos, definições estranhas, curvas patológicas, direta ou indiretamente relacionadas com a Matemática.

A diversidade dos assuntos abordados é imensa. Saltamos de um tema para outro bem diverso, e assim procedemos não só para explorar certos contrastes, mas também para evitar as velhas rotinas. E assim passamos, na sucessão descontínua das ideias e dos fatos, de um problema pitoresco para a crítica de alguma carcomida definição de Euclides; da torre faraônica do Alexandrino, para um comentário irreverente de Marcel Boll; deixamos o verboso geômetra francês para ouvir certo paradoxo desconcertante de Bertrand Russell (1872-1970) e antes de encerrar as páginas voamos, em dois segundos, para Roma do século I e palestramos com abacistas escravos nas escadarias do palácio de Tibério César, Tomemos, para servir de exemplo, uma das palavras entre as complicadas e obscuras. A nossa escolha vai recair sobre o *hexadecaedróide.* O que será, nos domínios da Ciência, um *hexadecaedróide?*

Depois de aludir ao *hexa* (prefixo erudito de origem grega que dá a idéia de seis), ao *deca* (prefixo de origem grega que dá a ideia de dez), ao *edro* (do grego ***hedro,*** face) c à terminação *óide* (que exprime formação, parecença), o gcômctra explica, muito sério, com a maior naturalidade, e sem o menor traço de dúvida ou incerteza, tratar-se de:

> *Um poliedro* ***tetradimensionol*** *cujo contorno é formado por 16 tetraedros. Tem 32 faces triangulares, 24 arestas e 8 vértices.*[3]

Ao ouvir essa definição, um tanto estranha, o leitor certamente protestará e com muita razão: sendo um poliedro de quatro dimensões, isto é, tctradimcnsional, é claro que o hexadecaedróide não existe. No espaço cm que vivemos (tridimensional) não há corpo algum com quatro dimensões.

Sim, concorda prontamente o geômetra. Ésse poliedro, realmente, não existe. Não poderá existir jamais. É uma simples abstração. Mas isso não impede que receba belíssimo e erudito nome de batismo, que venha a ser estudado por suas notáveis propriedades, e que possa ser projetado e desenhado rigorosamente no nosso espaço, isto é, num espaço de três dimensões; podemos até, conhecida a sua aresta, calcular a sua área tota! c achar seu volume, em metros cúbicos, sem erro.

Vejam como o matemático é imaginoso c surpreendente. Estuda as propriedades, calcula a área, determina o volume de um poliedro que *não existe* e **que** jamais chegará a existir.

Deixemos, porém, essas abstrações matemáticas c passemos ao mundo real.

Tomemos, inicialmente, o termo *eqüidecomponível.* Vejamos como esclarecer o seu conceito.

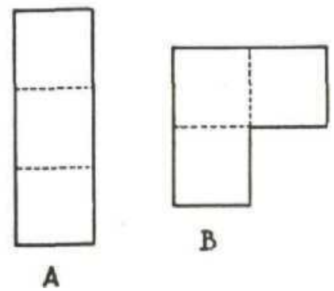
3. Cf. Mutila C. Ghycka, *Esthétiques des Proportions datis Ia Nature et dans les Ars,* Paris, 1927, pág. 434.

Consideremos os dois polígonos *A* c *B* que aparecem na figura ao lado.

A é um quadrilátero, ou melhor, é um retângulo. Nesse retângulo *A*, uma das dimensões é precisamente o triplo da outra.

B é um hexágono regular não-convexo, com lados paralelos apresentando cinco ângulos retos e um ângulo reentrante de 270 graus.[4]

Os polígonos *A* c *B* não são iguais, mas cada um deles, como a figura mostra, pode ser decomposto em três quadrados.



Os polígonos A e B são *figuras eqüidecomponíveis.*

Os seis quadrados, assim obtidos, são iguais.

Dizemos, então, que os polígonos *A c B* são decomponíveis em figuras respectivamente iguais. São, por êsse motivo, denominados "figuras eqiiidecomponíveis".

Eis a definição rigorosa, formulada de acordo com os princípios da Lógica Matemática:

> *Duas figuras são eqiiidecomponíveis quando podem ser decompostas em partes respectivamente iguais.*

Fica, assim, explicado de maneira bem clara c elementar o conceito de figuras *eqüidecomponíveis.*

Passemos, agora, ao *trilíneo.*

A que se chama um *trilíneo?*

Ensina o filósofo e matemático P. Sergescu em *Les Recherches sur 1'lnfini Mathématique,* e ensina com surpreendente clareza:

> *Chama-se trilíneo a uma figura fechada formada por dois segmentos perpendiculares AB e AC e um arco BC.*

O *trilíneo é* uma espécie de triângulo retângulo cuja hipotenusa tenha sido substituída por uma curva simples. Ê um triân-

4. Êsse hexágono não-convexo apresenta diagonais exteriores e diagonais singulares.

gulo retângulo "degenerado". O famoso *triângulo de Barrow,* ou *triângulo característico,* que aparece no estudo do Cálculo Diferencial, é um *trilíneo.*

— Abundante colheita de termos totalmente esdrúxulos poderíamos fazer no *Dicionário de Matemática* do Prof, Francisco Vera.[5] Trata-se de um livro notável c o seu autor, ao lado do famoso Rey Pastor, é incluído entre os mais famosos matemáticos deste século. As suas obras, aliás numerosas, sobre todos os ramos da Ciência são de projeção mundial.

Apontemos, apenas, cinco dos mil conceitos estudados e esclarecidos pelo Prof. Vera:

multivértice, oxigônio, pitmene, plectóide e del.

Vejamos, inicialmente, como definir um *multivértice* — figura que poucos geômetras, consultados de momento por um aluno, saberiam traçar.

Sobre uma folha de papel marque, por exemplo, seis pontos quaisquer. Tenha, porém, o cuidado de fazer com que não haja, na figura, três pontos em linha reta.

Se você unir os seis pontos dois a dois, por meio de segmentos de retas, e admiti-los prolongados, vai obter uma figura formada por quinze rctas distintas. A essa figura o geômctra dá a denominação de um *multivértice.*[6]

Resolvido o caso do multivértice, passemos ao estranho *oxigônio.*

Vamos abrir o Dicionário do Prof. Vera na letra *O.* Lá está de forma bastante sintética:

Oxigônio — Acutângulo.[7]

Assim, um banalíssimo triângulo equilátero é um *oxigônio.* O chamado hexagrama — Escudo de David — é formado por dois oxigônios.

Passemos, agora, ao conceito de *pitmene.*

5. F. Vera, Kapelusz, Buenos Aires, 1960.
6. F. Vera, *op. cit.,* pág. 458.
7. F, Vera, *op. cit.,* pág. 496.

A palavra é de origem grega. Chama-se *pitmene,* de um número natural *N,* ao resto da divisão desse número por 9. É o resultado que se obtém quando se aplica a um número a chamada regra dos "nove fora".[8] Assim o *pitmene* de 1.705 é 4; o *pitmene* de 88 é 7. O *pitmene* de 189 é 9. O grego não conhecia o zero.

O termo, como se vê, é difícil e exótico dentro da sua forma helênica, erudita, mas a sua noção é muito simples. Aparece até no curso primário.

Plectóide, ensina o Prof. Vera, era o nome que os gregos antigos davam à superfície que é agora denominada *helicóide.* O helicóide é conhecidíssimo: aparece em todos os parafusos. Cada parafuso é, pois, para falar difícil, uma espécie de *plectóide.*

E o *del?*

Você, que já estudou Matemática, que conhece, com todas as minúcias, a Geometria e domina os prodigiosos segredos da Trigonometria, poderá definir o *del?* Que é um *del?*

Ora, o *del* (esclarece, mais uma vez, o Prof. Vera) é a primeira sílaba da palavra *delta,* nome da quarta letra do alfabeto grego.

Chama-se *del* ao acréscimo dado a uma função. Assim, consideramos a função

$$y = x^2$$

que toma os valores

$$1,\ 4,\ 9,\ 16,\ 25,\ 36,\ \ldots$$

quando atribuímos a x respectivamente os valores

$$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ \ldots$$

Quando a função passou de 25 para 36 teve um acréscimo de 11. Esse acréscimo 11 é o *del* da função, quando x passa de 5 para 6. O *del* de uma função pode ser positivo, nulo, negativo e pode ser até infinito.

8. F. Vera, *op. cit,* pág. 516.

O *del*, afinal, é coisa muito séria para uma função.

Esclarecemos, assim, sob forma simples c elementar, certos conceitos que pareciam complicados, obscuros e dificílimos.

Algumas palavras, porém, inventadas pelos matemáticos, parecem tiradas de um vocabulário sem pé nem cabeça. Já disse Voltaire:

Há algo de prodigioso na imaginação dos matemáticos.

CURIOSIDADES

A origem do verbo decifrar

O vocábulo cifra, *que vem do árabe* sifr *(o que significa* vazio) *tomou, na França, a forma* chiffre, *e em Portugal, a forma* cifra. *A numeração árabe, logo que surgiu, não era compreendida por uma grande maioria da população; as pessoas de limitada cultura viam nas cifras arábicas sinais cabalísticos, complicadíssimos. Era preciso interpretar as* cifras, *isto é,* decifrar *aqueles símbolos estranhos. Foi assim que surgiu o verbo* decifrar.

Ainda no ano de 1529, o fisco florentino exigia que a Universidade fixasse os preços dos livros não por meio de cifras *(algarismos arábicos), mas por meio de* letras claras *(algarismos romanos) pois o fisco não dispunha de funcionários capazes de interpretar as tais* cifras *(Cf. Rey Pastor e Manuel Pereyra,* Aritmética / *vol., 1927, pág. 48).*

A Matemática e a duração da vida

Segundo Mareei Boll, geômetra francês, a duração da vida humana vai depender do progresso da Matemática nos domínios das Ciências Biológicas.

Com o auxílio da Matemática a vida de um homem, dentro de um futuro bem próximo, será, em média, de quatrocentos anos.

Aguardemos, pois, com paciência, as pesquisas dos matemáticos dentro das Ciências Biológicas, para que a Terra seja povoada de matuzaléns quatrocentões.

E todos bem felizes da vida, com muita saúde e muita energia.

2

Os Mártires da Matemática

ASSIM COMO HÁ OS MÁRTIRES DO DEVER, OS MÁRTIRES DA LIBERDADE E OS MÁRTIRES DA FÉ, É CLARO QUE DEVEM TER HAVIDO, TAMBÉM, NO ETERNO EVOLUIR DA CIÊNCIA, OS MÁRTIRES DA MATEMÁTICA. QUANDO SURGIRÁ UM NOVO E GENIAL CHATEAUBRIAND QUE, DEPOIS DE PESQUISAR O PASSADO, SE RESOLVA A ASSOMBRAR O MUNDO COM UMA NOVA E EMOCIONANTE HISTÓRIA DOS MÁRTIRES DO ALGEBRISMO?

A Matemática também já teve seus mártires. E é justo que sejam assinalados pela História aqueles que deram a vida pela Ciência dos Números.

O escritor francês A. Rebière, em seu livro *Mathématiques et Mathérnaticiens,*[1] refere-se a singular e curioso episódio.

Querendo, certa vez, o Tzar Ivan IV, apelidado "O Terrível", divertir alguns nobres que o acompanhavam, propôs um problema a George Petrakov, geômetra da Corte. Tratava-se de determinar quantos tijolos seriam necessários à construção de um edifício regular, cujas dimensões eram indicadas. A resposta de Petrakov foi rápida e a construção, terminada pouco tempo depois, veio confirmar a exatidão de seus cálculos. O tirano, impressionado com esse fato, mandou queimar o matemático, persuadido de que, assim procedendo, livrava o povo russo de feiticeiro perigoso.

1. Paris, 1926, pág. 260.

Não menos interessante é o caso que o algebrista francês F. J. Duarte cita, com destaque, no prefácio de um de seus livros, *Nouvelles Tables Logarithmiques.*[2]

Em 1746, o matemático espanhol Rodrigo Mendoza, ao rever uma tábua náutica de sua autoria, verificou que havia nela um erro. Em meio de uma imensa tabela, que continha milhares de valores, um dos elementos dados, que seria precisamente *0,7134*, havia sido substituído por outro número (por exemplo) 0,7164, um pouco diferente do verdadeiro na sua parte decimal.

O engano numérico em si parecia não ter importância alguma. Aquela diferença mínima, na casa dos milésimos, não deveria exigir nem mesmo a intercalação de simples errata. Mendoza, porém, ficou seriamente preocupado com o equívoco, que poderia ser atribuído à falta de perícia de sua parte. Ao usar a tabela, um piloto, por triste fatalidade, poderia ser levado a empregar o número errado como se fosse certo, e dessa troca de valores adviria, com certeza, um desastre, uma fragata encalhada, um naufrágio com centenas de mortos.. .

Preocupado ao extremo com as possíveis consequências desastrosas ou com as prováveis calamidades decorrentes do erro, o infeliz calculista praticou o ato extremo de desespero: enforcou-se!

O geômetra russo sacrificado pela ignorância perversa de Ivan, o Terrível, e o calculista espanhol, levado ao suicídio, foram dois mártires da preocupação de rigor que orienta o espírito matemático.

A leitura meditada de certas páginas da História traz ao nosso espírito a certeza de que, além do espanhol Mendoza e do russo Petrakov, houve várias outras figuras que poderíamos apontar como verdadeiros mártires da Matemática.

Citemos, por exemplo, o caso de Pitágoras (século VI a.C), que foi massacrado, juntamente com sua esposa Teano e trinta e oito discípulos, pelos partidários de Cilo, inimigo rancoroso dos gcômetras.

Ao lado de Pitágoras colocaríamos a dedicada Hipatia (375-415), filha do matemático Théon de Alexandria, que conseguiu captar dezenas de discípulos que dela se aproximaram, atraídos pela sua eloquência, pela sua beleza e pelas suas virtudes.

2. Paris, 1928, Gauthier-Vilars.

Os cristãos intolerantes não viam a jovem com simpatia, pois Hipatia era pagã, embora na sua escola se formasse, entre outros, o futuro bispo de Ptolemais, Sinésio de Cirene, Essa formosa mulher, dotada de excepcional tatento para as abstrações da Geometria, que comentou as obras de Apolônio e Diofante, teve um fim trágico: foi linchada pela população exaltada, durante um motim ocorrido nas ruas de Alexandria.

Não devemos esquecer o estranho Luís Lílio, médico, matemático c astrônomo calabrês, do século XVI, que na realidade se chamava Aloigi Giglio, latinizado para Alousius Lilius. A convite do Papa Gregório XIII, participou do concurso que reuniu todos os astrónomos cristãos para retificar o Calendário Juliano. Luís Lílio estudou êsse problema, de alto relevo para a Humanidade, e apresentou um plano completo para a medida do tempo ao longo dos séculos. Mas Luís Lílio ficou tomado de grave preocupação moral: "E se os seus cálculos não estivessem certos? Teria havido, de sua parte, algum erro no valor aproximado do ano trópico?" Torturado pela angústia da incerteza, sentindo a imensa responsabilidade que pesava sobre seus ombros, Luís Lílio praticou um ato de desespero: suicidou-se. Sua obra, apresentada ao Papa e aos cardeais por seu irmão António, foi aprovada pelo Papa Gregório XIII em sua célebre *bula* de 1582 que estabeleceu o novo calendário no mundo cristão. Luís Lílio inscreveu-sc, assim, entre os mártires da Matemática. E há sobre êsse drama pungente do "matemático angustiado" uma particularidade impressionante. O primeiro erro, não previsto, para o cálculo de Luís Lílio, ocorrerá precisamente no ano 3320. Nesse ano os astrónomos deverão retificar a obra do genial calabrês. O mês de fevereiro do ano 3320 deverá ter, apenas, vinte c sete dias. O outro *erro* será assinalado no ano 6640. Em ambos os casos, o dia "descontado" resultará de uma falta de cálculo tão insignificante, que de modo algum justificaria o suicídio.

Outro mártir famoso da Matemática foi Arquimedes, o grande geômetra da Antiguidade.

Quando as tropas romanas, sob o comando de Marcelo, investiram contra Siracusa, Arquimedes achava-se num canto da praça de Juno, preocupado com o estudo e resolução de um problema.

Inteiramente absorvido com seus cálculos e raciocínios, enlevado pelas abstrações de suas pesquisas, não percebeu que os assaltantes inimigos já haviam tomado a cidade, cujas ruas eram percorridas por grupos exaltados e violentos de soldados romanos, muitos dos quais se entregavam ao saque e à pilhagem.

Conta-se que, em dado momento, um soldado romano aproximou-se do geômetra e intimou-o a ir, no mesmo instante, à presença de Marcelo.

Rccusou-sc Arquimedes a atender àquela intimação, e replicou que só iria à presença do general depois de ter encontrado a solução do problema que, naquele momento, prendia a sua atenção. Enfurecido com a recusa, o soldado sacou da espada e matou o geômetra no mesmo instante.

Há, ainda, outra versão para a morte de Arquimedes:

Três ou quatro romanos percorriam, por ordem superior, as ruas de Siracusa, em busca de mercenários foragidos. Esses soldados avistaram Arquimedes e, curiosos, aproximaram-se dele. Estranharam a atitude do geômetra: como poderia aquele siracusano, sob o crepitar da guerra, alheio a tudo, distrair-se em rabiscar figuras na areia?

— Este velho deve ser um feiticeiro — palpitou um dos soldados. — Que estará tramando contra Roma? Vamos acabar com suas artimanhas.

E dizendo isso começou a pisotear a figura que Arquimedes esboçara. O geômetra protestou:

— Que estás fazendo, ó romano? Não apagues a figura. Deixa-me cm paz!

O zelo que o sábio revelou pelo desenho irritou os soldados que o assassinaram no mesmo instante.

Uma terceira versão para o fim trágico do geômetra siracusano pode ser lida no historiador Plutarco cm *Vida de Marcelo:*

Dirigia-se Arquimedes para o palácio em que se alojara Marcelo c levava, numa caixa, certos instrumentos matemáticos (compassos, pequenas esferas, transferidores, modelos de triângulos etc).

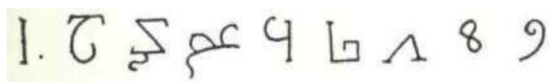
Que pretendia o sábio, com aquele pequeno laboratório de Geometria? Afirmam alguns que êle pretendia mostrar a Marcelo como seria possível medir o diâmetro do Sol ou calcular a distância Terra—Sol.

Alguns soldados desconfiaram: "Qual seria o conteúdo de tal caixa? Ouro, com certeza." E Arquimedes foi assaltado c morto por eles.

O certo — conta-nos Plutarco — é que a morte do geômetra causou profundo desgosto a Marcelo. Mandou procurar os parentes de Arquimedes c honrou-os com assinalados favores.

Anísio Mânlio Torquato Severino Boécio, filósofo e poeta, que viveu em Roma na primeira metade do século VI, poderia ser incluído entre os mártires da Ciência.

São notáveis os seus trabalhos sobre Aritmética, Música, Geometria e Astronomia. É dele a denominação de *quadrivio*, dada às quatro partes em que os antigos dividiam a Matemática.



Eis os nove algarismos de Boécio. Alguns foram totalmente modificados pelos calculistas.

Esse famoso comentador de Platão tinha a preocupação de inventar formas especiais para os diversos algarismos. O *cinco*, por exemplo, na obra de Boécio, era representado por uma pequena haste vertical acrescida de uma curva com a abertura voltada para a esquerda.

Os calculistas repeliram essas fantasias c preferiram, para os algarismos, formas mais simples e mais práticas, as formas indo-arábicas. Devemos acrescentar que foi graças às obras de Boécio que a Europa Medieval pôde estudar c aprender Geometria e Aritmética.

Boécio, que teve a glória de ser citado por Dante na *Divina Comédia*, foi condenado à morte pelo Rei Teodorico e executado como traidor. Morreu sob tortura: uma corda foi enrolada em sua cabeça e, a seguir, o carrasco apertou essa corda até causar a morte do condenado. O suplício ocorreu no batistério da Igreja de Ticínio.

Nem mesmo sôbrc sua sepultura puderam figurar os estranhos algarismos que êle havia tentado impingir aos matemáticos.

Como se poderia explicar sua condenação?

Boécio era homem íntegro e bondoso. Ao ser eleito cônsul, moveu tremenda campanha contra os funcionários públicos desonestos e corruptos, que roubavam camponeses e saqueavam os pequenos proprietários, criando, assim, centenas de inimigos impiedosos e todos de certo prestígio na Corte. Logo que houve oportunidade, os nobres odientos inventaram uma série de intrigas contra o insigne matemático e este foi, pelo próprio Rei Teodorico, condenado à morte.

Tinha o genial neoplatônico cinquenta e um anos de idade.

CURIOSIDADE

Um mártir da Matemática na China

Escreveu o Prof. Carlos Galante, de São Paulo em seu livro Matemática, 1.ª *série:*

> O ábaco, também denominado "quadrado calculador", foi durante milhares de anos o único instrumento que a humanidade possuía para as operações de calcular. Segundo a lenda o ábaco foi inventado ao redor do ano 2000 a.C, por um mandarim chinês com o intuito nobre de facilitar ao povo a facilidade de fazer as contas e assim conhecer o valor das mercadorias que era obrigado a entregar como impostos. Sua generosidade custou-lhe a vida, pois ao Imperador interessava manter o povo na mais completa ignorância. O uso do ábaco, entretanto, foi-se expandindo aos poucos entre os povos vizinhos da China.

Esse mandarim, degolado por ordem de um tirano, vinte séculos antes de Cristo, foi um dos primeiros mártires da Matemática.

3

O Papa que Foi Esquartejado

O PAPA SILVESTRE II É APONTADO COMO UMA DAS FIGURAS MAIS CURIOSAS DA HISTÓRIA DA IGREJA. NASCIDO NA FRANÇA POR VOLTA DO ANO 930, TEVE A GLÓRIA DE SER O PRIMEIRO A PUBLICAR, EM LIVRO, OS ALGARISMOS DO SISTEMA INDO-ARÁB1CO E INDICAR AS QUATRO PRIMEIRAS OPERAÇÕES COM ESSES ALGARISMOS. O FIM DO PAPA GEÔMETRA FOI TRÁGICO.

Na memorável dinastia espiritual, duas vezes milenária dos sumos-pontífices, devemos destacar, de modo especial, a figura de Silvestre II, que foi matemático e, por todos os títulos, o homem mais sábio do seu tempo. Os historiadores apontam Silvestre II como pioneiro da divulgação, no Ocidente Latino, do sistema de numeração indo-arábica.

No longo desfilar dos séculos, Silvestre II foi o único Papa geômetra.

O seu nome era Gerbert, e a França a sua pátria. Estudou a princípio em Aurillac, sua terra natal, e mais tarde, na Espanha, onde assimilou grande parte da ciência árabe.

Ao traçar a biografia de Gerbert, escreveu o Padre Leonel Franca, S. J.:

> *Foi professor na Corte de Oton II, da Alemanha, e depois em Reims e, finalmente, em Paris. A celebridade européia, que lhe aureolava o nome, apontava-o como o homem mais sábio do seu tempo. Em 982 foi escolhido como Abade de*

Bobbio, na Itália; em 991 foi elevado a Arcebispo de Reims e, mais tarde, em 998, tornou-se Arcebispo de **Ravena;** *em 999 subiu ao trono de São Pedro, com o nome de Silvestre II. As suas cartas, publicadas por J. Havei, mostram-nos como êle se ocupava com a Matemática, especialmente com a Aritmética, e com a Geometria. Nesse tempo a sua maior benemerência é a de haver introduzido, ou pelo menos vulgarizado no Ocidente Latino, o emprego da numeração indo-arábica, concorrendo, assim, para tornar o cálculo muito menos trabalhoso e menos complicado.*

Acusado por seus inimigos de ter vendido sua alma ao diabo, ficou Silvestre II, nas últimas semanas de sua vida, sob o ódio e prevenção dos fanáticos.

Logo depois de sua morte, seu corpo foi arrastado para um pátio, mutilado e, a seguir, esquartejado pelos cardeais.

É estranho o fim trágico do único Papa que sabia Aritmética c Geometria.

Silvestre II, o Papa geômetra, morreu no ano 1003 e deixou uma obra muito interessante intitulada *Regula de Numerorum.*

O trágico episódio do esquartejamento do corpo de Silvestre II está relatado cm A. F. Vasconcelos, no livro *História da Matemática na Antiguidade,* pág. 622. Outra citação encontramos cm Olavo Bilac *(Conferências,* pág. 142).

O historiador português A. F. Vasconcelos conta-nos como foi acidentada, embora brilhante, a carreira do gcômetra que chegou a Papa:

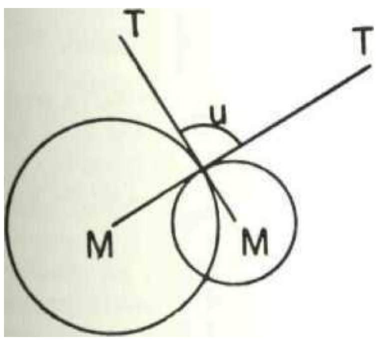
No século X, Gerbert, de família muito pobre do Auverne, depois de fazer sua educação na escola abacial de Aurillac, passou à Espanha, onde, recebendo o influxo das escolas árabes, aprofundou o estudo das Matemáticas, adquirindo grande saber e conhecimento que o fizeram justamente admirado, particularmente na construção de ábacos *e de* globos terrestres *e* celestes, *dos quais fazia uso nas suas lições. Mecânico distinto, além disso, parece que imaginou um certo* relógio, *conservado durante muito tempo em Magdeburgo, e um* órgão hidráulico, *que, segundo o historiador Guilherme de Malmesburry, existia na Igreja de Reims, ainda no seu tempo (1250). A sua reputação e fama de um tão grande saber levaram os contemporâneos à idéia de estar Gerbert* vendido ao diabo, *o que não obstou, apesar das intrigas e das odiosas acusações de muitos, que Mestre tão notável fosse protegido de Hugo Capelo, que lhe confiou a educação de seu filho Roberto, depois rei de França. Sob o amparo de Otão* **III** *e do Papa, foi Gerbert sucessivamente nomeado Abade de Bobbio (982), Arcebispo de Reims (991), Arcebispo de Ravena (998) e mais tarde, eleito Papa, tomou o nome de Silvestre II (999-1003).*

Com vida tão acidentada, mas tão brilhante, Gerbert conseguiu formar uma importante biblioteca com as cópias de grande número de obras clássicas latinas, e êle próprio compôs muitas obras científicas em que se compreendem: um tratado sobre ábaco — Regula de ábaco computi — *com o aperfeiçoamento resultante do emprego de caracteres diferentes ou* ápices, *para cada um dos números de 1 a 9, que permitiam apresentar os números da mesma maneira que com as cifras Gobar (mas sem o símbolo para zero) que os árabes adotaram, derivando-as das cifras Devaganari, da Índia. Deixou, ainda, um escrito aritmético* — De numerorum divisione — *e uma Geometria com aplicações à Agrimensura e à determinação da altura dos objetos inacessíveis.*[1]

* * *

CURIOSIDADES

Os círculos perpendiculares



Dois círculos podem ser perpendiculares?

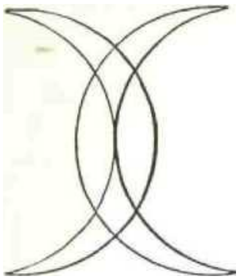
Sim, dois círculos que se cortam podem ser ortogonais.

Ê necessário e suficiente que as tangentes T *e* T' *a esses círculos sejam perpendiculares.*

O ângulo u *(indicado na figura) é o* ângulo *dos dois círculos. Como vemos, na figura, o ângulo* u *é* reto.

1. Cf. A. Vasconcelos, *História das Matemáticas na Antiguidade,* Lisboa, 1910, págs. 622 e seguintes.

O Selo de Maomé



Essa figura é, por muitos autores, denominada Selo de Maomé. *Segundo a lenda Maomé, nos momentos mais solenes da sua vida, tirava de sua cimitarra e traçava na areia, sem levantar a ponta da cimitarra esses dois crescentes entrelaçados.*

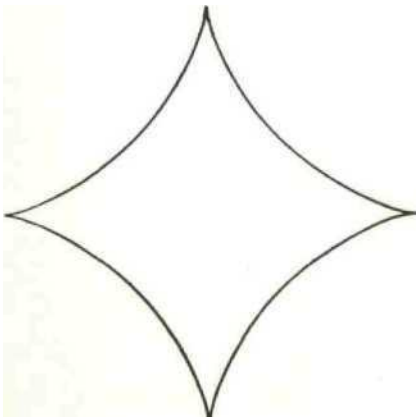
A figura do Selo de Maomé *é estudada no capítulo das curiosidades geométricas denominado:* Problema do traçado contínuo.

Há um duplo erro nessa denominação dada a essa figura:

1.°) O crescente não é árabe; é otomano, é turco. Foi criado por Maomé II quando em 1453 conquistou Constantinopla.

2°) Maomé, o Profeta dos Árabes, nunca usou cimitarra. Era um homem extremamente pacífico e bom.

A Astróide



Curva unicursal famosa que foi estudada pelo geômetra suíço Jacques Bernoulli (1667-1748).

A astróide é uma curva algébrica do 6.° grau que pode ser definida por uma equação cartesiana. E derivada do círculo.

4

Como Surgiram o + e o - ?*

É INTERESSANTE INVESTIGAR, AO LONGO DA HISTÓRIA, A ORIGEM DOS SINAIS DE OPERAÇÃO USADOS EM MATEMÁTICA. COMO APARECEU O SINAL + (MAIS)? QUAL FOI O CALCULISTA QUE INVENTOU O SINAL — (MENOS)? AO ESTUDARMOS A EVOLUÇÃO DAS NOTAÇÕES ALGÉBRICAS ESBARRAMOS COM LENDAS QUE NÃO DEIXAM DE SER ORIGINAIS E CERTAMENTE BEM MOTIVADORAS.

Qual a origem do sinal + (*mais*, da adição) e do sinal - (*menos*, da subtração)?

Como surgiram essas notações matemáticas tão práticas e tão simples?

Há uma lenda, muitas vezes citada, que explica, de forma bem curiosa, a origem desses sinais tão correntes nos cálculos e nas fórmulas.

Vamos apresentar a lenda na sua versão mais resumida:

"Havia, já lá se vão muitos anos, numa cidade da Alemanha, um homem que negociava em vinhos. Recebia esse homem, diariamente, vários tonéis de vinho. Os tonéis que chegavam do fabricante eram cuidadosamente pesados. Se o tonel continha mais vinho do que devia, o homem marcava-o com um sinal em forma de cruz: (+). Esse sinal indicava *mais*, isto é, *mais vinho,* um *excesso.* Se ao tonel parecia faltar uma certa porção de vinho, o homem assinalava-o com um pequeno traço (—). Tal sinal indicava *menos*, isto é, *menos vinho*, uma *falta.* Desses sinais, usados

Cf. Revista *Escola Secundária, n.°* 2.

outrora pelo marcador de vinho (diz a lenda), surgiram os símbolos + e - empregados hoje no mundo inteiro, pelos matemáticos e calculistas.[1]

Não aceitam alguns autores essa fantasiosa história do *mercador de vinho* e vão pesquisar, nos antigos manuscritos e nos velhos compêndios de Matemática, origem mais racional para os sinais + *(mais)* e — *(menos).*

Vejamos, inicialmente, uma explicação que é endossada por historiadores de renome e de alto prestígio nos largos domínios da Matemática.

1. Cf. Ball, R., IV, 159. Escreve esse historiador: "Os símbolos + e — eram sinais comerciais que indicavam excesso ou deficiência de peso." E F. A. Vasconcelos, historiador português, acrescenta: "Esses sinais foram aceitos, primitivamente, como abreviaturas e não como símbolos de operação" (Cf. Vasconcelos, H, 71). Hooper afirma: "Os sinais + (mais) e — *(menos)* foram empregados, a princípio, pelos negociantes e depois aproveitados pelos matemáticos" (Cf. Hooper, *The River Mathematics*, Londres, 1951).

No *Papiro Rhind,* o documento matemático mais antigo (data do ano 2200 a.C.) a adição é, cm geral, indicada pela palavra *t'emet* colocada entre as parcelas. T'emet, asseguram os sábios egiptólogos, é um verbo e significa *totalizar.* Em alguns casos o fabuloso Ahmés, autor do Papiro, emprega o verbo *uah,* cuja tradução seria *ajuntar.*

Assim a soma

9 + 1

o egípcio escrevia, vinte séculos antes de Cristo, sob a forma:

nove ajunta um

No caso da subtração já o calculista faraônico colocava a palavra *chent* (tirar, descontar) entre o minuendo e o subtraendo.

No cálculo corrente, porém, as palavras *uah* e *chent* eram abolidas. Para indicar as duas operações (adição e subtração) usavam os calculistas egípcios um sinal muito interessante: eram duas patas de avestruz.

Quando as patas estavam voltadas para o sentido da escrita indicavam adição, quando estavam no sentido contrário indicavam subtração.

Entre os hindus — como podemos observar na obra de Baskara (século XI), a subtração era indicada por um simples ponto colocado entre dois números.

Para indicar a adição (e isso a partir do século XIII), escrevia-se entre as parcelas a palavra latina *plus.* A soma 7 + 5, por exemplo, seria escrita:

7 *plus* 5

O uso frequente do *plus* levou os calculistas a abreviar tal notação: em vez de *plus,* colocavam a letra inicial *p* encimada por pequeno traço meio recurvo. A soma 7 *plus* 5 passou a ser expressa do seguinte modo:

$7 \ \tilde{p} \ 5$

Nos manuscritos, a letra *p* , com o traço, em consequência do traçado rápido e descuidado, dos escribas, tomava, em geral, a forma de uma cruz mal traçada. Com o passar dos anos o sinal tomou a forma de uma cruz e, com essa forma, ingressou, em caráter permanente, nos ricos e prodigiosos setores das notações matemáticas.

Explicação análoga foi tentada para a origem do sinal — (*menos*).

No alvorecer do século XIII era a subtração, nos escritos matemáticos, indicada pela palavra latina *minus* (menos). Exatamente como aconteceu com o *plus*, o *minus* passou a ser indicado, abreviadamente, pela letra *m* acrescida de uma espécie de til. Em alguns autores tomou a forma *mus*. A escrita apressada e descuidada dos escribas fêz com que a letra *m* fossc omitida e a subtração passou a ser indicada apenas pelo traço ou rabisco horizontal que acompanhava o *m*.

Na Antiguidade, não empregavam os matemáticos sinais próprios para as operações. Bastava escrever um número ao lado (ou junto) de outro para exprimir a *soma* desses dois números. Entre os chineses, a soma (ou subtração) era indicada de acordo com a posição dos números.

Os árabes limitavam-se (no caso da soma) a escrever as parcelas uma em seguida à outra; para a subtração, porém, adotavam um sinal (uma abreviatura) expresso por duas letras do alfabeto árabe.

Os gregos não dispunham de sinais para a adição nem para subtração. O sinal de igual também não existia. A mesma coisa acontecia com os romanos. Mas os matemáticos hindus, no século VIII, adotavam o sinal de uma pequena cruz depois do número para indicar que esse número devia ser subtraído do número que o precedia.

Os egípcios representavam a adição e a subtração por meio de diversos sinais. Em geral, nos hieróglifos, apareciam duas pequenas pernas de avestruz entre os sinais numéricos. Quando os pés estavam voltados na direção da escrita representavam *mais;* quando voltados na direção oposta representavam *menos*.

Diofante, matemático grego do século III, indicava a subtração por meio de uma flecha voltada para cima, ou por um pequeno traço vertical encimado por um arco com a curvatura voltada para baixo. Parecia a letra grega *psi* (maiúscula) invertida: ψ.

O primeiro autor a empregar uma notação especial (não literal) para indicar a adição, c o traço horizontal para a subtração, foi o matemático alemão Johann Widman, em 1489.

Na obra renovadora de Widman, a adição era indicada por um traço horizontal longo (bastante longo em relação ao tamanho médio dos algarismos), cortado ao meio, por pequenino traço vertical. Assim, a adição dos números 7 c 5 era, pelo imaginoso Widman, indicada do seguinte modo:

7 ——|—— 5

A subtração dentro desse simbolismo exigia apenas o traço horizontal. O traço ainda era longo. E Widman, para escrever 15 menos 8, recorria a esta curiosa notação:

15 ———— 8

É possível que Widman tenha colhido a idéia dos sinais + e - ao observar as contas dos homens que trabalhavam no comércio.

Acharam os matemáticos que as notações de Widman eram simples e práticas, e passaram a empregá-las. Decorridos trinta anos, o austríaco Heinrich Schrciber ainda adotava, sem a menor alteração (traço longo), as mesmas sugestões de Widman. E no século XVI, os sinais + (mais) e — (menos) ainda eram usados (no comércio) para indicar, respectivamente, excesso ou diferença.

A forma alongada do traço horizontal (como encontramos nos matemáticos dos séculos XV e XVI) vem provar que o sinal + (mais) não se derivou da letra *p* deformada pela escrita, como pretendem alguns autores. O sinal + (mais) resultou de uma ligeira simplificação do símbolo adotado pelo alemão Widman.

No livro *In Aritmética een Sonderlinge Excellet Boeck,* publicado em 1537, pelo alemão Gielis von der Hoeck, já as duas operações elementares (adição c subtração) aparecem indicadas por sinais que muito se aproximam dos que são usados atualmente. Para a subtração, continuava o traço horizontal, não muito longo; para a adição, uma cruz do tamanho dos algarismos com que eram representados os números.

Mas a rotina permaneceu durante mais de um século e resistiu ao esforço dos renovadores. Em 1556, o célebre matemáe tico italiano Nicolau Tartaglia ainda indicava a subtração pela Letra *m* coroada por um pequeno til. Rafael Bombeli, também italiano, em 1579, insistia cm indicar a adição com a letra p (inicial do italiano *più*, mais) c a subtração com a letra *m* (inicial do italiano *meno,* menos).

O alemão Cristovam Clavius, cm 1608, esbravejando contra os incríveis rotineiros, escrevia:

> *Muitos autores colocam a letra* P *em lugar do símbolo* + . . .

Esses protestos caíam como folhas mortas. Nada valiam. Cem anos depois de Widman, ainda aparecia, cm muitas obras matemáticas, a letra *p* (com um traço) para indicar a adição. Ainda cm 1577, o francês Guillaumc Grosselin ensinava (para a divisão de números relativos) a regra dos sinais por meio do seguinte quadro:

P in *P* *diviso quotas est P*
M in *M* *quotos est P*
M in *P* *diviso quotus est M*
P in *M* *diviso quotus est M*

O que significa:

\+ dividido por + dá +
— dividido por — dá +
— dividido por + dá —
\+ dividido por — dá —

Widman, em seus escritos, vulgarizou o sinal + (mais) para indicar adição. Descartes, em 1637, aceitou o sinal + (mais) e adotou a notação na forma de Harriot. Para indicar, porém, a subtração, o criador da Geometria Analítica preferiu o traço longo, ou dois pequenos traços (?), como podemos observar em seus escritos. E assim, para exprimir a diferença entre a quarta parte do quadrado de *a* e o quadrado de *b,* Descartes escrevia:

$$\frac{1}{4}\ a.a\ —\ —\ b.b$$

Em sua surpreendente *Álgebra*, publicada cm 1635, o francês Jannes Hutne achava interessante e prático indicar a soma de duas parcelas (15 c 3, por exemplo) pela seguinte nolação:

15 ————|— 3

O traço horizontal (como vemos) não era cortado ao meio, mas sim à direita no ponto de ouro (aproximadamente). O sinal de adição era uma cruz com uma haste muito longa e outra muito curta. Essa forma, para o sinal + (mais), foi usada durante mais de um século.

E assim, como acabamos de ver, depois de muitos ensaios, o uso consagrou as formas + e — para indicar, respectivamente, a adição e a subtração.

CURIOSIDADE

Como surgiram o × e o ÷

E o sinal de multiplicação? Como teria surgido?
Os matemáticos da Idade Média separavam os fatôres de um produto por um ponto. O produto de 15 por 20 seria

XV. XX

Os gregos, entre os dois fatôres, colocavam a preposição

epi (sôbrc)

e assim o produto de 42 por 30 seria indicado pela notação

μ β' επι λ'

O matemático francês François Viète (1540-1603), apontado como fundador da Álgebra, ainda indicava o produto de a *por* b *pela notação*

a in b

Em sua obra La Disme, *nu qual já aparecem números decimais, o flamengo Simon Stevin (1548-1620) não conhecia o sinal* X

e usava a letra M, *maiúscula, como sinal de operação multiplicativa.*
Assim, o produto de A *por* B *seria para Stevin:*

A M B

O sinal banalíssimo, que hoje usamos, X, segundo os mais eminentes historiadores, joi inventado pelo geômetra inglês Guilherme Oughtred (1572-1660), que joi, aliás, contemporâneo de Stevin e de Viète. O sinal X *aparece na obra de Oughtred, obra, aliás, escrita em latim, e intitulada* Arithmeticae in Numeris et Speciebus Instituitio. .. *publicada em 1631. A chamada Cruz de Santo André, para indicar a multiplicação, joi aceita, com certo júbilo, por todos os matemáticos. Oughtred era religioso e, certamente, devoto de Santo André. Não conhecia Oughtred o uso dos parênteses. O produto*

Q (A-E)

era, por Oughtred, indicado pela notação

Q: A - E

O sinal de divisão, no rolar dos séculos, tomou várias formas nas obras matemáticas.
Os caldeus indicavam a divisão por meio de ideograma complicadíssimo. A divisão de dois números inteiros era, na Antiguidade, uma operação dificílima que só os mais exímios calculistas eram capazes de ejetuar.
Os gregos não usavam sinal algum para a divisão. Diofante escrevia o dividendo a seguir a palavra morión *e depois o divisor. Na Índia, a divisão era indicada pela notação* bhâ *que era abreviatura de* bhága *(repartir). O árabe al-Hassar colocava o dividendo sobre o divisor. Em 1554 a divisão do número* M *pela soma* A + B *era indicada pela notação:*

M (A + B)

Foram também empregadas, como sinal de divisão, a letra D *invertida e a letra* p *(minúscula) deitada.*
O símbolo que hoje usamos + foi sugerido pelo famoso filósojo e matemático inglês Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716).
O traço de divisão é de origem árabe.

5

Numeração Pré-Colombiana

SINGULARÍSSIMOS ERAM OS ARTIFÍCIOS QUE O HOMEM PRIMITIVO EMPREGAVA PARA DAR NOMES AOS NÚMEROS. VEJAMOS UM CASO NO QUAL A NUMERAÇÃO FALADA ERA REGIDA POR MEIO DE REGRAS CONFUSAS E COMPLICADAS. E, PARA O POVO QUE ADOTAVA ESSE SISTEMA, A NUMERAÇÃO ESCRITA ERA ALTAMENTE ENGENHOSA.

O estudo das diversas numerações usadas pelos habitantes da América, no período pré-colombiano, fornece dados interessantíssimos que muito poderão contribuir para justificar as diversas hipóteses sobre a origem do conceito de número.

Os primitivos habitantes do México, que viviam no planalto de Analutac, usavam um sistema de numeração cuja base era o número vinte. Contavam de um até dezenove; com dezenove e mais um obtinham uma *VINTENA;* e a contagem a partir de vinte era feita pelo sistema aditivo: vinte e um, vinte e dois, vinte c três, vinte e dezoito, vinte e dezenove, e dois vintes.

Para os números de sucessão natural maiores do que quaerenta introduziam novas partículas e prolongavam a numeração até 400. E vinham a seguir: dois quatrocentos, três quatrocentos **etc.**

Os naluas construíram uma numeração digital (numeração escrita) com a qual representavam os números até 10. O cinco, por exemplo, era representado pela mão aberta. Para representar 10 pintavam dois quadrados; o vinte era uma bandeira; o 40, um feixe de ervas; para o 80, um apanhado de dois feixes; para 400 uma pena (com plumagem).

Os números intermediários eram representados por meio de artifícios bem engenhosos, nos quais intervinham nada menos de três operações aritméticas — fato que denunciava, para aquele povo primitivo, um índice bem apreciável de cultura.

O número 72 era representado por três bandeiras e doze pontos (3 X 20 + 12); o número trezentos era indicado pelas três quartas partes de uma pena!

A numeração escrita, embora complicada, não deixava de ser engenhosa. E era, também, decorativa (cheia de penas, feixes, quadrados e bandeiras).

E a numeração falada?

Os números dos naluas, na numeração falada, eram os seguintes:

1 — *ce*
2 — *ome*
3 — *jei*
4 — *nalwl*
5 — m*acuili*
d — *chiencace*
7 — *chinome*
8 — *chianchi*
9 — *chiconahui*
10 — *matacti*
11 — *matlactlionce*
12 — *matlaclimone*
13 — *mataclomei*
14 — *matlacllionnahui*
15 — *caxtoli*
16 — *caxtolionce*
17 — *caxtolimom*
18 — *caxtoliomei*
19 — *caxtonahui*

20 — *cempohuali*

25 — *cempohuali macuili*

40 — *ompohuali*

60 — *jeipohuali*

80 — *naupohuali*

O vocábulo "macuili" (a grafia seria macuilli, com dois *ll*), que corresponde ao número CINCO, significava mão; o vinte — cempohuali — exprimia uma conta, isto é, um composto de quatro partes: duas mãos e dois pés (20 dedos). O número 40 — ompohuali — seria traduzido pela expressão: duas contas completas (2 X 20). Observe-se a mesma forma multiplicativa (3 X 20) para exprimir o 60, que deveria ser traduzido por três contas completas.

O número 15 sendo caxtoli, o número dezoito (15 + 3) é caxtolimei, dentro do sistema aditivo.

Uma senhora "nalua" que tivesse trinta e um anos de idade, ao ser interpelada no dia do seu aniversário por uma amiga muito íntima (e bastante indiscreta) com a impertinente pergunta: "Quantos anos você completa hoje?", teria que responder para não fugir à verdade:

— Cempohualionmattactlionce!

Tal é a expressão de trinta e um na numeração "nalua", c esse vocábulo *hiperpoliisilábico* traduzia apenas: vinte, mais dez, mais um. Esse número é, realmente, tão complicado, de pronúncia tão difícil, que melhor seria que a interrogada, fugindo à verdade cronológica, e saltando do 31 para 18, respondesse com um sorriso modesto:

— Caxtoliomei!

Ou melhor:

— Dezoito, querida!

É bem mais simples e mais eufônico.

Que bela idade para uma jovem: caxtoliomei!

CURIOSIDADES

Os mistérios do cinco

Teodoro da Sicília, escritor religioso, que viveu no século IV, afirmava que o número cinco devia representar o mundo porque cinco eram os elementos encontrados na formação do Universo: terra, água, ar, fogo e éter.

A relação entre esses elementos fundamentais e o número que os totalizava já havia levado Plutarco (46-120) a concluir que o vocábulo grego penta *(cinco) derivava-se de* pent, *que significava* tudo.

A deusa Juno, que presidia o matrimônio (segundo Pitágoras), mantinha sob valiosa proteção o número cinco. *Exprimir esse número, na sua concepção mais simples, a união do número dois (feminino) com o número três (masculino) era o número do matrimónio. O triângulo retângulo, cujos catetos medem respectivamente 3 e 4 unidades, tem a hipotenusa igual a cinco unidades. Esse triângulo, famoso na História da Matemática, para os pitagóricos, era o* triângulo nupcial.

Os árabes muçulmanos também emprestam ao número cinco um alto valor teológico, pois, na religião muçulmana, cinco são as preces que o crente é obrigado a proferir todos os dias.

O número de definições tentadas para a Matemática, por filósofos e matemáticos ilustres, sobe a mais de meia centena.
Citemos, para distrair o leitor curioso, duas dessas definições absurdas mas curiosas e paradoxais. É sempre interessante acompanhar os analistas nesse burlequear pelos domínios da Lógica e da Fantasia.

Dentro de um espírito acentuadamente transracionalista, podemos sublinhar a definição formulada pelo francês G. Itelson, autor de várias memórias sobre a Lógica Matemática. Escreveu o filósofo Itelson:

A Matemática é a Ciência dos elementos ordenados.

Surge a dúvida: Que elementos ordenados são esses?
É igualmente interessante, mas despida de qualquer sentido lógico, a definição tentada pelo analista J. G. Frasmann:

Matemática é a Ciência da livre associação e desassociação.

Essas duas definições (que não definem coisa alguma) podem ser lidas no livro de Phillippe Chaslin Essais sur le Mécanisme Psychologique dos Operations de Ia Mathématique Purc, Paris, 1926. No livro Le Raisonnément Mathématique (Paris, 1945, pág. 124) de R. Daval e G. T. Guilbaud encontramos a seguinte e originalíssima conceituação da Matemática:

Matemática é a arte de dar o mesmo nome a coisas diferentes.

Asseguram Daval e Guilbaud que essa definição *foi formulada pelo célebre filósofo francês Henri Poincaré.*
Essa pseudodefinição não passa, certamente, de uma blague *de Poincaré.* Não podemos tomá-la a sério — *assegura Octacilio Novais, matemático brasileiro, antigo professor da Escola Politécnica.*
Uma vez aceita a fantasia de Poincaré, poderíamos concluir:

Matemática é a arte de dar nomes diferentes à mesma coisa.

Para muitos matemáticos, inventar definições estranhas para a Matemática é um passatempo como outro qualquer.

6

Definições Euclidianas

A ANÁLISE DA OBRA DE EUCL1DES CONSTITUI UM DOS PONTOS ALTOS DO ESTUDO DA MATEMÁTICA. OFERECEMOS AOS LEITORES RÁPIDOS COMENTÁRIOS, SEM CARÁTER FILOSÓFICO, DAS VINTE E TRÊS DEFINIÇÕES EUCLIDIANAS. A FALTA DE UM ESTUDO DESTA NATUREZA IRIA CONSTITUIR SENSÍVEL LACUNA NESTA ANTOLOGIA.

As vinte e três definições básicas, iniciais, apresentadas por Euclides em seus *Elementos*, embora já expungidas dos livros didáticos pelos autores modernos, oferecem inequívoco valor histórico e devem merecer a atenção de todos os professores e estudiosos da Matemática.

Vamos transcrever as definições do famoso geômetra alexandrino seguindo a tradução espanhola publicada e anotada pelo Dr. Juan David Garcia Bacca, acrescentando alguns comentários que possam elucidar o leitor.[1]

D. 1 — *Ponto é aquilo que não tem partes.*

Inicia Euclides apresentando, com a maior simplicidade, a definição de ponto. Trata-se de

1. Cf. Dr. Juan David Garcia Bacca, *Elementos de Euclides*, México, 1944, O livro do Dr. Bacca é precedido dos *Fundamentos da Geometria*, por David Hilbert. O texto espanhol é baseado no texto grego, segundo J. L. Heiberg e H. Menge. P, Barbarín, em seu livro *La Geométrie Non-Euclidienne* (Paris, 1928, 3.ª ed., pág. 16), aponta as principais análises feitas das definições euclidianas; Clebsch-Lindemann. Mansion, Cayley, Klein, Poincaré etc.

uma definição negativa. Dentro das concepções modernas, diríamos: Ponto é o espaço sem dimensões; ou ainda espaço com zero dimensões. Modernamente o ponto figura entre os conceitos não definidos.

No livro *Problemas Usuais do Desenho Linear e Geométrico*, do Prof. Teodoro Braga, publicado em 1930 — vinte e dois séculos depois de Euclides — ainda se encontra esta *definição* absurda: "Ponto é o vestígio sem dimensão alguma."

D. 2 — *Linha é o comprimento sem largura.*

Essa definição euclidiana, a segunda dos *Elementos*, ainda é negativa. Na moderna axiomática é inaceitável. A linha (de um modo geral) poderia ser considerada como trajetória de um ponto no plano ou no espaço de três dimensões.

As definições de *ponto* e *linha*, por serem negativas, foram criticadas na Antigüidade. Proclo defendeu-as assegurando que para os conceitos primitivos as definições negativas são mais apropriadas.

D. 3 — *Os extremos de uma linha são pontos.*

De acordo com Proclo, apontado como o pri-0 meiro comentarista de Euclides, a definição n.° 3 seria: "Os extremos de uma linha limitada são pontos."[2] Empregava Euclides a palavra *linha* para designar:

2. Proclo — Filósofo e matemático grego (438-485), nasceu em Constantinopla e faleceu em Atenas. Sua obra mais famosa é o *Comentário* do primeiro Livro de Euclides, com a qual contribuiu valiosamente para a História da Matemática. Sem o engenho de Proclo a figura de Euclides não teria o menor relevo no passado Contra Proclo moveram os cristãos atenienses impiedosa campanha, pois o sábio geômetra era pagão e dirigia a *Escola de Atenas*, Homem simples, culto e dotado de elevado espírito de tolerância e bondade. O seu discípulo Marino via sempre, pairando sobre a cabeça de Proclo, uma luz suave (Cf. Michel, P., 131).

1º) linha ilimitada nos dois sentidos;
2º) linha tendo uma origem, mas não tendo extremidade;
3º) linha tendo origem e tendo extremidade (linha limitada).

Uma circunferência (curva fechada) não teria extremos no sentido euclidiano.

D. 4 — *Linha reta é a que repousa igualmente sobre todos os seus pontos.*

Essa definição tem sido retalhada de todas as maneiras, pela crítica dos teóricos. Proclo foi levado a concluir que a definição euclidiana de reta exprimia apenas o seguinte: "A porção *m* de uma reta entre dois pontos *A* e *B*, dessa reta, é igual à distância *AB* entre esses pontos."

O Padre Manoel de Campos, na sua singularíssima obra didática *Elementos de Geometria Plana e Sólida* (Lisboa, 1735), vai além de Euclides e amontoa, sob a forma de definição, indicações sobre a reta. E escreve: 'Linha reta é a que corre diretamente de um termo a outro, isto é, sem torcer para nenhuma parte; ou, como diz Arquimedes, a mais breve que se pode tirar entre dois pontos; ou, como diz Platão, cujos pontos extremos fazem sombra ou escondem os intermediários."

E conclui:
— Tudo vem a ser o mesmo.

Sim, o Padre Campos tem razão. Tudo vem a ser o mesmo, mas com o sacrifício integral do rigor e da precisão da linguagem matemática.

D. 5 — *Superfície é aquilo que só tem comprimento e largura.*

Esbarramos com outra definição negativa, e, por isso mesmo, visada pela crítica da Antiguidade. Defendeu-a Proclo insistindo em afirmar que as definições negativas são as mais indicadas para esclarecer conceitos primitivos. O sábio comentador recorda que Parmênides havia definido as primeiras e últimas coisas por meio de negações.

Aristóteles dá outras definições (não menos deficientes) dos entes primitivos mas admite *(De anima*, III, 6, 430) que muitas vezes se tenha valido da forma negativa para definir um cego — apontando-o como o ser privado de vista, e sente-se capaz de aceitar o ponto como o elemento privado de partes. Beppo Levi crê que, tendo em vista as definições de *número* e *unidade* (que figuram no Livro VIII) poder-se-ia interpretar a primeira definição de outro modo: "Ponto é aquilo do qual é absurdo conceber partes."

D. 6 — *Os extremos da superfície são linhas.*

No texto original podemos ler: "Os extremos de uma superfície são retas." Há um equívoco qualquer do tradutor grego. O erro não é de Euclides. É claro que o extremo de uma superfície pode ser uma curva; êsse extremo pode ser até um ponto. (Caso de uma superfície cônica limitada num vértice.)

D. 7 — *Superfície plana é aquela que repousa igualmente sobre as suas retas.*

Exprime a definição euclidiana que o plano contém todas as retas que passam por dois de seus pontos. O plano, no sentido euclidiano, *"repousa"* nessas retas.

As definições de linha reta e de superfície plana, segundo Euclides, são, na verdade, (afirma Brunschvicg) enigmas ou maravilhas de profundidade. Com efeito, na opinião de Paul Tannery, essas definições resultaram da técnica da arte de construir e não podem ter, por conseguinte, mais do que alcance empírico.

D. 8 — *Ângulo plano é a inclinação de duas retas que, num plano, tocam-se uma na outra, e que não descansam as duas sobre a mesma reta.*

Seria melhor: "Ângulo plano é a inclinação recíproca de duas retas do plano que têm um ponto comum e não estão sobre a mesma linha reta." Não se explica a preocupação euclidiana de aludir ao ângulo *plano.* Como seria o ângulo *não plano?* Aceitaria Euclides o ângulo *nulo?* O ângulo nulo, como sabemos, é definido por extensão de conceito. O mesmo acontece com o ângulo de meia volta.

D. 9 — *Quando as linhas que formam o ângulo são retas, o ângulo é chamado retilíneo.*

Não aceitamos, em Geometria, como *ângulo* (ou no sentido de ângulo), o chamado *ângulo curvilíneo,* tão citado pelos professores de Desenho. O *ângulo curvilíneo* não é propriamente ângulo, mas sim uma figura (bem diversa do ângulo) denominada *ângulo curvilíneo.* Para dois ângulos curvilíneos não podemos estabelecer o conceito de igualdade e nem o conceito de soma.

Alguns autores, descurados em seus trabalhos, ainda consideram os *ângulos curvilíneos* como ângulos (no sentido euclidiano).

D. 10 — *Quando uma reta levantada sobre outra forma ângulos contíguos (adjacentes) iguais (um ao outro) cada um desses ângulos é reto, e a reta levantada se chama perpendicular em relação àquela sobre a qual está levantada.*

Estabelece Euclides, nessa definição bastante confusa, vários conceitos: levantar uma reta, ângulos contíguos, ângulos iguais, ângulo reto e perpendicularísmo. Não se admitiria hoje esse amontoado de noções dentro de uma única definição.

D. 11 — *Ângulo obtuso é o maior que o reto.*

Não esclarece Euclides como se deveria apreciar a grandeza do ângulo. Não compara ângulos; não alude à abertura de um ângulo. Em Euclides, como já assinalamos, não havia (em relação à linguagem) a menor preocupação de rigor.

D. 12 — *Agudo é o menor que o reto.*

Aqui também se assinala a despreocupação de rigor do geômetra alexandrino.

D 13 — *Limite é o extremo de uma coisa.*

Não se preocupava Euclides, como já dissemos, com o rigor das definições. A definição 13, I dentro da axiomática de Hilbert, não teria sentido. Como poderia o geômetra alexandrino apontar o extremo de uma esfera? Qual seria o extremo de uma elipse?

D. 14 — *Figura é aquilo que é compreendido por um limite ou por vários.*

Observa Heath que o genial alexandrino excluía do conjunto das figuras a reta, o plano, o ângulo etc. Considera Euclides as figuras (triângulos, quadriláteros, círculos etc.) como

elementos comparáveis, isto é, entre os quais é possível estabelecer-se a igualdade e soma.

A definição euclidiana de figura, dentro da axiomática moderna, não tem sentido.

D. 15 — *Círculo é a figura plana limitada por uma só linha, que se chama periferia, respeito a qual as retas que sobre ela incidem, de um dos pontos, colocados no interior da figura, são iguais entre si.*

Na *Geometria de Euctides*, publicada em 1735 pelo Padre Manoel de Campos, a definição de círculo aparece bastante alterada: "Círculo é uma superfície plana compreendida por todas as partes por uma só linha, dentro da qual há um ponto *A* do qual todas as retas que se tiram à extremidade são iguais. A dita extremidade se chama *"Circunferência"* ou *"Periferia"*.

Entre Euclides e o Padre Manoel de Campos há um intervalo de mais de vinte séculos!

Do ponto de vista didático, será preferível definir primeiro a circunferência (como lugar geométrico) e, depois, tirar a definição de círculo como a porção de plano limitada pela circunferência.

O Padre Campos julgava simplificar o ensaio apresentando uma definição obscura e errada, pois fala em *retas iguais.*

D. 16 — *Tal ponto se chama centro.*

O centro do círculo, por sua importância, mereceu de Euclides um destaque especial.

D. 17 — *Diâmetro do círculo é uma reta qualquer que passa pelo centro e cujas partes tenham seus extremos sobre a periferia do círculo. Ta! reta divide o círculo ao meio.*

A definição é superabundante. Euclides desconhecia as palavras *raio* e *circunferência* (em suas definições). O raio seria o semidiâmetro.

D. 18 — *Semicírculo é a figura compreendida entre o diâmetro e a periferia recortada pelo diâmetro. Centro do semicírculo é o mesmo que do círculo.*

O semicírculo preocupava os geômetras gregos, pois aparecia nas chamadas lúnulas de Hipócrates.

D. 19 — *São figuras retilíneas as limitadas por linhas retas, Triláteras, as compreendidas por três; quadriláteros, as por quatro; multiláteras, as limitadas por mais de quatro.*

No citado livro do Padre Manoel de Campos (1735) já aparece a palavra *polígono* para designar uma figura de mais de quatro lados. Nesse tempo as figuras retilíneas eram: os triângulos, os quadriláteros e os polígonos.

Diz Euclides que as figuras retilíneas (polígonos) eram limitadas por linhas retas, quando, na verdade, são limitadas por segmentos de retas. O erro do geômetra é perdoável, pois ainda em 1924 (século XX) podemos ler na *Geometria Elementar* de F. T. D.: "Polígono é uma figura plana limitada por retas."[3] Essa heresia geométrica foi formulada, vinte e um séculos depois da morte de Euclides, por uma *reunião de professores!*

D. 20 — *Entre as figuras triláteras é triângulo equilátero o que tem os três lados iguais; isósceles, o que tem somente dois lados iguais; escaleno, o que tem os três lados desiguais.*

3. Cf. *Geometria Elementar de* F. T. D., por uma reunião de professôres, Rio, 1924, pág. 17.

Já nessa parte aparece a classificação dos triângulos em relação aos lados. Toda essa parte da obra de Euclides sofre um impacto violento com o advento da Geometria Projetiva.

D. 21 — *E ainda: Entre as figuras triláteras, é triângulo retângulo o que tenha um ângulo reto; obtusângulo, o que tenha um ângulo obtuso; acutângulo, o que tenha os três ângulos agudos.*

Dessa definição decorre a classificação dos triângulos em relação aos ângulos. Seria melhor, em relação ao triângulo acutângulo, dizer: *é acutângulo o que só tem ângulos agudos.*

Ou ainda: *Ê acutângulo aquele cujos ângulos são agudos,*

É indispensável acrescentar — *os três* — pois já sabemos que esses ângulos são cm número de três.

D. 22 — *Entre as figuras quadriláteros, o quadrado é a figura equilátera e eqüiangular; o alterátero é equianguíar, mas não equilátero, mas não retangular; o rombóide é a que tem os lados e os ângulos opostos iguais, sem ser equilátero nem equit angular. As demais figuras quadriláteros são chamadas trapézios.*

Essa classificação, atualmente inaceitável, foi adotada durante muitos séculos (até o século XIX). A denominação *rombo* (em grego) designava uma espécie de pião que servia de brinquedo para os meninos. Esse pião era formado por dois cones iguais justapostos pela base. O perfil desse pião lembrava o *losango.* Rhombo seria, afinal, o movimento rápido de um corpo que gira.

Alguns autores vão buscar num peixe cartalagíneo, bastante conhecido, a origem do *rom-*

bo. Ensina o Prof. Fernando Tinoco em sua *Matemática Elementar;*

"Quando os lados de um paralelogramo são iguais, esse quadrilátero toma o nome de *losango* ou *rombo* (palavra latina que significa arraia por causa da forma desse peixe)."

A palavra *rombo,* que designava o losango, tornou-se obsoleta. Na linguagem corrente ninguém mais a emprega para designar o paralelogramo que aparece, com tanto realce, na nossa Bandeira. Em seu *Dicionário da Matemática, o* gcômctra espanhol Francisco Vera define *rombo* como o quadrilátero equilátero. Nesse quadrilátero o ponto de encontro das diagonais é um centro de simetria do polígono.

D. 23 — *Duas relas paralelas são as que, estando no mesmo plano e prolongadas ao infinito nos dois sentidos, por nenhuma parte coincidem.*

As definições euclidianas resistem aos séculos e permanecem inabaláveis diante do evoluir do pensamento científico. Anotemos a definição de paralelas que figura em um livro publicado em 1957, em São Paulo: "Linhas paralelas são as que, traçadas no mesmo plano c seguindo a mesma direção, nunca se encontram, por mais que sejam prolongadas."[1]

A Geometria euclidiana não admite o conceito de ponto do Infinito, ou melhor, ponto *impróprio* de uma reta. O espaço euclidiano não tem pontos no Infinito.

A Geometria de Desargues ampliou o espaço e definiu para uma reta qualquer o ponto do infinito dessa rcta.

4. Cf. Tito Cardoso de Oliveira, *Geometria Primária*, Companhia Editora Nacional de São Paulo, 38.ª ed., 1957, pág. 31. E o autor acrescentou; *Os trilhos dos bondes dão perfeita* (sic) *ideia de duas linhas paralelas.* Assim se consegue desvirtuar a Geometria.

7

O Número Quatro na Mística Oriental e o Número Três Entre os Romanos

POR ESTAR RELACIONADO COM OS QUATRO PONTOS CARDEAIS DESEMPENHA O NÚMERO QUATRO UM PAPEL DE ALTO RELEVO NA MÍSTICA ORIENTAL. MESMO SEM SER PERFEITO ARITMÈT1CAMENTE O NÚMERO QUATRO FOI, PELOS ORIENTAIS, APONTADO COMO UM NÚMERO PERFEITO.

Robert Fielding (1881-1950), estudioso dos segredos da Cabala, em seu livro *Estranhas Superstições e Práticas de Magia,* mostra o alto prestígio do número quatro na mística oriental.

Sugestionados pelos quatro pontos básicos da bússola, pelas quatro estações, os antigos tinham certa veneração pelo número quatro. Tem esse número papel saliente nas lendas chinesas. Os pontos cardeais e as estações do ano eram representados por cores e para cada côr correspondia um animal simbólico.

E eram assim apontados aos crentes:

Para o Este a côr seria o azul e o animal, o *Dragão.* Os mesmos símbolos eram adotados para a primavera. O par seria chamado Este-Primavera.

Para o Sul, tomavam o vermelho como a côr significativa c o animal seria o *Pássaro.* O Sul estaria ligado simbolicamente com o verão.

O outono estava relacionado com o Oeste. A sua côr era o branco e o animal o *Tigre.*

Em quarto lugar viria o Norte, que fazia par com o inverno. A côr para este conjunto Norte-Inverno seria o preto e o animal a *Tartaruga.*

Tudo inteiramente arbitrário e sem o menor sentido cabalístico.

Os quatro pontos cardeais foram, como acabamos de ver, de alto relevo cm todo o simbolismo primitivo. O ano com suas quatro estações e os doze períodos de tempo realçado pelo aparecimento de cada lua nova.

A tradição dos quatro rios do Paraíso fluindo para os pontos cardeais, dividindo a Terra em forma de cruz, foi transmitida a muitas Mitologias. No Sineru (?) dos budistas, cresce a árvore de Damba —, de quatro galhos, ou Árvore da Vida — e de suas raízes tombam quatro correntes sagradas — Norte, Sul, Este e Oeste.

O paraíso dos chineses, de acordo com Fielding, é dividido pelas quatro correntes da imortalidade. Quatro rios puros de leite percorrem o Asgard, o Eliseu, que seria o céu da suprema ventura dos escandinavos.

A cruz grega representa os ventos dos quatro pontos cardeais,

Cruz idêntica era usada pelos índios americanos aborígines, para representar os ventos que traziam a chuva.

O quatro foi, pelos antigos, apontado como o número perfeito, porque quatro são os lados do quadrado, quatro são as virtudes, quatro as estações, quatro os elementos (na crença antiga), quatro as patas de um dragão. Há quatro letras no nome de Deus (em latim) e quatro no nome do primeiro homem: Adam. E tentavam dar a cada letra de Adam uma significação mística, totalmente fantasiosa: O primeiro *A*, o *A* inicial, significa *anatole*, o Este, em grego; o *D*, inicial de *dysys*, Oeste; o segundo *A* seria *arktos*, Norte; e o M final, *membrion*, Sul. E jamais os místicos poderiam esquecer os quatro cantos do mundo que são tocados pelos quatro ventos.

As quatro criaturas sobrenaturais, para os primitivos chineses, eram: o dragão, o unicórnio, a fênix e a tartaruga. Esses animais presidiam os destinos da antiga China.

O dragão, no simbolismo chinês, tinha um papel de relevância e indecifrável mística, quase impossível de compreender para nós ocidentais. Para os sacerdotes o dragão era um ser quádruplo, isto é, com quatro atributos essenciais. Em sentido abstraio, há os dragões dos quatro mares.

Referem-se os místicos aos quatro irmãos, chamados *Yao*, que governam os quatro mares, a saber: Norte, Sul, Este e Oeste. São assim descritos, segundo o erudito orientalista Robert Fielding:

1) O dragão celestial, que sustenta os céus, guarda e ampara as mansões dos deuses para que elas não caiam;
2) O dragão espiritual, ou divino, que beneficia a humanidade, ordenando ao vento que sopre e à chuva que caia;
3) O dragão terrestre, que assinala os cursos dos rios e correntes;
4) O dragão do tesouro oculto, que guarda o mundo oculto dos mortais.

Com a renovação social e política da China todas essas crendices estão desaparecendo. Dentro de alguns anos só haverá na China dragões de papelão para distrair as crianças nos dias de festa nacional dos comunistas.

Agora passemos ao número três entre os romanos. Para os romanos e também para os gregos, o número três era dotado de poder misterioso e oculto: três eram as Graças, três as Fúrias, três os Deuses principais etc. As festas em honra de Marte eram denominadas *Trictyes*, pois no decorrer das cerimónias eram sacrificadas três vítimas. Muitas das festas pagãs duravam três dias, porque esse número era de bom augúrio para os romanos. Ainda conservamos entre as nossas tradições, o carnaval, que dura três dias.

Como explicar a origem da palavra *três* que veio do latim *tre* e que deu, em francês, t*rois*, em italiano *tre*, e em espanhol *tres?*

Trata-se de um problema bastante curioso em Filologia.

Pretendem alguns filólogos que a palavra *três* lança suas raízes numa forma sânscrita, isto é, na forma *lar* que significa *exceder, transpor, ir além.* O *três* ia além do *um, e* além do *dois.*

E por que não seria tal nome aplicado ao quatro, que excede o próprio *três*, ou mesmo ao *cinco*, que excede o *quatro?*

A explicação dada pelos pesquisadores e orientalistas era a seguinte:

A contagem era feita pelos dedos da mão, a saber:
um, o polegar;
dois, o indicador;
e, assim, a contagem *três* iria coincidir com o dedo maior, isto é, com o dedo que excede os outros, isto é, que excede os outros quatro,

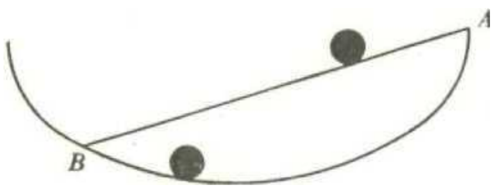
Essa explicação que, para muitos filólogos, parece bastante fantasiosa não deixa de ser sugestiva e interessante.

Com desmedida ênfase colocavam em evidência as coleções que totalizam *três,* isto é, os conjuntos notáveis de três elementos:

Três, as partes do Universo: Céu, Terra e Inferno.
Três, as parcelas da Eternidade: Passado, Presente e Futuro.
Três, os reinos da Natureza: animal, vegetal e mineral.
Três, as partes do corpo humano: cabeça, tronco e membros.
Três, as dimensões do espaço: comprimento, largura e altura.

CURIOSIDADE

A ciclóide e seu mistério

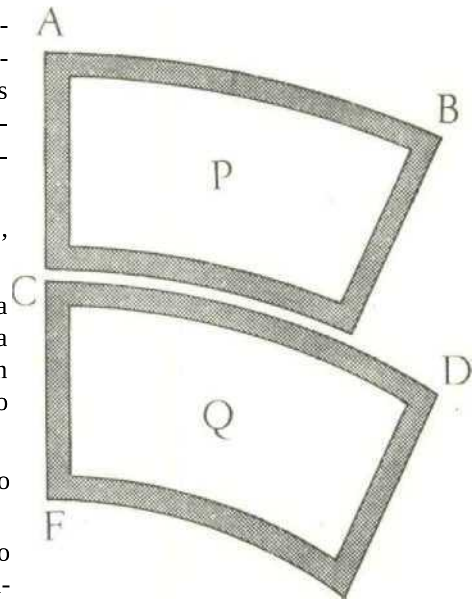


Afirmam os geômetras que a ciclóide é a curva de mais rápida descida. Vemos na figura duas pistas, sendo uma retilínea e outra cicloidal, que partem do ponto A *e vão para o ponto* B. *As duas bilhas são sôlias juntas em* A *e vão rolar para* B.
A bilha que segue a pista cidoidal chega antes e ganha a corrida. Se os escorregadores infantis fossem cicloidais, as crianças estariam sujeitas a quedas perigosas.

8

As Aparências que Enganam

EM SUA ANTOLOGIA, O NORTE-AMERICANO JAMES R. NEWMAN RECONHECE QUE A ILUSÃO DE ÓPTICA NÃO É PROPRIAMENTE TEMA DA MATEMÁTICA, MAS É ASSUNTO DE ALTO INTERESSE PARA O ESTUDIOSO DA GEOMETRIA. É SEMPRE INTERESSANTE SABER COMO PODERÁ O NOSSO RACIOCÍNIO INTERFERIR NAS ILUSÕES DE ÓPTICA QUE DETURPAM A VISÃO NATURAL DAS COISAS.



Na figura ao lado aparecem duas molduras curvilíneas — *P* e *Q* — cujas bordas superiores são indicadas por *AB c CD,* respectivamente.

Qual das duas bordas, meu amigo, é a maior?

Observe-as com a maior atenção c responda sem errar. Faça, de um momento, uma avaliação visual rápida.

Será *CD* maior do que *AB?*

Quem afirmar isso erra. As aparências enganam. A curva *AB* (da primeira moldura) é exatamente igual à curva *CD* (da moldura inferior).

Entre as duas curvas não há diferença de meio milímetro sequer. Meça com cuidado e procure certificar-se da verdade.

São muitas c variadíssimas as ilusões de óptica inventadas pelos geômetras.

Na segunda figura aqui representada, vemos oito segmentos retilíneos que parecem deformados pelos traços paralelos em ziguezague sobre os quais foram traçados.

O observador é obrigado a colocar o desenho cm certo piano de visibilidade, de preferência horizontalmente diante dos olhos, para reconhecer que os segmentos são de fato retilíneos e paralelos. Ao primeiro exame parecem tortos.

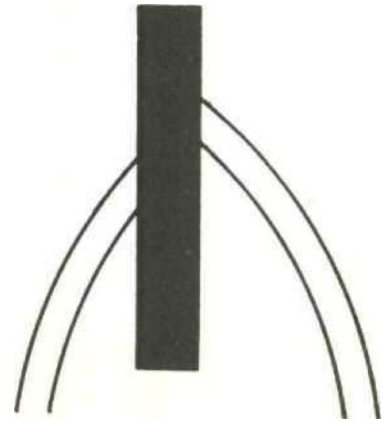
Na figura abaixo podemos ter outra ilusão de óptica:

Nos quatro ângulos apresentados, os vértices são unidos dois a dois por segmentos de reta. Esses segmentos são iguais, mas parecem desiguais se observados. O segmento traçado dentro das aberturas dos ângulos parece bem menor do que o outro.

Há certas ilusões de óptica que se tornam até irritantes para o observador.

Na figura seguinte, dois arcos de curva são cortados por um retângulo preto.

Repare bem. O caso é espantoso. Temos a impressão que os arcos, sendo prolongados, não ficarão em concordância.



Se o observador, porém, com a ponta de um lápis, completar os arcos da esquerda, verificará que eles formarão com as duas hastes da direita dois arcos perfeitos. Não há discrepância alguma. O erro aparente é provocado pelo retângulo preto que divide os dois arcos em quatro partes. Sendo unidas essas partes voltarão a formar os arcos em perfeita harmonia.

Por que ocorrem as ilusões de óptica? É bem interessante essa dúvida. O matemático e físico soviético Y. Perelman, em sua *Física Recreativa*, afirma que a nossa visão é certa, mas o nosso raciocínio "sendo inconsciente" é, por vezes, totalmente errado. E diz no seu curioso gracejar muito a sério com a Ciência:

Não olhamos com os olhos, mas sim com o cérebro.

De acordo com Perelman, não somos iludidos pela visão, mas somente pela compreensão subjetiva desta ou daquela figura. E a tal respeito, o soviético transcreve o parecer de Kant:

Os sentidos não nos enganam, pois como julgam sempre em absoluto julgam bem e acertadamente.

* * *

CURIOSIDADES

A palavra *aparência*

A palavra aparência vem do latim apparescere (aparecer). Ê aquilo que observamos à primeira vista, o que parece exteriormente, o que fere os sentidos. Aquilo que o espírito imagina que é mas que nem sempre é verdade, isto é, corresponde à realidade. Cournot (1801-1877), filósofo e matemático francês, distinguia duas espécies de aparências:

1.ª — A falsa aparência ou ilusão;

2.ª — A aparência verdadeira ou natural.

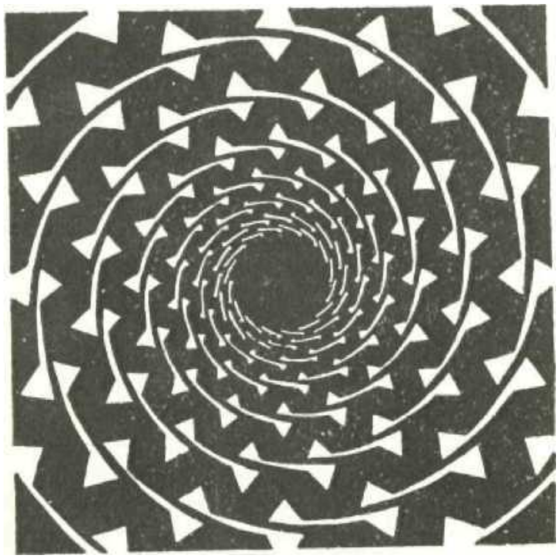
É interessante esclarecer a teoria bastante nebulosa do filósofo francês com dois exemplos bem simples:

1 — Ao caminhar pela rua escura vi, junto à porta da minha casa, um gato. Ao chegar mais perto, notei que não era um gato, mas sim um embrulho de trapos.

Fui, nesse caso, segundo Cournot, iludido pela aparência falsa ou ilusão.

2 — Os antigos julgavam que a Terra era fixa no espaço e que o Sol, as estrelas e planetas giravam em torno da Terra. Tratava-se de uma ilusão verdadeira ou natural.

Ilusão de óptica



As curvas que observamos neste desenho parecem espirais, mas, na verdade, são circunferências bem traçadas.
As aparências enganam.

9

A Curva Predileta dos Poetas

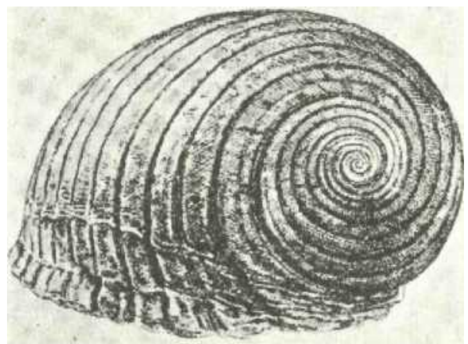
É DE EXTRAORDINÁRIO RELEVO, NA VIDA, A CURVA QUE O GEÔMETRA DENOMINA ESPIRAL. A CADA MOMENTO POETAS E PROSADORES CITAM AS ESPIRAIS. MAS, EM MUITOS CASOS, TANTO OS POETAS COMO OS PROSADORES IGNORAM NÃO SÓ A DEFINIÇÃO COMO OS DIVERSOS TIPOS DE ESPIRAIS.

Uma das curvas mais notáveis nos domínios da Análise Matemática é conhecida sob o nome de *espiral logarítmica.*

Matemáticos e naturalistas assinalaram a presença dessa curva, denominada "curva harmoniosa", numa multiplicidade de organismos vivos.

Mostra-nos a figura abaixo um pequeno molusco, em cuja formação se apresenta não uma espiral, mas sim um feixe de arcos de espirais logarítmicas.

A *espiral logarítmica*, descoberta por René Descartes (1596-1650), foi estudada pelo geômetra Jacques Bernoulli (1654-1705) e sua teoria, desenvolvida mais tarde por outro gigante da Matemática, o famosíssimo Leonard Eulcr (1707-1783), também suíço.



A *espiral logarítmica num ser vivo.*

Trata-se de uma curva plana, transcendente, definida por uma equação polar da forma exponencial

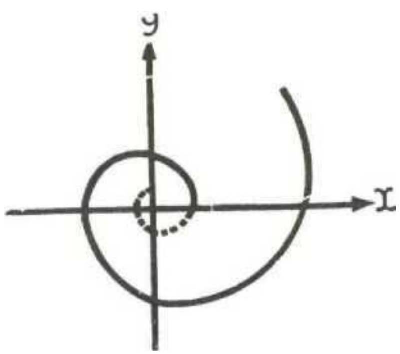
$$r = e^{mu}$$

na qual u é o ângulo polar (dado em radianos), r é o raio polar (dado em unidades lineares), m é um parâmetro e e representa a base dos logaritmos neperianos (e = 2,71828).

A espiral logarítmica, que se denomina bernoulliana (em homenagem a Jacques Bernoulli) não atinge o pólo, mas o ponto que descreve a curva dá uma infinidade de voltas em torno do pólo aproximando-se dele sem jamais atingi-lo. O pólo, portanto, é uni ponto assintótico da espiral.

A espiral só poderia atingir o pólo se o ângulo polar u fosse igual a menos o infinito, isto é, tivesse um valor negativo infinitamente grande. Na segunda figura que apresentamos aos leitores vemos desenhado um pequeno arco da bernoulliana, sendo que a parte pontilhada corresponde aos valores negativos do ângulo u. A curva corta o eixo polar numa infinidade de pontos.

A bernoulliana é uma curva planitotal, isto é, ocupa integralmente o plano em que se acha. Qualquer ponto do plano ou pertence à espiral ou está por esta compreendido (está dentro da espiral).



Eis a espiral logarítmica, a curva harmoniosa.

Não podemos confundir a espiral de Arquimedes, formada de dois ramos e que parte do pólo, com a bernoulliana, que só apresenta um ramo com ponto no infinito e que não atinge o pólo. O ponto do infinito da bernoulliana não tem direção determinada.

Asseguram os geômetras que a bernoulliana, mesmo sendo planitotal, apresenta uma propriedade notável: Cresce, conservanl do-se semelhante a si própria, e exprime, desse modo, o crescimento harmonioso.

Jacques Bernoulli tinha verdadeiro fanatismo pela espiral logarítmica, e considerava-a como uma das sete maravilhas da Matemática.

Um animal com a espiral harmoniosa.

Pediu, mesmo, que sobre seu túmulo fosse gravado pequeno arco dessa espiral acompanhado da seguinte legenda:

Eadem numero mutata resurgo

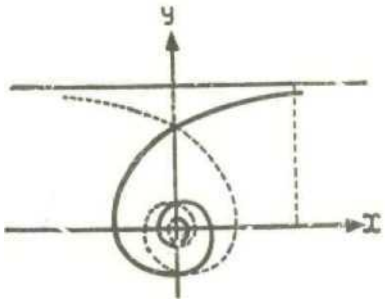
cuja tradução livre seria:

Mudando-me, na mesma essência, mudo números, ressurgindo.

Outra espiral interessante é a chamada *espiral hiperbólica.* É uma curva formada por dois ramos (um deles está apenas tracejado) e apresenta uma assíntota paralela ao eixo polar. A *espiral hiperbólica* aproxima-se indefinidamente da assíntota, mas só irá encontrá-la no infinito. O ponto gerador dessa espiral dá uma infbidade de voltas em torno do pólo, mas não o atinge por mais que dele se aproxime.

A espiral hiperbólica ê definida por uma equação polar da forma:

$$ru = a \qquad \text{(M)}$$



Esta é a espiral hiperbólica com seus dois ramos e sua assíntota.

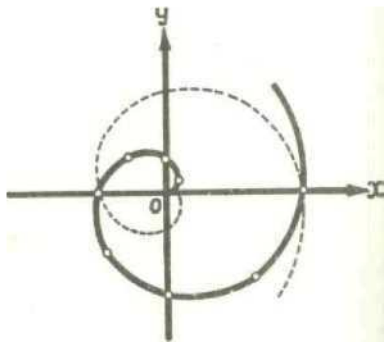
na qual a é uma constante, r o raio polar e u o ângulo polar. Sabemos que a curva do 2.° grau, chamada hipérbole equilátera, é definida por uma equação cartesiana da forma:

$$xy = a. \qquad \text{(N)}$$

Da analogia entre as duas equações (M) e (N) decorreu o nome da espiral que, na verdade, em nada se assemelha com a hipérbole, que é uma curva formada por dois ramos sem pontos comuns no campo finito.

Falemos, ainda, de uma terceira espiral, chamada *espiral de Arquimedes*, que aparece na figura com seus dois ramos.

O segundo ramo na curva da figura está tracejado. Em geral os desenhistas, e também os poetas, só consideram um dos ramos da espiral, isto é, admitem a espiral incompleta ou a semi-espiral de Arquimedes. Eis uma observação curiosa: a *espiral de Arquimedes* aparece na disposição geométrica das manchas coloridas que o pavão ostenta em sua cauda.



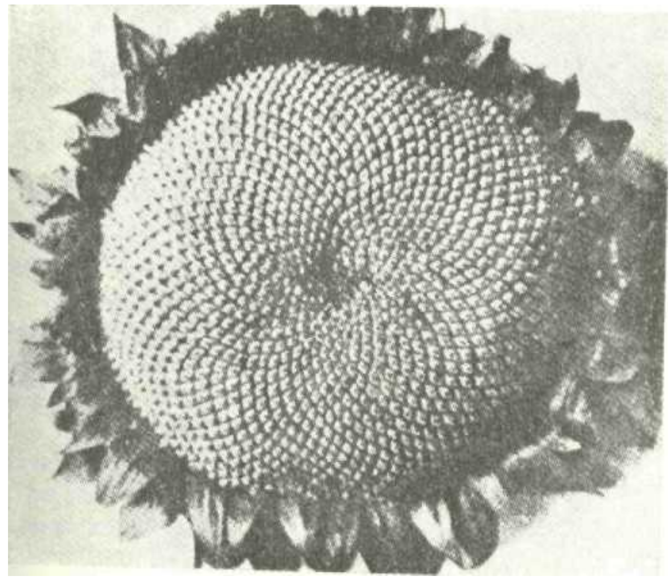
Esta é a espiral de Arquimedes. É uma curva que tem dois ramos e é planitotal.

Convém, também, não esquecer: a espiral de Arquimedes é uma curva plana, dotada de dois ramos infinitos que se cruzam infinitas vezes. Qualquer ponto do plano ou pertence à espiral ou está dentro dela. A espiral de Arquimedes é, portanto, uma curva *planitotal*,

isto *é*, ocupa o plano em que se acha. Essa mesma propriedade, como já vimos, é assinalada na *bernoulliana.*

Além da *espiral logarítmica*, da *espiral hiperbólica* e da *espira! de Arquimedes*, os matemáticos estudam c analisam várias outras espiriais. Citemos as mais interessantes.

Espiral parabólica, espiral recíproca, espiral senoidal, espiral de Poisont, espiral de Fermat, espiral de Galileu, espiral cônica de Papo (ou espiral esférica), espiral degenerada, espiral falsa ou pseudo-espiral.



Observamos na flor do girassol uma infinidade de espirais logarítmicas. O geômetra exclama deslumbrado:
— Que beleza!

A palavra espiral vem do grego *speira*, através do latim *spira*, c prefixo *al*. Em grego, *speira* significa enrolamento. (Cf. Antenor Nascentes, *Dicionário Etimológico.)*

A espiral é uma curva da vida. É citada a cada momento e merece a atenção de todos os que cultivam a Matemática.

São raros os poetas que não exaltam a espiral. Poderíamos assegurar, sem medo de errar, que é a curva predileta dos poetas.

Aqui está um exemplo colhido na obra do poeta e académico Olegário Mariano *{Últimas Cigarras):*

Eu, da moldura da janela antiga,
Filosofava, acompanhando a esmo
Do meu cigarro a alva espiral bizarra.

Apenas uma observação cabe no caso: a fumaça do cigarro não formava espiral (que é uma curva plana), mas sim uma curva helicoidal reversa.

A curva formada pela fumaça do cigarro pode ser uma curva helicoidal, mas não será nunca uma espiral, A espiral é uma curva plana.

10

O Heptágono Regular e Seu Perfume

O HEPTÁGONO REGULAR, O POLÍGONO QUE OS ÁRABES TANTO ADMIRAM, NÃO PODE SER TRAÇADO COM PRECISÃO MATEMÁTICA. O MAIS HÁBIL DESENHISTA, AO CONSTRUÍ-LO, COMETE UM ERRO. DIZIAM OS ANTIGOS QUE, SENDO UM POLÍGONO SAGRADO, NÃO PODIA SER CONSTRUÍDO PELO HOMEM.

Com a régua e o compasso, no sentido euclidiano, não podemos dividir, rigorosamente, uma circunferência em sete partes iguais. Conclusão: a construção do heptágono regular inscrito é sempre aproximada.

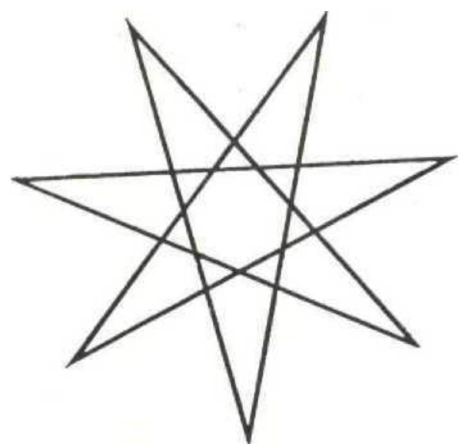
Perguntam os numerologistas:

— Será influência do número sete apontado pelos místicos pitagóricos como cabalístico?

Entre os polígonos não-euclidianos o heptágono regular é o que tem menor número de lados.

Convém esclarecer o seguinte:

A denominação "não-euclidiano" é dada ao polígono regular que não pode ser cons-



Este é o heptágono regular estrelado de 3ª espécie (gênero 3). É o polígono da simpatia perfeita.

truído *rigorosamente* com régua c compasso. Estão incluídos entre os "não-euclidianos", os polígonos regulares de 7, 9, 11, 13, 14, 18, 19, 21 . . . lados.

Os outros são ditos *polígonos euclidianos.* Assim o pentágono e o decágono (regulares) são euclidianos.

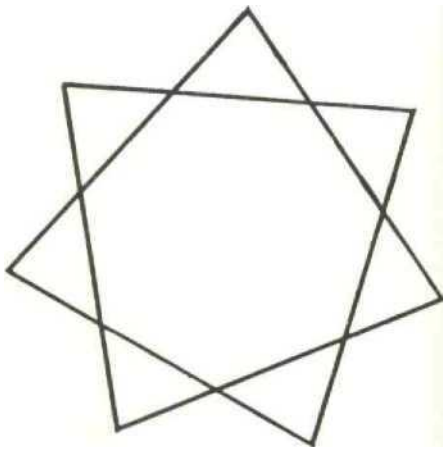
O polígono regular de 17 lados é euclidiano, e a sua construção já foi obtida pelo geômetra suíço Leonard Euler,

Para o heptágono regular alguns autores indicam a seguinte construção: traçamos, no círculo de raio *R,* dois diâmetros perpendiculares. Obtemos, assim, quatro raios. Tomamos o meio M de um dos raios. Levantamos, no ponto *M,* uma perpendicular ao raio até encontrar um ponto *P* da circunferência. O segmento *MP,* assim obtido, será (aproximadamente) o lado do heptágono regular inscrito no círculo de raio *OL.*

Para um círculo de 4 cm de raio o erro dessa construção grosseiríssima não chega a 2 milímetros. Mas é erro certo.

Sobre êsse curioso problema da construção geométrica dos polígonos regulares há um teorema denominado *Teorema de Gauss.*

O heptágono regular foi, por Gauss, incluído entre os polígonos não-euclidianos.



Este *é o heptágono regular estrelado de 2.ª espécie (gênero 2). O heptágono regular de 1.ª espécie é convexo.*

É pena. Há três heptágonos regulares: o convexo, o estrelado gênero 2, e o estrelado gênero 3. O heptágono regular estrelado (género 3) aparece, como elemento decorativo, na arte muçulmana. É um polígono estranho que os árabes consideravam de uma beleza "misteriosa".

Não eram raros, na Antiguidade, os templos heptagonais. Seria fácil destacar uma citação do famoso romance *Salammbô,* de Gustavo Fíaubert:

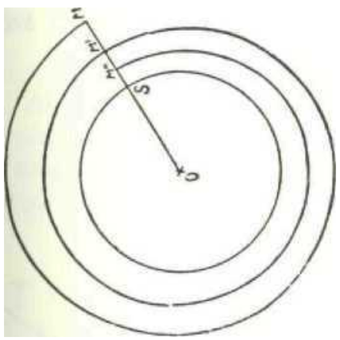
Os tetos cónicos dos templos heptagonais, as escadarias, os terraços, os baluartes, pouco a pouco, recortavam-se na palidez da aurora.

Nos vegetais, em geral, são raríssimas as simetrias heptagonais. Em geral, encontramos, nas flores, simetrias ternária, tetragonal, pentagonal, hexagonal. Afirmam, porém, os naturalistas, que a *petúnia-híbrida.* planta solanácea, muito ramosa, herbácea, de folhas ovaladas, apresenta sete pétalas cm simetria. A *petúnia* tem a corola em forma de funil c exala delicioso perfume.

O geômetra, na sua admiração pela forma heptagonal, chega ao extremo de afirmar que o perfume delicioso na *petúnia-híbrida* não é da flor, é do heptágono.

CURIOSIDADES

A espiral indecisa



Na figura ao lado podemos observar o arco de uma das mais estranhas espirais que povoam o céu da Geometria.

Consideremos uma circunferência de raio OS, e tomemos um ponto M no prolongamento desse raio.

A distância do ponto M à circunferência é MS.

Vamos supor que o segmento OM gira em torno do centro O em movimento uniforme. Uma volta por minuto, por exemplo.

Na figura, o movimento é da direita para a esquerda.

Vamos supor que, enquanto o segmento OM dá um giro completo (de 360°) em torno do centro O, o ponto M desloca-se sobre MO, também em movimento uniforme, e só percorre, em cada volta de OM, a metade da distância que o separa da circunferência. E, assim, OM dando uma 1.ª volta completa, o ponto M (com certa velocidade) vai de sua posição inicial M até M', que é o meio de MS.

Na 2.ª volta de OM, o ponto M' (já com. velocidade menor) vai de M' até M", que é o meio de M'S'.

E assim por diante.

Para cada volta de OM o ponto móvel só caminha a metade do caminho, e só caminhando a metade nunca atingirá a circunferência.

No fim de cem mil voltas o ponto M passará a percorrer, durante uma volta completa de OM, uma distância menor que o milésimo do micromilímetro.

O ponto M vai descrever uma nova espiral, bastante curiosa, denominada Indecisa.

Indecisa? Por quê?

Vamos esclarecer o caso.

A circunferência de raio OS ê uma assíntota da espiral. A Indecisa gira em torno dessa assíntota sem saber em que ponto deve parar. Aqui? Ali? No ponto S? Depois do S?

A Indecisa é uma curva transcendente que tem uma origem no ponto M mas não sabe onde poderá acabar. Se o raio OS fôr nulo, a Indecisa terá um ponto assintótico e perderá a sua indecisão.

A Indecisa foi descoberta e estudada por um matemático brasileiro da atualidade.

* * *

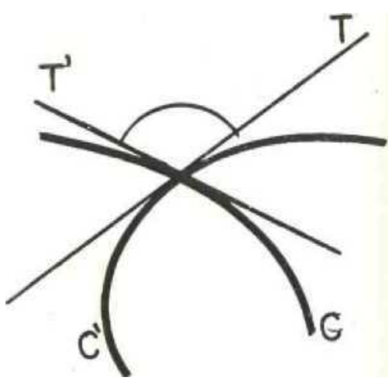
Ângulo de duas curvas

O matemático pode definir, facilmente, o conceito de ângulo de duas curvas C e C'

Ê o ângulo formado pelas tangentes T e T', a essas curvas, no ponto de interseção.

É erro grave, em Geometria, confundir-se ângulo de duas curvas com ângulo curvilíneo.

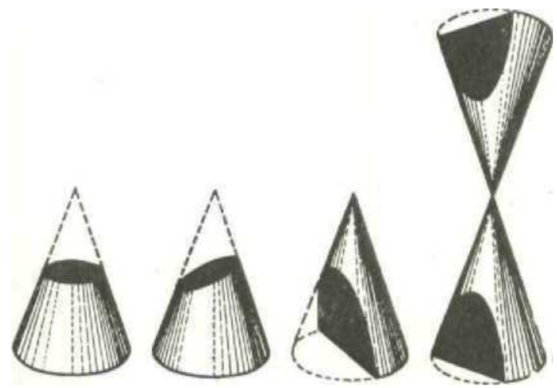
O ângulo curvilíneo não é ângulo (propriamente dito), mas sim uma figura inventada pelo desenhista e chamada ângulo curvilíneo.



Um Repouso de Dezoito Séculos

EMBORA ESTUDADAS PELO GEÔMETRA GREGO APOLÔNIO DE PÉRGAMO, QUE VIVEU NO SÉCULO III A. C, AS CÓNICAS SÓ FORAM ENCONTRAR APLICAÇÃO QUANDO O ALEMÃO KEPLER, EM 1609, ENUNCIOU SUAS LEIS. ENTRE O SEU ESTUDO, POR APOLÔNIO, E A SUA APLICAÇÃO, POR KEPLER, AS CÓNICAS TIVERAM UM REPOUSO DE DEZOITO SÉCULOS. FOI UM LONGO E BEM MERECIDO REPOUSO.

As curvas definidas geometricamente e que só podem ser cortadas por uma reta qualquer de seu plano, em dois pontos reais ou imaginários, denominam-se curvas de segunda ordem ou do segundo grau.



Vemos na figura as seções cônicas.

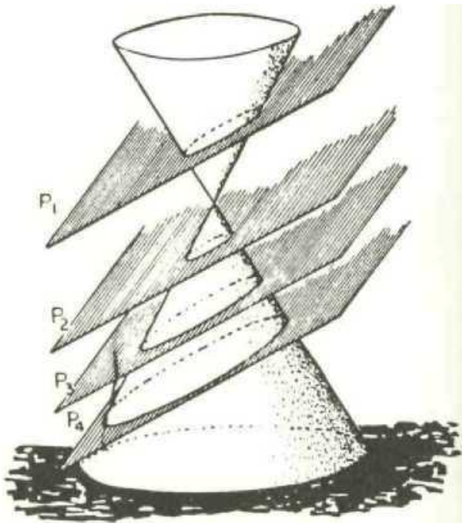
Essas curvas — elipse, círculo, parábola **c** hipérbole — são também denominadas *cônicas,* pois qualquer uma delas pode ser obtida por meio de uma seção plana feita no cone de revolução.

Vemos, na figura, um cone (de duas folhas) cortado de maneiras diferentes por um plano.

Se o plano cortar o cone no vértice vamos obter um ponto. Esse ponto será o círculo degenerado ou uma elipse degenerada. Mas mesmo assim é, para o matemático, uma cónica. Sim, uma cônica degenerada.

Os planetas descrevem, **em** torno do Sol, elipses. O Sol ocupa precisamente um dos focos da elipse, que define a trajetória do planeta.

Há planetóides cujas órbitas têm excentricidade tão pequena que são consideradas como circulares. Já foi observado um cometa com órbita parabólica. Esse cometa (com órbita parabólica) passou uma vez nas vizinhanças do Sol e seguiu a sua jornada pelo infinito, para nunca mais voltar. Sim, caminha para o infinito, mas continua sua órbita, acompanhando o Sol.



Seções elípticas feitas por um feixe de planos paralelos. Quando o plano passa pelo vértice do cone a elipse se reduz a um ponto.

Eis o que escreveu o poeta goiano Geraldo Vale, assegurando que os planetas jamais estudaram Geometria:

E estes mundos cegos, inconscientes, gravitando
em parábolas, em círculos, em elipses,
tom perfeita harmonia e grandiosa beleza
c jamais estudaram Geometria?

Vemos, assim, que as cónicas são curvas tão notáveis e interessantes que despertam até a atenção dos poetas.

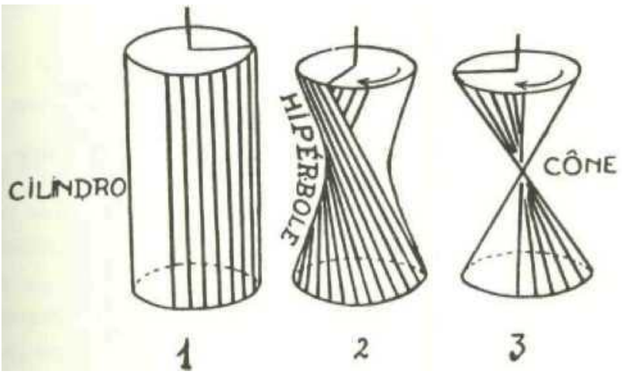
Do cilindro, por meio de uma transformação muito simples. podemos passar para o cone. E isso graças a um artifício bastante curioso.

A figura nos mostra três superfícies do segundo grau com indicações de suas geratrizes retilíncas: o cilindro de base circular, o hiperbolóide de uma folha c o cone. Vemos que as duas folhas do cone são separadas por um ponto que é o vértice. É o caso cm que o ponto separa duas superfícies.

Sendo as geratrizes formadas de fios bem finos, podemos, por uma simples torção da base superior do cilindro, obter as outras superfícies, como indica a figura.

Estudadas por Apolônio, na Antiguidade, só foram as cónicas despertar a atenção dos homens com Kepler, quando este astrónomo alemão formulou as suas leis. Entre Apolônio e Kepler houve um intervalo de dezoito séculos.

Lidemos, pois, com as cónicas. Estudemos as suas propriedades. Vejamos quais são as suas aplicações. Elas precisam agir. Já tiveram um repouso de mil e oitocentos anos.



Três superfícies do 2º grau: o cilindro, o hiperbolóide de uma fôlha e a cone.

CURIOSIDADE

Epitáfio de Diofante

Bastante curioso é o epitáfio de Diofante, matemático grego da Antiguidade, que viveu 200 anos a.C.

Encontramos na Antologia Grega um problema que é apresentado sob a forma de epitáfio:

Eis o túmulo que encerra Diofante — maravilha de contemplar. Com um artifício aritmético a pedra ensina a sua idade. Deus concedeu-lhe passar a sexta parte de sua vida na juventude; um duodécimo na adolescência; um sétimo em seguida, foi passado num casamento estéril. Decorreram mais cinco anos, depois do que lhe nasceu um filho.
Mas este filho desgraçado e, no entanto, bem amado! — apenas tinha atingido a metade da idade que viveu seu pai, morreu. Quatro anos ainda, mitigando sua própria dor com o estudo da ciência dos números, passou-os Diofante, antes de chegar ao termo de sua existência.

Em linguagem algébrica o epigrama da Antologia seria traduzido pela equação:

$$\frac{x}{6} + \frac{x}{12} + \frac{x}{7} + 5 + \frac{x}{2} + 4 = x$$

na qual x representa o número de anos que viveu Diofante. Resolvendo essa equação, achamos:

$$x = 84$$

Trata-se, afinal, dle uma equação muito simples do 1.° grau com uma incógnita.

12

Os Ternos Pitagóricos e o Amor Sincero

EXALTAVAM OS PITAGÓRICOS O CHAMADO TEOREMA DE PITÁGORAS. OS ADVERSÁRIOS DO FAMOSO GEÔMETRA TENTAVAM, POR TODOS OS MEIOS, ABALAR A FAMA DAQUELE QUE ERA APONTADO COMO O MAIOR GEÔMETRA E FILÓSOFO DE SEU TEMPO. E PARA DENEGRIR A OBRA DE PITÁGORAS RECORRIAM ATÉ A CARICATURA. AQUI ESTUDAMOS AS CURIOSAS PROPRIEDADES DOS TERNOS PITAGÓRICOS, DANDO AO PROBLEMA UM DESFECHO POÉTICO, TOTALMENTE IMPREVISÍVEL PARA O LEITOR.

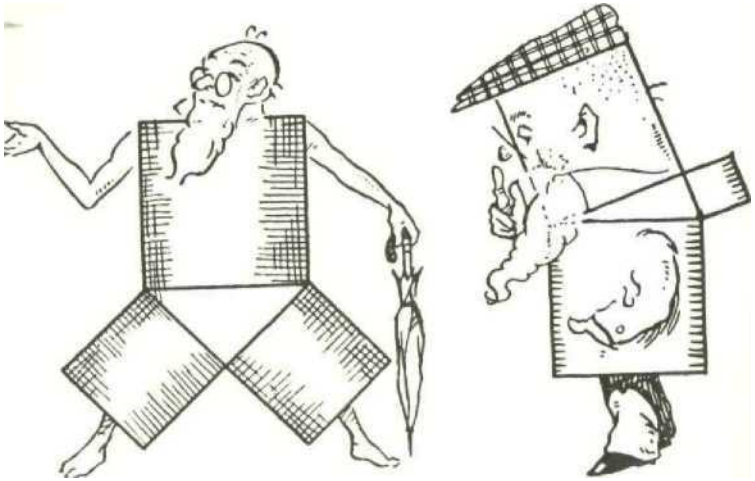
Apresentamos aqui duas pequenas caricaturas, nas quais um imaginoso desenhista, com figuras grotescas, procura fazer humorismo cm torno do famoso Teorema de Pitágoras:

O quadrado construído sobre a hipotenusa é equivalente à soma dos quadrados construídos sobre os catetos.

O Teorema de Pitágoras (de larga aplicação na prática) foi o único teorema da Geometria que recebeu a flecha do sarcasmo e da ironia.

Já na Antiguidade os antipitagóricos, impelidos pela inveja, procuravam lançar o ridículo sobre os discípulos do grande geômetra e, sempre que era possível, focalizavam de forma gaiata o seu teorema, em relação ao qual apresentavam anedotas e caricaturas por vezes injuriosas.

Sabemos que o Teorema de Pitágoras não é válido apenas para o quadrado;.é válido para três polígonos semelhantes cujos lados homólogos *a*, *b*, e *c*, sejam de um triângulo retângulo:



Ridículas composições geométricas feitas como zombaria ao Teorema de Pitágoras.

A área do maior polígono (lado a) será igual à soma das áreas dos dois outros polígonos semelhantes cujos lados homólogos são respectivamente b *e* c.

Será muito fácil provar, por exemplo, que o triângulo equilátero construído sobre a hipotenusa é equivalente à soma dos triângulos equiláteros construídos sobre os catetos.

De idêntico modo teríamos:

O ***hexágono*** *regular construído sobre a hipotenusa é equivalente à soma dos hexágonos regulares construídos sôhre os catetos.*

Em relação ao círculo poderíamos formular princípio análogo:

O círculo que tem por diâmetro a hipotenusa é equivalente à soma dos círculos que têm por diâmetro, respectivamente, os dois catetos.

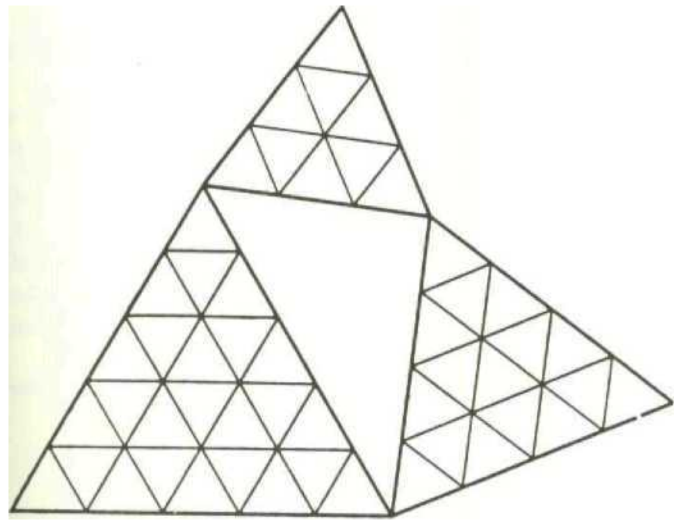
Quando três números inteiros *a*, *b* e *c* (não nulos) satisfazem à relação:

$$\mathbf{a}^2 = \mathbf{b}^2 + \mathbf{c}^2$$

dizemos que esses números formam um *terno de números pitagóricos*, ou simplesmente, um *terno pitagórico.*

Assim os *ternos:*

5	4	3
13	12	5
17	15	8



A figura nos mostra o Teorema de Pitágoras aplicado ao triângulo equilátero:
O triângulo equilátero T, construído sobre a hipotenusa, é equivalente à soma dos triângulos equiláteros T' *e T''* cons-*truídos sobre os catetos.*

são ternos pitagóricos. O quadrado do número maior é igual à soma dos quadrados dos outros dois.

Qualquer terno pitagórico será uma solução inteira para a equação diofantina:

$$x^2 = y^2 + z^2$$

na qual x é a hipotenusa e y e z são os catetos de um triângulo retângulo.

Para obter os ternos pitagóricos basta tomar as expressões:

$$a^2 + b^2 \qquad 2ab \qquad a^2 - b^2$$

e atribuir aos elementos a e b, que nelas figuram, valores inteiros, positivos e desiguais, sendo a maior do que b.

O primeiro elemento, feita a substituição, dará o valor numérico da hipotenusa; as outras duas expressões darão respectivamente os valores numéricos dos catetos.

Assim, fazendo $a = 5$ e $b = 2$, obtemos o seguinte terno pitagórico:

29 20 21

Um terno pitagórico é *primitivo* quando os elementos que o formam são primos entre si. (E são sempre primos entre si *perfeitos*, isto é, primos entre si dois a dois,)

Assim os ternos pitagóricos

13	**12**
17	**15**
41	**40**

são primitivos. Os ternos pitagóricos

10	8	6
36	36	15
50	48	14

são ternos *compostos* ou *não-primitivos.* Os seus elementos, como é fácil de observar, não são primos entre si.

Se multiplicarmos os elementos de um terno *primitivo* por um número inteiro qualquer m (maior do que 1) vamos obter um terno *composto* ou *não-primitivo.*

Façamos um exemplo.

Do terno *primitivo*

5 4 3

será fácil tirar os ternos *não-primitivos*

10	8	6	
15	12	9	
60	48	36	etc.

Dado um terno pitagórico *não-primitivo* podemos dividir todos os elementos dêsse terno pelo seu m.d.c. e obtemos um temo pitagórico *primitivo.*

Tomemos por exemplo o terno pitagórico

150 132 144 (M)

Dividindo-se os três elementos por 12 (m. d. c), obtemos

25 11 12 (N)

que é um terno pitagórico *primitivo.*

Diremos que o terno pitagórico (M) tem por *primitivo* o terno (N).

Dois ternos pitagóricos são ditos *semelhantes* quando podem ser tirados do mesmo *primitivo,* isto é, quando admitem o mesmo *primitivo.*

Assim os ternos pitagóricos *não-primitivos*

26	24	10
39	36	15

são semelhantes. Ambos foram tirados do mesmo *primitivo:*

13 12 5.

Todo terno *não-primitivo* é semelhante ao seu *primitivo.*

Dois ternos pitagóricos semelhantes correspondem a triângulos retângulos semelhantes.

Apresentam os ternos pitagóricos uma propriedade interessante:

Dado um terno pitagórico *primitivo* encontramos, sempre nesse terno, um elemento divisível por 3, um elemento divisível por 4 e um elemento divisível por 5.

Essa propriedade, extensiva aos ternos pitagóricos não-primitivos, é demonstrada de uma forma muito simples. Basta provar que o produto dos três elementos

$$a^2 + b^2 \qquad 2ab \qquad a^2 - b^2$$

isto é, a expressão

$$2ab\ (a^4 - b^4),$$

na qual a e b são inteiros, é sempre divisível por 3, por 4 e por 5.

Escrevemos, por exemplo, os ternos primitivos:

13	5	12	(T)
41	40	9	(U)
125	117	44	(V)

No terno (T) o 2.° elemento é divisível por 5 e o último, por 3 e por 4.

No terno (U) o 2.° elemento é divisível por 4 e por 5; o último por 3.

No terno (V) o 1.° elemento é divisível por 5; o 2.º por 3 e o 3.° por 4.

No terno pitagórico *primitivo* o elemento maior nunca é divisível nem por 3, nem por 4. E pode acontecer que não seja divisível por 5.

É interessante o terno pitagórico *primitivo*

61 60 11

no qual o segundo elemento é divisível por 5, por 4 e por 3. Os outros dois são números primos.

Um terno pitagórico *primitivo* qualquer tem sempre um elemento par (divisível por 4) e dois elementos ímpares. E, assim, a soma dos três elementos é sempre par.

Somando-se o elemento maior, de um terno *primitivo*, com um dos outros dois, obtemos ou um quadrado ou o dobro de um quadrado.

Se do elemento maior subtrairmos um dos outros elementos, obteremos ou um quadrado ou o dobro de um quadrado.

Todas essas propriedades dos ternos pitagóricos *primitivos* podem ser demonstradas facilmente.

O mesmo elemento pode figurar em dois ou mais ternos *primitivos.*

Assim, o elemento 5 figura cm dois ternos:

5	4	3
13	12	5

O elemento 65 figura, como 1.° termo, cm dois ternos *primitívos:*

65	63	16
65	56	33

O elemento 85 pode ser encontrado em três ternos *primitivos:*

85	77	36
85	84	13
157	132	85

O elemento 60 figura em quatro ternos *primitivos*, mas como é divisível por 3 e por 4 não pode aparecer no 1.° termo de um terno *primitivo:*

61	60	11
109	91	60
229	221	60
901	809	60

Há números que não figuram em nenhum terno pitagórico. Citemos os seguintes: 47, 59, 67, 71, 79 etc.

A êsses números é dada a denominação de números *antipitagóricos.*

Com todos os elementos menores que 1.000 são conhecidos 158 ternos *primitivos.* O maior é o seguinte:

997 925 372

O terno pitagórico *primitivo*

5 4 3

é o mais notável de todos, pois é formado por três números consecutivos, e, nesse terno, a soma dos elementos é a menor possível.

Esse terno (5, 4, 3) define um triângulo retângulo cujos lados, medidos com a mesma unidade, são expressos, respectivamente, pelos números 5, 4 e 3.

Esse triângulo, que era pelos geômetras gregos denominado "triângulo nupcial", já era conhecido pelos matemáticos egípcios, chineses e persas muitos séculos antes de Pitágoras.[1]

O Teorema de Pitágoras é um dos mais estudados c pesquisados nos domínios da Geometria. Só Ghersi *(ob. cit.)* apresentou-nos mais de vinte demonstrações para esse teorema, sobre o qual, tomado como tema exclusivo, já foram escritas várias obras, algumas de feição puramente recreativa.

Ao orientar seus discípulos, formulou Pitágoras, certo dia, uma demonstração gráfica tão simples e tão expressiva para o teorema que o surpreendeu. Bastava olhar para a figura e compreendia-se logo a demonstração. Narra Vitrúvio, arquiteto e escritor romano (século I a.C.) que o geômetra, nesse dia, em sinal de gratidão a Deus, foi ao templo acompanhado de seus discípulos e sacrificou um boi.[2]

A caricatura que acompanha esta nota é inspirada nas ridículas composições geométricas feitas no tempo de Pitágoras. Os desenhos foram feitos por artista alemão do século passado. Aquele gorro de xadrez preto e branco, que cobre a cabeça do segundo velhote, não poderia ser usado por um pitagórico quatro séculos antes de Cristo. Seria um anacronismo ridículo. Anacrónico seria aquele outro ancião, de óculos desajeitados, ostentando um guarda-chuva relativamente moderno com o cabo recurvado.

Mas o Teorema de Pitágoras, muito embora seja notável na História da Matemática e apresente um número incontável de aplicações práticas, não pode servir de motivo para que uma jovem possa amar o jovem que procurou cativá-la.

1. Cf. I. Ghersi, *Matemática Diletevolle e Curiose.*
2. *Idem, ibidem.*

1: Cf. I. Ghersi,
2: *Idem, ibidem.*

Eis o que escreveu textualmente a poetisa, professora e apreciada conferencista Emília Thereza em seu livro *É Sua Esta Poesia:*[3]

Amo-te
porque o quadrado
da hipotenusa
ê igual à soma
dos quadrados dos cate tos?
Não! Não!

A declaração da brilhante orientalista e declamadora, de que o Teorema de Pitágoras jamais poderá servir de pretexto para um amor sincero, deverá decepcionar profundamente os geômetras c abalar o prestígio sentimental da Matemática.

* * *

CURIOSIDADE

O zero, sua origem e sua importância

O matemático C. K. Hogben, em seu livro Mathematics for the Million, procura provar que o símbolo 0 foi inventado na Índia, entre 100 a.C. e 150 d.C. Originalmente não foi uma descoberta matemática, na acepção académica da palavra, mas sim uma descoberta eminentemente prática. O hindu chamava o zero de sunya, isto é, vazio. A identificação do 0 com o conjunto vazio, o nada, ou zero, foi consumada posteriormente.

Os hindus, entretanto, não foram o único povo a inventar o zero. Muitos séculos mais tarde, mas independentemente de qualquer inspiração oriental, o zero foi empregado pelos maias, cuja civilização floresceu na América cerca de 500 anos d.C. Estes indígenas americanos empregavam um arranjo vertical, de símbolos numerais, análogos aos símbolos chineses, para as inscrições de certas datas em seus monumentos.

O caráter momentoso da descoberta do zero é, hoje, universalmente reconhecido. Laplace (1749-1827), o notável astrónomo e

3. Cf. Pongettí, 1968, pág, 79.

matemático francês, refere-se ao zero num trecho importantíssimo de sua obra. E escreve:

> Devemos à Índia o engenhoso método de exprimir todos os números por meio de dez símbolos, cada qual portador, tanto de um valor de posição, como de um valor absoluto, invenção notável, mas tão simples, que nem sempre lhe reconhecemos o mérito. Não obstante, a esta mesma simplicidade, à imensa facilidade que trouxe a todos os cálculos devemos o achar-se a Aritmética à vanguarda de todas as grandes invenções. Só podemos apreciar condignamente o mérito desta descoberta, lembrando-nos que escapou ao génio de Arquimedes, de Apolônio e de todos os matemáticos da Antiguidade Clássica. ..

O matemático francês Mareei Boll acha que a descoberta do zero (como operador) foi uma das descobertas mais notáveis da História. Em seu livro As Etapas da Matemática (Lisboa, 1950, pág. 15) escreve Marcel Boll:

> O zero é um *operador*, pois que cada zero, junto à direita de qualquer número inteiro (não nulo), permite decuplicá-lo instantaneamente. O monge de Auvergne, Gcrbert, aprendeu a numeração dos árabes, quando da sua estada em Córdova (980), e, forçando a adoção desse sistema, fêz trabalho extraordinariamente fecundo, pois mais tarde, quando se tornou Papa (Silvestre II), pôde fazer uma eficiente expansão de suas ideias. Com os recursos de que dispomos hoje, esta descoberta toma as proporções de um acontecimento gigantesco, que nem de longe poderá ser posto em paralelo com os incidentes de consequências restritas, que se batizam *fatos históricos* (a rivalidade Aníbal-Cipião, a tomada de Constantinopla pelos turcos etc). Sem a numeração de posição, a negra noite da Idade Média jamais teria deixado a face da Terra.

13

As Curvas Matemáticas nos Animais e nas Plantas

SÃO INÚMERAS AS CURVAS DEFINIDAS E ESTUDADAS PELOS MATEMÁTICOS QUE SE APRESENTAM NOS ORGANISMOS VIVOS. UMA ANÁLISE MINUCIOSA DESSE PROBLEMA É FEITA POR HERMANN WEYL, EM "SIGMA", CAP. IV, 269.

Mostra-nos a figura inúmeras curvas planas c reversas que se apresentam em organismos vivos. Nesse amontoado de peque-

Curvas planas e reversas nos organismos vivos.

nas conchas podemos assinalar muitas curvas planas transcendentes, várias curvas helicoidais e espirais logarítmicas com pequenas deformações.

Além dessas curvas poderíamos apontar, em organismos vivos, a *catenária*, curva transcendente, que aparece no perfil de um ôvo de galinha; a curva exponencial que é encontrada no talho elegante da palmeira; os arcos de elipse, traçados nas folhas por certos insetos; a espiral logarítmica observada na flor do girassol; a espiral de Arquimedes que aparece bem nítida nos desenhos que admiramos na cauda do pavão etc.

As formas helicoidais (hélice cônica) são muito comuns em certas plantas e nos chifres de certos animais.

Weyl, em sua obra citada, procura justificar a multiplicidade de caramujos que apresentam, em seu perfil, a hélice cónica:

> O *movimento contínuo mais geral, no espaço tridimensional, é o movimento helicoidal que resulta de uma rotação em torno de um eixo, combinado com uma translação ao longo desse eixo. Qualquer ponto não situado no eixo descreve uma hélice cônica.*

Assegura o matemático que a existência dos caramujos helicoidais decorre do movimento contínuo no espaço tridimensional.

As curvas geométricas, desenhadas com a máxima precisão, podem ser assinaladas, ainda, em muitas plantas. As folhas da vitória-régia, por exemplo, formam discos circulares. A flor chamada rudbéquia *(Rudbeckia bicolor)* apresenta, em seu centro, cones circulares com suas bases bem desenhadas.

São, portanto, bem numerosas as curvas matemáticas, definidas com rigor pela Geometria, que se apresentam cm organismos vivos.

Bem dizia o judicioso Platão nas suas divagações filosóficas:

Por toda parte existe a Geometria.

14

O Problema das Bolas Misturadas

COMO PODE O MATEMÁTICO, FIRMADO NUM RACIOCÍNIO SIMPLES E PERFEITO, RESOLVER, SEM CÁLCULO, UM PROBLEMA QUE PARECIA TRABALHOSO E COMPLICADO? TRATA-SE DE UM PROBLEMA QUE, DO PONTO DE VISTA LÓGICO, FOI BEM "BOLADO".

Depois de pequena pausa, o homem da camisa vermelha apagou o cigarro e contou-nos o caso. Fui obrigado a ouvi-lo do princípio ao fim. Não houve outro remédio. Seria difícil arranjar um pretexto para sair. Um motivo qualquer, aceitável, para fugir.

E o tal homem, sem mais preâmbulos, sentou-se na minha frente, desapertou a gravata e narrou o seguinte:

— Para a noite da grande festa no clube, planejado o sorteio, preparei três urnas de madeira. Na primeira, com a etiqueta *P* (um *P* maiúsculo, azul, bem visível), coloquei dez bolas pretas; na segunda, com a etiqueta *B (um B* amarelo, maiúsculo, deste tamanho), coloquei dez bolas brancas; e, nà terceira, finalmente, coloquei a etiqueta *M.* Esse *M* (em preto) significava *misturadas.* Está entendendo? Eram, ao todo, trinta bolas. Veja só: Trinta bolas!

Preparei tudo, como disse, para a festa. As três urnas foram cuidadosamente fechadas. Pois sabe o que fêz o meu amigo Oscar Quental? De brincadeira, para provocar confusão (queria divertir-se à minha custa) trocou as etiquetas das três urnas. Trocou tudo. Não havia uma que estivesse com a etiqueta certa.

Fiquei furioso com o caso. Furioso mesmo. Ia ser obrigado a abrir novamente as três urnas c verificar, uma por uma, quais as bolas nelas contidas. Contei o caso a um professor amigo, sócio do clube, que é matemático. Disse-me o professor: "Não é necessário abrir as umas. Basta, de uma delas, retirar uma bola — uma bola só! — e o problema das três urnas, com as trinta bolas, estará totalmente resolvido."

Confesso que não acreditei no matemático. E não acreditei mesmo. Os matemáticos, às vezes, são exagerados e fantasistas. Como poderia êle, com a retirada de uma bola de uma urna, descobrir a côr das vinte bolas das outras urnas?

Que fêz o professor? Veja só.

Tomou a urna *M*, onde deveriam estar as bolas misturadas, e disse:

— Como as etiquetas estão trocadas esta urna deve conter as dez bolas brancas ou as dez bolas pretas. As misturadas, não. Vamos abrir esta urna e tirar dela uma bola. Tirar, apenas, uma bola.

Retirada a bola verificamos que era branca.

— Já sabemos — prosseguiu — que esta urna, falsamente indicada *M* é, agora, a urna das bolas brancas. É a antiga urna *B*.

— E as outras duas? — perguntei — Como vamos descobrir? Vamos abri-las?

Explicou o professor:

— Não vamos abrir mais nada. Vamos descobrir, pelo raciocínio, isto é, pela Matemática.

E tomando a urna onde, falsamente, estava *P* assim falou com segurança:

— Esta urna *P*, como as etiquetas estão trocadas, não contém, é claro, as bolas pretas; não contém, também, as brancas que estão na urna *M*, como já provamos. Ora, não contendo nem as pretas, nem as brancas, deve conter as misturadas. Está, assim, resolvido o caso da segunda urna. Quanto à terceira, indicada erradamente com a etiqueta *M*, não contém as brancas, nem as misturadas. Deve conter, por exclusão, as bolas pretas.

Estava, assim, com a retirada de uma bola (e só de uma bola) resolvido o problema das três urnas com as trinta bolas.

Mais tarde, antes da festa, perguntei ao Oscar Quental:

— Por que você foi fazer aquela brincadeira da troca das etiquetas?

Respondeu-me o Quental com um risinho maldoso:

— Era só para ver se você seria capaz de quebrar o galho e resolver o problema das trinta bolas sem abrir as três urnas.

— Só isso?

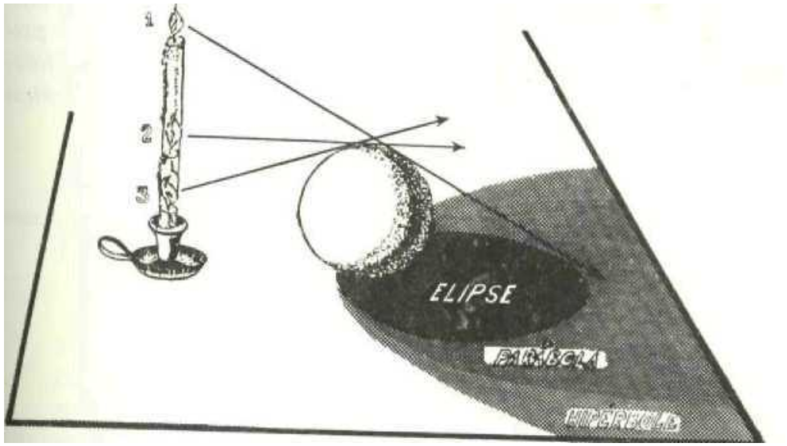
— Sim. Só isso.

— Ora, bolas!

* * *

CURIOSIDADES

A sombra da esfera



Com o auxílio de uma esfera bem iluminada por uma vela, poderíamos obter sombras com as formas das quatro cônicas. Será fácil destacá-las.

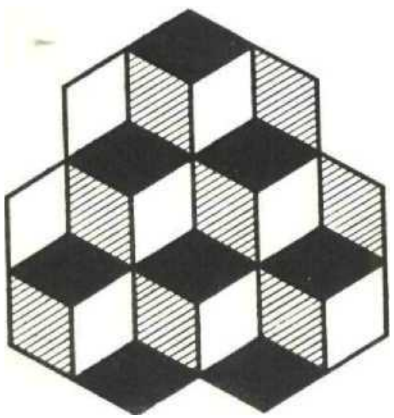
Se a altura da vela fôr maior do que o diâmetro da esfera, a sombra será uma elipse. (Veja a figura.)

Se a altura da vela fôr igual ao diâmetro da esfera, obteremos uma sombra parabólica. O centro da elipse e um dos focos foram atirados para o infinito.

Á hipérbole é obtida teoricamente quando a altura da vela é menor do que o diâmetro da esfera.

O círculo só será possível quando a altura da vela fôr infinita. Só assim a sombra da esfera (sobre o plano horizontal) seria um circulo.

Seis ou sete cubos?



Interessante ilusão de óptica. Podemos ver, na figura, seis ou sele cubos. Os cubos serão em número de seis se o observador tomar a face preta como base superior dos prismas. Serão em número de sete se a face preta fôr, pelo observador, considerada como base. Neste caso ficará uma face preta isolada na parte superior do desenho. No primeiro caso (seis cubos) ficarão duas faces pretas inúteis na base da figura.

* * *

Os bois contam até 100?

A tradição popular refere casos em que certos animais são capazes de contar números relativamente elevados; esses casos, porém, não têm sido estudados com critério científico.

Segundo Montaigne, moralista francês (1533-1592), os bois que serviam nos jardins de Susa, cidade da Pérsia, sabiam contar até cem, porque esses animais tinham como tarefa executar cem voltas por dia, movendo as pesadas rodas que serviam para elevar água; E logo que completavam o número habitual não havia esforço capai de obrigá-los A dar uma volta a mais.

Seria inadmissível que Montaigne, apontado como homem de alta formação moral, fosse inventar essa lenda dos bois de Susa que contavam até cem.

15

A Geometria Ideal e a Realidade

A GEOMETRIA ESTUDA FIGURAS QUE O HOMEM NÃO ENCONTRA NA NATUREZA, OS ENTES MATEMÁTICOS DEFINIDOS PELOS TEÓRICOS, NA REALIDADE, NÃO EXISTEM, MAS TUDO, EM MATEMÁTICA, DÁ CERTO. CERTÍSSIMO.

Quando forçado a caminhar pelo mundo das abstrações, reconhecia Aristóteles as imperfeições da Geometria.

E, assim, escrevia este filósofo:

. . .em verdade as linhas não são as de que falam Os geômetras, pois nenhuma das coisas sensíveis é assim (rigorosamente) reta ou curva. Realmente, a circunferência não toca a reta (tangente) num ponto, mas (segundo certo comprimento) como dizia Pitágoras, raciocinando contra os geômetras.

O debate sugerido pelo filósofo grego continua. E continua nos mesmos termos. O ente matemático que a Geometria estuda — a reta ideal por exemplo — não existe na Natureza. Uma bolha de sabão — outro exemplo — está muito longe da superfície esférica idealizada pelo geômetra.

Assegura o físico que a gota d'água, em absoluta liberdade colocada cm perfeito equilíbrio, toma a forma matematicamente esférica. Engana-se o físico. E nesse caso (sem trocadilho) engana-se *redondamente.* A esfera da gota, por causa dos desvios provocados pelas moléculas e da tensão superficial, apresenta irregularidades e nem todos os raios são iguais.

O geômetra, com o auxílio da fotografia, verificou que o arco-íris apresenta irregularidadcs que são causadas pela atmosfera. Uma porção do arco de um arco-íris estaria fora do traçado da perfeita circunferência.

A afirmação do que a Natureza, nas arestas dos cristais, oferece ao geômetra um exemplo não de reta (que é indefinida) mas de segmento de reta (que é limitado) é falsa. A aresta de um cristal só é aparentemente retilínea. Observada com uma lente, difere muito do segmento de reta em sua perfeição geométrica.

A suposição de que os raios luminosos são retilíncos já não é mais admitida pela Ciência. Um raio de luz imita a reta, mas não apresenta as perfeições geométricas da reta por causa dos elementos heterogêneos que formam o meio em que êle se propaga.

O escritor Lima Barreto, que era dotado de certa cultura matemática, em seu romance *Vida e Morte de J. M. Gonzaga de Sá* escreveu:

> *Compreende-se a esfera, o cubo, o quadrado em Geometria, mas fora dessa ciência é em vão querer obtê-los.*

É interessante, ainda, notar como Santo Agostinho (354-430) considerava as linhas geométricas, que só pelo espírito podiam ser percebidas. Podemos ler em *As Confissões:*[1]

> *Vi linhas traçadas por arquitetos tão finas como fio de aranha. Mas as linhas geométricas não são a imagem das que meus olhos carnais me revelaram. Para reconhecê-las não há necessidade alguma de se pensar em um corpo qualquer pois é no espírito que as reconhecemos.*

Aristótelcs tinha razão. As figuras geométricas são seres ideais e não poderão, jamais, existir na realidade.

1. Lib. X, cap. 12.

16

O Quadrado Mágico e o Jogo de Xadrez

OS MATEMÁTICOS ANTIGOS ATRIBUÍAM AOS QUADRADOS MÁGICOS ATRIBUTOS MÍSTICOS. OS QUADRADOS MÁGICOS ERAM USADOS ATÉ COMO AMULETOS. SERÁ INTERESSANTE ESTUDAR, EMBORA DE FORMA SUCINTA, OS DIVERSOS TIPOS DE QUADRADOS MÁGICOS E AS RELAÇÕES ENTRE O QUADRADO MÁGICO DE DEZESSEIS CASAS E O JOGO DE XADREZ.

Tomemos um quadrado e dividamo-lo em 9, 16, 25, 36. .. quadrados iguais a que chamaremos casas.

As casas em que o quadrado foi decomposto ficarão dispostas em linhas e em colunas. É claro que o número de linhas é igual ao número de colunas. Devemos apontar também as diagonais. As diagonais são formadas pelas casas que vão de um vértice a outro do quadrado.

Em cada uma dessas casas coloquemos um número inteiro. A figura obtida será um quadrado mágico quando a soma dos números (ou elementos) que figuram numa coluna, numa linha, ou cm qualquer das diagonais fôr sempre a mesma.

2	9	4
7	5	3
6	1	8

Quadrado mágico de 9 casas.

Esse resultado invariável é denominado constante do quadrado, c o número de casas de uma linha (ou de uma coluna) é o módulo do quadrado.

Na página anterior, apresentamos um quadrado mágico de nove elementos (casas) com a constante igual a 15, módulo 3. A primeira diagonal é formada pelos números 2, 5 e 8. A segunda diagonal é formada pelos números 4, 5 e 6.

Os números (ou elementos) de um quadrado mágico devem ser números inteiros tomados em sua ordem natural

1, 2, 3, 4, 5...

Um quadrado de 36 elementos, por exemplo, deve conter todos os números da sucessão natural, desde 1 até 36.

Para o quadrado de 16 elementos a constante é 34; para o quadrado de 25 elementos a constante é 65,

Damos a seguir os números de elementos de alguns quadrados c as constantes respectivas (entre parênteses):

36(65); 49(175); 64(260); 81(369)

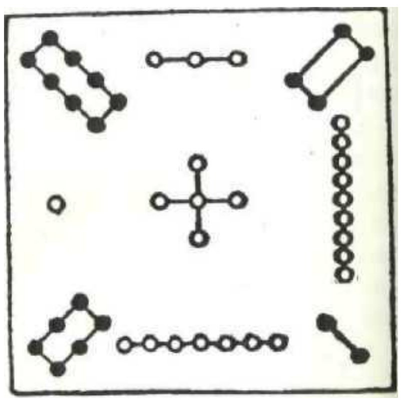
Esses números (constantes) 15, 34, 65, 111, 175, 260, 369 etc. são chamados *números planetários.*

Um *número planetário* é dado pela fórmula:

$$S = \frac{n(1 + n^2)}{2}$$

na qual devemos fazer n = 3, 4, 5, 6, 7 etc. O número n será o módulo do quadrado mágico correspondente ao planetário 5.

Quando a soma dos elementos de uma diagonal não é igual ao planetário correspondente, o quadrado deixa de ser *mágico* e passa a ser *semimágico.*



Quadrado mágico chinês no qual os números (pela falta de algarismos) são ainda representados por coleções de objetos. Parece remontar a 2.800 *anos a.C.*

A formação dos quadrados mágicos já era conhecida pelos calculistas chineses 6,000 anos a.C. e os antigos atribuíam ao quadrado mágico virtudes sobrenaturais. Um quadrado mágico de nove elementos (constante quinze) era um amuleto altamente eficiente, indicado para livrar uma pessoa da peste e da mordida do escorpião.

Na índia o maior prestígio era atribuído ao quadrado mágico de 9 ou de quinze elementos.

Emanuel Moscupolo, matemático grego, que viveu no século XIV, tornou os quadrados mágicos conhecidos na Europa. Moscupolo chegou a construir um quadrado mágico de 64 elementos com a constante 260, e revelou as singularidades dêsse quadrado de módulo 260.

Segundo Cornélio Agripa (1486-1535), que era médico e matemático, o quadrado da ordem 1 (com uma casa) simbolizava a Eternidade. O quadrado de módulo 2, com quatro elementos, não poderia existir, pois esse quadrado iria simbolizar o mundo material com os quatro elementos, o ar, a terra, o fogo c a água — e por causa das imperfeições desses elementos o quadrado mágico não poderia ter constante certa.

Apontado pelas autoridades como feiticeiro, Agripa foi preso várias vezes. Na opinião dos monges, além de médico, Agripa era astrólogo e quiromante perigoso. Construiu Agripa quadrados mágicos de 9, 16, 25, 36, 64 e 81 elementos, e cada quadrado mágico, de acordo com as suas conclusões cabalísticas, simbolizava um planeta. Assim, o de 9 elementos seria a Lua; vinha depois Mercúrio; a seguir Vénus; o de 36 elementos seria o Sol (módulo 6); o de 49 elementos seria Marte, e os dois últimos, respectivamente, Júpiter e Saturno. Dessa fantasia de Agripa resultou a denominação de *números planetários* para as constantes dos quadrados mágicos. No tempo de Agripa os planetas Urano, Netuno e Plutão não eram conhecidos e o Sol era incluído entre os planetas. (A Terra era fixa.)

18	99	86	61
66	81	98	19
91	16	69	88
89	68	11	96

Quadrado quase-mágico que continua quase-mágico quando colocado de cabeça para haixo.

Quando os elementos de um quadrado magico não são números tomados na ordem natural (1, 2, 3, 4, 5. . .) o quadrado é denominado *quase-mágico.*

Já houve um paciente calculista que construiu um quadrado quase-mágico que continua quasc-mágico quando é colocado de cabeça para baixo.

Um quadrado é bimágico quando elevando-se todos os seus elementos ao quadrado continua a ser quase-mágico.

Um quadrado é trimágico quando elevando-sc ao cubo todos os seus elementos êle se torna quase-mágico.

Um quadrado mágico pode ser *hipermágico* ou *diabólico.* Tal denominação é dada ao quadrado mágico que continua mágico quando transportamos uma linha ou uma coluna para o outro lado.

15	10	3	6
4	5	16	9
14	11	2	7
1	8	13	12

Quadrado mágico de dezesseis elementos.

A figura mostra-nos um quadrado mágico de dezesseis elementos com a constante 34. Observe que cada linha ou coluna tem dois elementos pares e dois ímpares. O mesmo acontece cora as diagonais. A primeira diagonal (15, 5, 2, 12) tem dois elementos pares e dois ímpares, e o mesmo ocorre com a segunda diagonal.

Na primeira coluna (15, 4, 14, 1) os dois elementos pares estão juntos, colocados entre os ímpares. Na última coluna (6,9 7, 12) os elementos ímpares estão juntos, colocados entre os pares

Nas linhas os elementos pares e ímpares aparecem intercalados.

Podemos percorrer todo o quadrado partindo da casa 1 e atingir a casa 16, de acordo com o movimento das peças do jogo de xadrez:

De 1 para 2 (movimento do cavalo);
De 2 para 3 (movimento inicial do peão);
De 3 para 4 (movimento do cavalo);
De 4 para 5 (movimento da torre, do rei, e da dama);
De 5 para 6 (movimento do cavalo);
De 6 para 7 (movimento da torre ou da dama);
De 7 para 8 (movimento do cavalo);
De 8 para 9 (movimento ou do bispo ou da dama);
De 9 para 10 (movimento do cavalo);
De 10 para 11 (movimento da torre ou da dama);
De 11 para 12 (movimento do cavalo);
De 12 para 13 (movimento da torre, do rei, ou da dama);
De 13 para 14 (movimento do cavalo);
De 14 para 15 (movimento inicial do peão);
De 15 para 16 (movimento do cavalo).

Nota-se uma particularidade: quando passamos de um número ímpar para outro número par, o movimento feito é exatamente o movimento do cavalo.

Se tomarmos quatro elementos de duas linhas c de duas colunas juntos (tais como 10, 3, 5, 16) a soma desses quatro elementos (que formam um quadrado) é sempre igual a 34. Os quatro números que estão nos vértices do quadrado (15, 6, I, 12) têm a soma igual a 34. Verifica-se o número 34 para quatro números que sejam simétricos cm relação a qualquer uma das diagonais (4, 10, 13, 7).

Poderíamos apontar outras "quadras" numéricas nas quais a soma dos elementos é 34. Citemos as seguintes: (10, 3, 8, 13), (4, 14, 9, 7), (5, II, 16, 2), (14, 8, 3, 9) etc.

E agora, ao terminar essa propriedade enxadrística, apresentamos uma curiosidade numérica:

Tomemos o tabuleiro quadrado, dividido em dezesseis casas, e coloquemos em cada casa um disco. Vamos supor que esses dezesseis discos são numerados de 1 até 16.

Pergunta-se: De quantas maneiras diferentes será possível colocar os 16 discos nas dezesseis casas do tabuleiro?

O número total de permutações possíveis já foi calculado por exímio matemático. Esse número tem, apenas, quatorze algarismos e é precisamente o seguinte:

20.922.789.888.000

Esse número, de acordo com o novo sisterria oficialmente adotado no Brasil, deverá ser lido da seguinte forma:

Vinte bilhões, novecentos e vinte e dois mil, setecentos e oitenta e nove milhões e oitocentos e oitenta e oito mil.

Entre esses vinte bilhões de agrupamentos dos dezesseis números há cerca de 878 que são notáveis para os caçadores de curiosidades matemáticas.

São aqueles nos quais os dezesseis números se dispõem de tal maneira que a soma das linhas, das colunas e das diagonais é constante e igual a 34. São, enfim, os quadrados mágicos. Os quadrados mágicos com dezesseis elementos . são, portanto, em número de 878.

Um deles aparece indicado no desenho. Os outros oitocentos e setenta e sete são igualmente interessantes, mas por falta de espaço não foram aqui incluídos. Fato lamentável que o leitor certamente saberá desculpar.

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

Quadrado mágico de 16 elementos que aparece no quadro Melancolia de Leonardo da Vinci. Nas casas centrais da linha de baixo aparece o ano 1514 em que foi executado o aludido quadro.

"Seu" Venâncío e as Dez Pontas de Cigarro

AQUI ESTUDAMOS, SOB FORMA DE NARRATIVA, UM PROBLEMA QUE DESPERTOU A ATENÇÃO DE MONTEIRO LOBATO EM "ARFTMÉTÍCA DE EMÍLIA". O LEITOR PODERÁ APLICAR O MESMO PROBLEMA AO CASO DE 22 PONTAS DE CIGARRO E TORNÁ-LO AINDA MAIS INTERESSANTE.

O seu nome era bastante complicado: Floriano Lcovigildo Venâncio Massaron.

Na verdade, porém, todos o conheciam por "Seu" Venâncio.

Posso contar o caso, que é muito simples, e fiquem tranquilos, pois no decorrer da narrativa não aparecem equações com denominadores nem os tais números irracionais complexos que tanto assustam os estudantes de Matemática.

"Seu" Venâncio trabalhava como vigia num depósito de ferro-velho. e era muito pobre. Paupérrimo. Mas, infelizmente, tinha o vício do fumo. Seu grande prazer era ouvir rádio fumando tranqiiilo o seu cigarrinho.

Mas, como não tivesse recursos suficientes para comprar cigarros (sempre caríssimos), procedia do seguinte modo: apanhava cuidadosamente as pontas de cigarro que os outros fumantes deixavam e com essas pontas fazia os "seus" cigarros.

Com cada três pontas fazia um cigarro, ou melhor, três pontas achadas era um cigarro fumado. A regra era essa: "Com três pontas, um!"

Certo dia chuvoso e frio, "Seu" Venâncio não pôde sair do seu quarto. Sentia-se meio adoentado. Abriu a sua *caixa de pontas* c contou: "Dez pontas! Ora que maçada!" Na sua *caixa* o matemático diria que havia um conjunto de pontas! Só dez pontas!

E, ao abrir naquele dia, pela manhã, a sua *caixa de pontas* (com o tal conjunto de dez pontas) "Seu" Venâncio fèz surgir um problema de Matemática que se tornou famoso e que deveria entrar para a História Universal de César Cantu cm nova edição.

O problema é o seguinte:

Com as dez pontas, isto é, gastando *apenas* aquele pequeno conjunto de dez pontas, quantos cigarros poderia "Seu" Venâncio fumar tranquilo, ouvindo rádio, em seu quarto? (O dia, já dissemos, estava chuvoso, triste e além de triste, muito frio.)

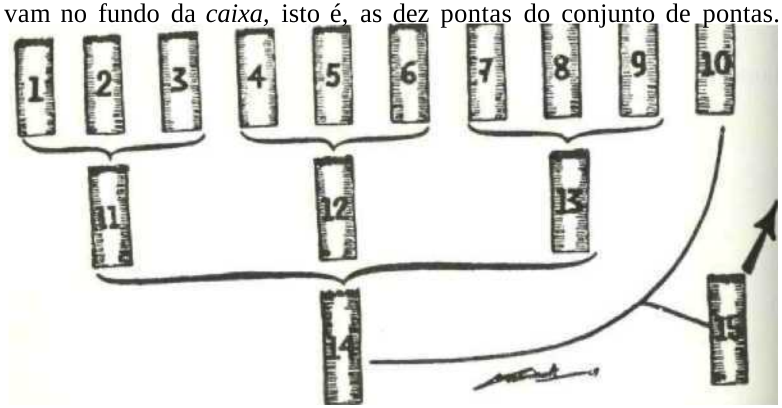
Uma pessoa desprevenida das sutilezas do cálculo, e ignorando a teoria dos conjuntos, diria:

— Ora, o nosso Venâncio, com as dez pontas, fumou três cigarros e sobrou, no fim, uma ponta!

Essa solução, além de errada, é chocante para a sistemática de um bom fumante, exímio colecionador de pontas. Altamente chocante.

Veja bem como procedeu, cm sua modéstia, o vigia do depósito de ferro-velho naquele dia frio c nuvioso.

Chamemos 1,2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 e 10 as pontas que resta vam no fundo da *caixa,* isto é, as dez pontas do conjunto de pontas.



Mostra-nos a figura como foram feitos os cinco cigarros *com* as *âti pontas,* A *última ponta, tomada -por empréstimo, é devolvida ao dono.*

Com as pontas agrupadas, assim, em temos — (1, 2, 3), (4, 5, 6) e (7, 8, 9,) — êle fêz três magníficos cigarros que foram saboreados tranquilamente pela manhã até a hora do almoço.

É claro que desses três cigarros sobraram, respectivamente, três pontas que chamaremos (11, 12 e 13).

De cada cigarro fumado, e bem fumado, sobrou uma ponta, uma só.

Dispõe êle agora de quatro pontas que são: 11, 12, 13 e 10, como aparece na figura.

Depois do almoço, "Seu" Venâncio tomou as três pontas (11, 12, 13) e fèz o seu quarto cigarrinho daquele dia. Desse quarto cigarro sobrou uma nova ponta que chamaremos 14.

Restaram, agora, só duas pontas: 14 e 10. Não eram suficientes para a preparação de um perfeito e legítimo cigarro.

Que fêz "Seu" Venâncio?

Pediu ao seu companheiro de quarto (que também colecionava pontas esquecidas) uma ponta *emprestada. Só* emprestada. Com essa ponta (ponta 15) obtida por empréstimo, e juntamente com as pontas 14 e 10, preparou o seu quinto e último cigarro daquele dia.

Esse quinto cigarro foi, com o maior prazer, saboreado depois do café e deixou, como herança natural, uma ponta sobressalente (a ponta 16) que foi devolvida (como era de direito) ao seu legítimo dono, o companheiro de quarto do vigia.

E, assim, com as dez pontas de cigarro (c só com as dez pontas), o bom Venâncio fumou cinco cigarros e não sobrou coisa alguma.

Terminada a narrativa, a caixa-depósito do "Seu" Venâncio ficou vazia, com zero *pontas.*

Zero *pontas!*

Sim, é assim que se exprime o bom matemático: zero pontas!

Um conjunto vazio tem o cardinal zero — ensina o Prof. Oswaldo Sangiorgi, de São Paulo.

E agora uma coisa curiosa: O nome de "Seu" Venâncio, o nome completo, como já dissemos, era Floriano Leovigildo Venâncio Massaron.

CURIOSIDADES

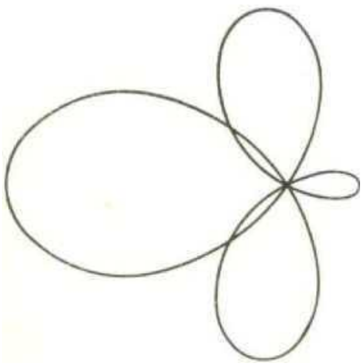
Numeração chinesa

Vemos, na figura acima, o número 1942 escrito pelo antigo sistema chinês.

Observem a forma do algarismo 100 que difere da forma do algarismo 10. O mil é indicado por um sinal que parece dez mas tem, no alto, um traço. O 9 tem a forma aproximada de um h minúsculo um pouco deformado.

* * *

A curva do escaravelho



Curva bastante curiosa que foi estudada por dois matemáticos franceses do século passado; Laurent e Painvin. A escaravelho é uma curva de 8º grau que pode ser tirada da hipociclóide de quatro reversões.

18

Patas e Chifres no Palácio do Rei

DE PITORESCO EPISÓDIO OCORRIDO EM BAGDÁ, NO TEMPO DO CÉLEBRE HARUM AL-RASHÍD, PÔDE O MATEMÁTICO, SEM ESFORÇO, TIRAR UM PROBLEMA CURIOSO. ESSE PROBLEMA LEMBRA VAGAMENTE O VELHÍSSIMO PROBLEMA DAS GALINHAS E **COELHOS,** QUE APARECE CITADO EM NOSSOS LIVROS DIDÁTICOS. VAMOS ESTUDÁ-LO SEM AS INFALÍVEIS COMPLICAÇÕES ALGÉBRICAS COM EQUAÇÕES E RADICAIS SUPERPOSTOS.

Conta-se (Allah, porém, é mais sábio!) que o califa Harum al-Rashid ao chegar, certa manhã, ao alto do terraço de sou palácio, viu, com surpresa, o pátio cheio de animais.

— Por Allah, o Muito Alto! — exclamou dirigindo-se ao seu primeiro-vizir. — Que é isso?

O grão-vizir que se achava, como sempre, ao lado do rei, apressou-se a esclarecer o caso:

— Foi Zaluan, o mágico pErsa, *ó* rei! que chegou hoje pela madrugada de Bassora e vai dar um espetáculo ao povo de Bagdá. Trouxe rinocerontes (todos de um chifre só), touros (em número menor que os rinocerontes), mais de meia dúzia de pavões e serpentes, sendo duas bem perigosas. São ao todo vinte e dois animais. As serpentes estão naquelas gaiolas de ferro.

— E quantos chifres? Quantas patas? — indagou o califa.

O grão-vizir, que aliás sabia somar, sem errar, dois números inteiros, observou demoradamente a bicharada, contou E recontou pelos dedos e disse, decorrido algum tempo:

— Já contei tudo, ó rei! Contei tudo sem errar. Os chifres ao todo são 16, mas as patas são cm número de 58.

E acrescentou logo para evitar dúvidas:

— Contei, é claro, cada pavão com duas patas.

O califa, que naquela manhã estava de bom humor, e com o pensamento voltado para contas e cálculos, disse ao seu grão-vizir:

— Vamos fazer uma experiência, meu caro Giafar! Uma experiência original! Mande chamar o nosso abacista, o talentoso Fuad Shayad: Quero que o calculista resolva esse problema que me parece bastante curioso. Sabemos que, nesse pátio, estão 22 animais (rinocerontes, touros, pavões e cobras) com um total de 58 patas E 16 chifres. Como calcular o número exato de rinocerontes, de touros, pavões e de cobras?

Minutos depois o talentoso abacista foi levado à presença do rei.

O calculista Fuad, que era um sírio inteligente E ativo, exímio na Álgebra, ao ouvir o enunciado do problema (mesmo sem olhar para o pátio) respondeu com a maior precisão:

.— Estou informado de que são ao todo 22 animais. Uns com dois chifres, outros com um chifre só, e outros sem chifres, Uns com quatro patas, outros com duas patas e alguns sem pata alguma.

Sabendo-se que cada rinoceronte tem um chifre, que cada touro tem dois chifres e que as serpentes não têm patas, o problema admite cinco soluções. Essas soluções são as seguintes:

2,	**7,**	**11,**	**2**
4,	**6,**	**9,**	**3**
6,	**5**	**7.**	**4**
8,	**4,**	**5,**	**5**
10,	**3,**	**3,**	**6**

O primeiro número indicava o total dos rinocerontes; o segundo, o total dos touros; o terceiro correspondia aos pavões e o último às cobras. A soma dos elementos de cada linha é igual a 22, pois 22 é o número total de animais.

E agora, meu caro leitor?

— Da conversa entre o rei e o vizir, qual das cinco soluções é a única que convém ao problema?

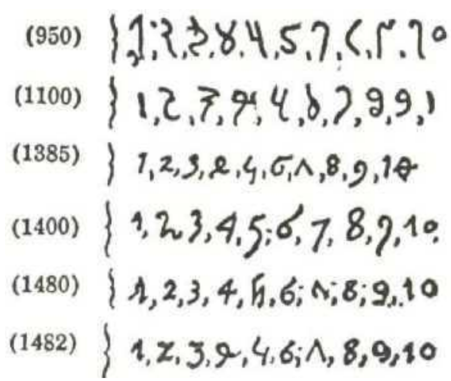
A única solução que convém ao problema é a terceira (6, 5, 7, 4). O número de touros (5) é menor do que o número de rinocerontes (6); o número de pavões (7) excede de uma unidade a meia dúzia. Essas duas condições não ocorrem, conjuntamente, nas outras soluções.

Reza a lenda oriental que o problema das patas e chifres foi resolvido por um abacista sírio. Abacista era a denominação dada ao calculista profissional, que sabia manejar com os ábacos e fazer até multiplicações E divisões. Fazer, sem errar, a divisão de um número por 12, por exemplo, era, naquele tempo (século IX), uma proeza que causava inveja e admiração.

* * *

CURIOSIDADES

Evolução dos algarismos



A figura nos mostra como evoluíram as diversas formas dos algarismos indo-arúbicos desde o século X (950) até o século XV (1482). Nota-se que ainda no século X os matemáticos representavam o 3 pela letra gama do alfabeto grego.

Nomes das razões

Os matemáticos romanos designavam cada razão (quociente de dois números) por uma denominação especial; os nomes atribuídos às razões eram complicadíssimos.

Exemplo: A razão 2:3, ou melhor, dois terços, era pelos matemáticos do tempo de Boécio, (VI século) denominada: *ratio subquialtera.*

A razão $4\frac{3}{7} : 1$ era ainda, no tempo de Wallis, isto é, no século XVII, denominada: *ratio quadruplo super tnparticus septima.*

O nome, como vemos, era muito mais complicado que a expressão numérica.

Parentesco numérico

Os números 32 e 49 devem ser aparentados pois apresentam uma singularidade que já foi assinalada pela inesgotável paciência dos calculistas.

Escrevamos os quadrados e as quartas potências desses números:

$$32^2 = 1024 \qquad 32^4 = 1048576$$
$$49^2 = 2401 \qquad 49^4 = 5764801$$

Observemos que as potências do mesmo grau são formadas com os mesmos algarismos. Passa-se, por exemplo, do quadrado de 32 para o quadrado de 49 mediante uma simples permutação de algarismos. Passa-se da 4.ª potência de 32 para a 4.ª potência de 49 permutando os algarismos.

Outras potências desses dois números apresentarão propriedades análogas. Ê bem possível que 32^{16} e 49^{16} sejam expressas por números formados pelos mesmos algarismos. Estará o leitor disposto a verificar?

19

A Alta Matemática das Abelhas Geômetras

ASSEGURA O ESCRITOR BELGA MAURICE MAETERLINCK (1862-1949) QUE AS ABELHAS, NA CONSTRUÇÃO DE SEUS ALVÉOLOS, RESOLVEM UM PROBLEMA DE "ALTA MATEMÁTICA". AQUI TENTAMOS EXPLICAR O CHAMADO PROBLEMA DAS ABELHAS, A RAZÃO DA FORMA HEXAGONAL DO ALVÉOLO E O CASO DO CÉLEBRE ÂNGULO DE FECHAMENTO NA COBERTURA RÔMBICA DO ALVÉOLO QUE ASSOMBROU OS MATEMÁTICOS, OS TEÓLOGOS E OS NATURALISTAS DA EUROPA.

Com uma única finalidade a abelha constrói os seus curiosos alvéolos: é para neles depositar o mel que fabrica. Esses alvéolos são feitos de cera. Levadas (afirmam os sábios pesquisadores) por um instinto admirável, as abelhas procuram obter para seus alvéolos uma fornia que seja a mais económica, isto é, que apresente "maior volume" ou maior capacidade, para a menor porção de material empregado.

Dentro dêsse plano de trabalho, é preciso que a parede de um alvéolo sirva também ao alvéolo vizinho. Logo, o alvéolo não pode tec forma cilíndrica, pois, do contrário, não haveria paredes comuns c o desperdício de material seria enorme.

Era preciso, pois, para o alvéolo, adotar uma forma prismática.

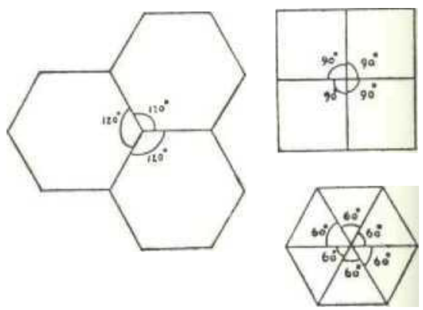
Os prismas (os alvéolos) devem encher totalmente o espaço sem deixar interstícios. As paredes devem ser comuns.

Os únicos prismas regulares que podem ser justapostos sem deixar interstícios são: o prisma triangular, o quadrangular e o hexagonal. Desses três prismas regulares qual será o mais econômico? Em outras palavras:

Qual dos três prismas (tendo áreas laterais iguais) apresenta maior volume?

Digamos que com uma certa porção Q, de cartolina, fabricamos o prisma triangular; com a mesma porção Q, um prisma quadrangular e, ainda, com a mesma porção Q, um prisma hexagonal (como indica a figura). Os três prismas são supostos abertos em cima c embaixo. (As bases não são levadas cm conta.)

As três únicas maneiras com que podemos fechar o espaço com prismas regulares e iguais sem deixar interstícios: a) com prismas quadrangulares iguais (ângulo de 90°); b) com prismas triangulares regulares iguais (ângulo de 60°); c) com prismas hexagonais regulares iguais (ângulo de 120°). Observem que 60°, 90° e 120° são os divisores de 360° e ângulos internos de polígonos regulares. As abelhas preferiram o prisma hexagonal por ser o mais econômico.



As áreas laterais dos três prismas são iguais. Podemos, portanto, assegurar que esses prismas apresentam, em suas bases, polígonos isoperímetros (com o mesmo perímetro).

Designemos por a, b, e c, respectivamente, as arestas das bases dos três prismas.

Temos, portanto:

Perímetro do triângulo	$3a$;
Perímetro do quadrado	$4b$;
Perímetro de hexágono	$6c$.

Mas como os três polígonos são isoperímetros, temos:

$$3a = 4b = 6c.$$

Com o auxílio das relações

$$3a = 4b \text{ e } 3a = 6c$$

podemos exprimir as arestas b e c em função de a (aresta do triângulo).

Temos:

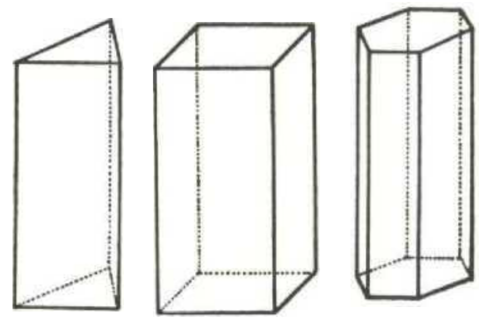
$$b = \frac{3a}{4} \qquad c = \frac{a}{2}$$

Conclusão:

As três arestas básicas dos prismas são, respectivamente:

$$a, \qquad \frac{3a}{4} \qquad \text{e} \qquad \frac{a}{2}$$

Conhecidas as três arestas podemos, com auxílio da Geometria, calcular o volume desses três prismas.



Dos três prismas regulares a abelha escolheu o hexagonal por ser o mais econômico.

Sabemos que o volume de um prisma regular (esse é o caso) é igual ao produto da área da base pela altura. A altura h dos prismas é supostamente igual à unidade. Basta, portanto, calcular as áreas das bases.

Essas áreas, de acordo com a Geometria, são:

$$a^2\sqrt{3} \qquad 9a^2 \qquad 6a^2\sqrt{3}$$

A comparação desses volumes torna-se mais simples com a supressão do fator comum a^2. Escrevemos;

$$4\sqrt{3} \qquad 9 \qquad 6\sqrt{3}$$

Qual desses três números é o maior? Qual o prisma de maior volume?

Vamos substituir $\sqrt{3}$ pelo seu valor aproximado, 1,73 e obteremos os três números (aproximados):

6,92 9 10,38

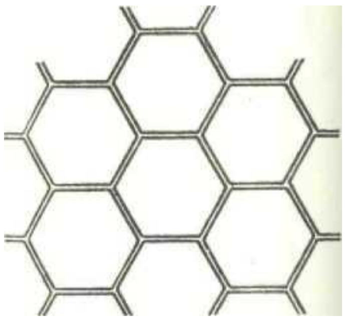
O terceiro (que corresponde ao prisma hexagonal) é o maior.

Conclusão:

O prisma mais económico é o prisma hexagonal, pois é aquele que apresenta, para o mesmo gasto de material, maior volume, isto é, maior capacidade.

Foi por esse motivo que as abelhas, para os seus alvéolos, adotaram a forma hexagonal.

Como são colocados, para maior economia de espaço, os alvéolos das abelhas. A parede de um alvéolo serve para outro alvéolo. Não há entre os alvéolos espaço perdido e a forma hexagonal é a mais econômica.



O problema das abelhas, porém, não está terminado.

Como fechar os alvéolos?

Já nesse ponto o problema torna-se mais delicado, pois só pode ser resolvido com os recursos da Trigonometria c do Cálculo Infinitesimal (teoria dos máximos e mínimos).

A fórmula adotada pela abelha geômetra foi a seguinte: o fundo de cada alvéolo é formado de três losangos iguais. Com essa forma rômbica, em vez de fundo raso (plano) as abelhas- economizam um alvéolo em cada cinquenta. Em milhões e milhões de alvéolos essa pequena economia de 1 cm 50 é incalculável.

Eis como as abelhas colocam os seus alvéolos hexagonais. Esses alvéolos, para maior economia de material, são fechados por três losangos iguais. O valor constante do ângulo agudo de wn losango de fechamento causou sério debate entre teólogos, naturalistas e matemáticos.

Sim, o sistema de fechamento com três losangos é o mais econômico. O físico René-Antoine Feichant de Reaumur (1683-1757) notou que, no losango de fechamento, o ângulo agudo era constante. Não variava. O fato intrigou Rcaumur. Mandou buscar alvéolos na Alemanha, na Suíça, na Inglaterra, no Canadá e até na Guiana — e todos apresentavam o losango de fechamento com o mesmo ângulo. O astrónomo francês Jean-Dominique Maraidi (1709-1788) mediu com maior precisão o tal ângulo agudo, c achou 70° 32' em todos os alvéolos. O ângulo obtuso seria o suplemento e media, portanto, 109° 28'.

A constância do ângulo (70° 32') em todos os alvéolos impressionou Reaumur. Algum motivo tinha a abelha para adotar aquele ângulo em todos os alvéolos.

Seria, ainda, a latejar no instinto do animal, a questão de economia de material?

E aquele ângulo seria o ângulo certo para o caso?

Resolveu Reaumur consultar o seu amigo e notável matemático Samuel Kònig, (1712-1757), alemão de nascimento, mas radicado na França.

O problema foi proposto ao eminente algebrista nos seguintes termos:

Ê dado um prisma hexagonal regular. Esse prisma é fechado em uma de suas extremidades, por três losangos iguais.

Pergunta-se: Qual deve ser o ângulo desse losango de medo que se obtenha, para o prisma, um volume máximo com a maior economia de material?

Convém dizer a verdade: König desconhecia as pesquisas feitas por seu amigo Reaumur, e ignorava os trabalhos de Maraldi. König jamais pensara que estaria destinado a calcular alvéolo de abelha.

É claro que Kõnig, o maior matemático alemão de seu tempo, rival do célebre Maupertius, resolveu o problema do ângulo u do losango e achou:

$$u = 70° \ 34'$$

E concluiu: "É esse o ângulo que deverá ser adotado para o prisma mais económico."

O resultado apresentado pelo prestigioso matemático assombrou o mundo científico da França.

Ângulo calculado pelo matemático: 70° 34'.

Ângulo calculado pelas abelhas: 70° 32'.

— As abelhas erravam. Mas o erro é mínimo — diziam alguns teólogos. Erravam na construção de seus alvéolos porque obra perfeita só Deus poderia fazer!

Sim, o erro no ângulo, de dois minutos, só poderá ser apreciado com aparelhos de precisão.

Os naturalistas afirmavam que o erro cometido pelas abelhas geômetras deveria resultar da natureza do material empregado. O matemático abordara a questão teórica, mas o pequenino inseto era obrigado a encarar o problema prático, problema da vida.

Alguns naturalistas (não matemáticos) entraram nos debates.

— O fato — diziam os naturalistas — é que as abelhas, apontadas como geniais, erram e o esclarecido König, com seus cálculos, descobriu o erro das geômetras irracionais!

Houve, porém, um fato impressionante que modificou inteiramente a face do problema das abelhas.

Um matemático inglês, Collin Mac-Laurin (1698-1746), quatro anos mais velho que Konig, informado do caso, resolveu entrar também na questão, isto é, abordar o problema das abelhas.

Retomou o problema, aplicou as fórmulas e resolveu-o com os recursos do Cálculo Diferencial. E achou que Konig

havia errado. O ângulo do losango, para o alvéolo mais econômico, deveria medir precisamente 70° 32'.

Era esse o ângulo que as abelhas adotavam!

A revelação de Mac-Laurin, publicada, e traduzida, causou novo escândalo no meio científico europeu. Novos debates surgiram entre os cientistas.

Kõnig, o respeitável matemático, nome consagrado pela Academia de Ciências, havia errado! A verdade estava com as abelhas.

Procedeu, porém, Mac-Laurin dentro de uma ética impecável. Declarou que seu colega Konig errara por ter utilizado em seus cálculos uma tábua de logarítimos que tinha um erro. Revelou Mac-Laurin qual era essa tábua e onde estava o erro, do qual resultara, para o ângulo do losango, uma pequena diferença de dois minutos.

Depois da revelação de Mac-Laurin reacenderam-se, com maior violência, os debates em torno do caso.

A Ciência vinha provar que as abelhas resolviam, na constr--ção de seus alvéolos, um problema de alta Matemática:

19) Calculavam o volume V do prisma em função do ângulo x do losango de fechamento (esse cálculo é complicadíssimo);

2?) Tomavam a derivada de V em relação a x (operação bastante trabalhosa);

3?) Igualavam a zero essa derivada e resolviam a equação trigonométrica resultante. Essa equação só podia ser resolvida com o auxílio de logaritmos.

Em relação ao índice da dificuldade desse problema podemos garantir o seguinte:

O curso de Matemática (da escola primária até o fim do científico) feito durante 11 anos não fornece a um jovem, bastante aplicado e inteligente, recursos suficientes para que êle possa compreender e resolver o problema das abelhas, isto é, o problema completo que as abelhas resolvem quando constroem os seus alo véolos.

A verdade é esta. Já disse o Padre Leonel Franca, S. J,: "A realidade não se destrói; os fatos não se suprimem."

Maeterlinck tinha razão. As abelhas resolvem um problema de alta Matemática. São geômctras e essa espantosa capacidade matemática das abelhas é um mistério para a Ciência, mistério que os sábios jamais poderão desvendar.

NOTA — Deseja o leitor jazer a idéia da pequenez de um ângulo de 2' (dois minutos)? Ê muito simples. Trace um segmento retilíneo com 1 metro de comprimento. Vamos chamar AB esse segmento. No extremo A levante uma perpendicular AC que tenha 1,16mm de comprimento (um milímetro e dezesseis centimilímetros). Una, a seguir, o ponto C ao extremo B. Obtemos, desse modo, um triângulo retângulo ABC. O ângulo agudo B, desse triângulo, mede 2' (aproximadamente).

indicamos, para o caso, uma solução que nos parece mais simples e mais imediata. Tome a primeira linha desta nota. Essa linha começa pela letra N e termina pela letra O. Una com dois segmentos retilíneos o ponto extremo da haste inicial da letra N, aos extremos da letra O no final da linha. Vai obter um ângulo agudo muito pequeno. Esse ângulo é de 1 grau (aproximadamente).

Pois esse ângulo vale 30 vezes o ângulo de 2 minutos, ângulo que as abelhas medem com absoluta precisão.

CURIOSIDADE

O ângulo notável

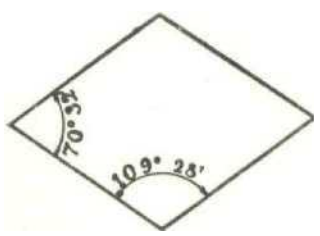


Figura do losango que aparece no alvéolo das abelhas.
O ângulo agudo de 70°32', que as abelhas adotaram, torna o alvéolo mais económico: máximo de volume para um mínimo de material.
O verdadeiro valor desse ângulo foi determinado pelo inglês Mac-Laurin.

20

O Número "Pi" Numa Trova Bem Rimada

PROFESSORES E ESTUDANTES RECORREM, COM FREQUÊNCIA, A CERTOS ARTIFÍCIOS MNEMÓNICOS QUANDO DESEJAM MEMORIZAR NÚMEROS ABSTRATOS, DATAS, TELEFONES ETC. O NÚMERO "Pi", TÃO CITADO EM MATEMÁTICA, TEM SIDO OBJETO DE ATENÇÃO ATÉ DOS POETAS QUE DESEJAM INVENTAR FRASES PARA A FIXAÇÃO, NA MEMÓRIA, DE ALGARISMOS EM SUCESSÃO.

O escritor e acadêmico Modesto de Abreu, despreocupado dos altos problemas de Filologia, escreveu uma trova e inventou uma frase, ambas curiosas, que servem para fixar, de forma mnemônica, os dez ou onze primeiros algarismos do número *pi*, sob forma decimal.

Quer o calculista conservar de memória os dez primeiros algarismos do famoso número *pi?* Pode recorrer à seguinte trova do Prof. Modesto de Abreu:

Pí *decorar e grafar*
Com dez casas? — Sim, é útil
É fácil memorizar
Um número assim tão dútil.

Se o estudante, porém, por simples curiosidade, deseja saber com maior precisão, isto é, com onze casas, a relação entre a circunferência e o diâmetro, é bastante recorrer à seguinte frase, também da autoria do Prof. Modesto de Abreu:

Sim, é útil e fácil memorizar um número grato aos sábios.

Conte as letras de cada palavra. O total de letras (de cada palavra) dará um algarismo do número *pi,*

A mesma coisa deverá fazer com as palavras sublinhadas na trova: Vejamos:

Sim	com três letras	(3)
é	com uma letra	(1)
útil	com quatro letras	(4)
e	com uma letra	(1)
fácil	com cinco letras	(5)
memorizar	com nove letras	(9)

E assim por diante.

A frase citada, como dissemos, dá para *pi* o valor de. . . . . . 3,1415926536.

Observe que depois da palavra *sim* encontramos uma vírgula, que também deve ser colocada no valor numérico de *pi* para assinalar a parte inteira.

Na vida corrente o valor de *pi,* para os cálculos geométricos, deve ser tomado com duas casas decimais. Ê 3,14 e basta.

O Prof. Modesto de Abreu foi o primeiro poeta a colocar o número pi numa trova.

NOTA — *Para a mnemónica do número* pi *a frase mais simples, em prosa, é a seguinte:*

Sou o medo e temor constante do menino vadio.

Basta contar as letras de cada palavra, respectivamente, para obtermos:

14 15 92 65.

Aí estão nove algarismos do número *pi.* Devemos colocar a vírgula decimal depois do 3 para separar a parte inteira da parte decimal, que fica com oito algarismos.

21

Círculos que se Tocam com Harmonia e Beleza

DURANTE O REINADO, NO EGITO, DE PTOLOMEU IV, O FILOPATOR, VIVEU EM ALEXANDRIA (222-205 A.C.) UM GEÔMETRA CHAMADO APOLÔNIO DE PÉRGAMO. FOI AUTOR DE UMA OBRA FAMOSA, EM OITO LIVROS, SOBRE AS SEÇÕES CÓNICAS, E ESTUDOU MUITOS PROBLEMAS ENTRE OS QUAIS O "PROBLEMA DOS CÍRCULOS TANGENTES" QUE É AQUI ENUNCIADO.

O "problema dos círculos tangentes", também chamado "problema de Apolônio", pode ser assim enunciado:

Dados três círculos quaisquer, traçar um quarto círculo, A, *que seja tangente aos três círculos dados.*

Para o caso geral, o problema de Apolônio admite oito soluções reais. Em certos casos, porém, pode tornar-se impossível.

Vários matemáticos interessaram-se pelo problema e tentaram analisar os casos particulares que éle poderia apresentar. O francês Viète (1540-1603), o maior vulto da Matemática no século XVI, que era geômetra e helenista, analisou com brilho a proposição apoloniana e sugeriu várias construções, Newton (1642-1727) procurou uma solução original. Além de Euler (1707-1783), de Simpson (1687-1768) e Lambert (1728-1777), podemos apontar a solução obtida por Gergonne(1771-1859), que foi aplicada a dezenas de casos particulares, sendo alguns bem curiosos.

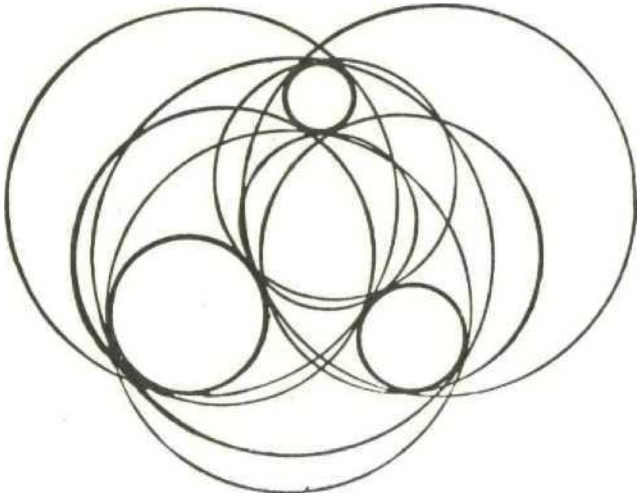


Figura *famosa na História da Matemática: as oito soluções do problema de Apolônio.*

Há, por exemplo, um caso cm que o problema é impossível. E isso ocorre quando o círculo *A* é interior ao círculo JB e o terceiro círculo é exterior aos dois primeiros. O círculo tangente aos três círculos seria imaginário.

Quando os três círculos, *A*, *B* e C, são distintos e tangentes a uma reta *S,* essa reta pode ser considerada como um círculo de raio infinito e esse *círculo S* é tangente aos três círculos dados.

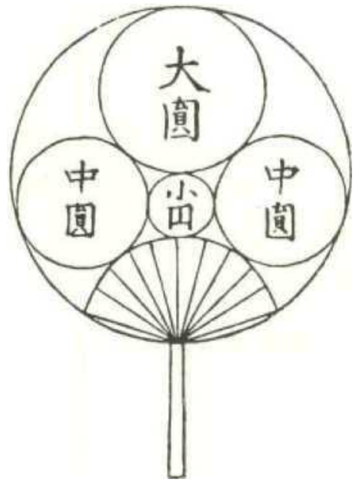
Quando os três círculos são tangentes, num certo ponto *M*, o problema admite uma infinidade de soluções. Qualquer círculo tangente a um dos círculos, no ponto *M*, é tangente, também, aos outros dois e resolve o problema.

O problema de Apolônio será resolvido, para o caso em que são dados dois círculos, *A* e *B,* e uma reta *N*, Essa reta *N* seria um terceiro círculo de raio infinito. Para resolver o problema basta traçar um círculo tangente aos dois círculos *(A* e B) c tangente, também, à reta *N.*

Quanta beleza podemos colher desse tangenciar harmonioso de círculos!

Dirá o leitor, inspirado por certo pessimismo, que as obras de arte que decorrem das fantasias de Apolônio são totalmente inúteis.

Curioso leque japonês com um desenho inspirado no problema de Apolônio. Cada um dos três círculos completos, do interior do círculo maior, é tangente a quatro círculos. O círculo maior é tangente a três círculos.



Sobre esse filosófico problema do utilitarismo das formas geométricas nos domínios da Arte, será interessante ouvir os judiciosos ensinamentos do Prof. Alceu de Amoroso Lima, transcritos de seu Jivro *Estética Literária:*

> *A inutilidade da obra de arte é um dos traços de sua beleza. Um dos traços característicos. Beleza não é apenas harmonia de traços, unidade na diversidade, claridade, perfeição, expressão. Beleza é quantidade, é esplendor, é autonomia, é valor em si, é plenitude. Ser belo é não servir para outra coisa senão para a alegria de ser visto e conhecido.*

* * *

CURIOSIDADE

Um erro em Matemática

Há definições que passam de um dicionário para outro, são aceitas por muitos autores, e ficam como que estereotipadas. Citemos, para servir de exemplo, a definição comumente adotada para o conceito de numeração. Que se deve entender por numeração? Ensinam muitos autores:

Numeração falada é a arte de exprimir os números por meio de palavras; a numeração escrita é a arte de representar os números por meio de sinais.

É admissível Qtie a Aritmética encerre, entre os seus capítulos fundamentais, duas artes? Terá a numeração falada os atributos de uma verdadeira arte? Que sentido terá a palavra arte nessas definições?

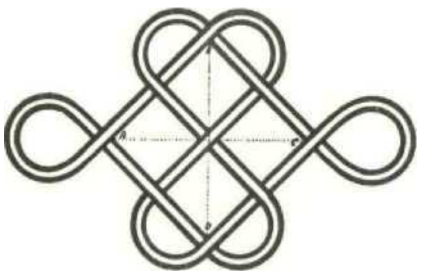
Para o famoso e erudito pregador português, Padre António Vieira (1608-1697), a Aritmética e a Geometria eram artes:

Nas outras artes, tudo é arte: na Música tudo se faz por compasso; na Arquitctura tudo se faz por régua; na Aritmé-tica tudo se faz por conta; na Geometria tudo se faz por medida.

Dentro da oratória eclesiástica, falando do púlpito, tudo seria permitido ao grande mestre da pregação evangélica. É bom acres-centar: o Padre António Vieira viveu no século XV11.

Impõe-se, no caso, dizer a verdade.

Essa ideia de considerar a numeração como uma arte é, hoje, apontada como erro crasso em Matemática.



22

O Milhão, Seu Retrato e Seu Prestígio

O POVO APRENDEU, DE MODO GERAL, A NÃO DAR A MENOR IMPORTÂNCIA AO MILHÃO. O MILHÃO TOR-NOU-SE UM NÚMERO BANAL E INEXPRESSIVO. É PRECISO, PORTANTO, QUE O POVO CONHEÇA O MILHÃO. E PARA CONHECER BEM O MILHÃO É NECES-SÁRIO RETRATÁ-LO. COMO FAZER O RETRATO DO MILHÃO? IDEIA CURIOSA DE UM NATURALISTA INGLÊS. POR FALTA DESSE RETRATO MUITA GENTE FAZ IDEIA FALSA DO MILHÃO.

Richard Wallas, naturalista, inglês, é autor de um plano que êle considera altamente educativo para o povo: Proporcionar aos curiosos o autêntico "retrato'' de um milhão, isto é, uma figura que fornecesse ao observador uma idéia exata c perfeita do *milhão.*

Eis a sugestão de Wallas: cm toda cidade escolheríamos um edifício público (um grande museu, uma biblioteca ou mesmo um teatro) c na parede principal desse edifício colocaríamos 100 quadros brancos, cada um dos quais conteria 10.000 pequenos discos negros.

Diante dessa parede, a uma distância de seis metros (no mí-nimo), seriam colocadas confortáveis poltronas onde os visitantes, comodamente sentados, poderiam observar, num só golpe de vista, os cem quadros, ou melhor, os cem "dez mil" discos negros.

Teriam, ali, os curiosos, diante de seus olhos, o perfeito re-trato, em preto e branco, do banalíssimo milhão. Em outras palavras, todos poderiam admirar o "Sr. Milhão cm tamanho natural".

A Física, a Astronomia, a Estatística, e até os Cálculos Orçamentados usam comumente não só o milhão, como milhares de milhares de milhões e, no entanto, há muita gente que não conhece o milhão c que, afinal, não faz a menor ideia dêsse número.

Um prestigioso banqueiro fala, com a maior naturalidade, cm um milhão de cruzeiros. Que seja, pois, êsse banqueiro convidado a ver o respeitabilíssimo milhão retratado para que êlc possa formar uma ideia mais justa de seus haveres, c não se preocupar tanto em restringir o salário de seus empregados.

Para acentuar mais a impressão c deslumbrar o observador mais otimista, teríamos o cuidado de destacar (num dos quadros centrais) cm côr azul, dentro de um círculo vermelho, 3.500 diseos.

È o número aproximado de estrelas visíveis, a olho nu, na semi-esfera celeste!

O observador ficaria surpreendido ao verificar que a multidão de estrelas visíveis é um conjunto insignificante e desprezível cm relação ao mar imenso de pontos que formam o retraio do respeitável milhão.

Por causa da falta dêsse retrato há muita gente que não faz a menor ideia do milhão. Contam os milhões sem conhecer o milhão.

Eis um exemplo de Augusto dos Anjos,[1] poeta paraibano:

Que resta das cabeças que pensaram?!
E afundando nos sonhos mais nefastos.
Ao pegar um milhão de miolos gastos,
Todos os meus cabelos se arrepiaram.

Entre os poemas de Adauto G. de Araújo é interessante destacar os seguintes versos:

A metrópole tem milhões de olhos
Faiscando desvairados pelas ruas.

O milhão perde, em geral, a sua significação numérica, deixa de ser um cardinal determinado, quando citado em linguagem

1. *Eu e Outras Poesias.*

literária. Sem cogitar da grandeza do milhão, escreveu a artista Gilda de Abreu em seu livro *Cigarra:*

Adeus minha querida, receba um milhão de abraços e beijos da mais feliz das mulheres.

Quanto tempo levará Gilda de Abreu para dar um milhão de beijos e abraços na sua querida amiga? Observa o calculista que dando um beijo e um abraço por segundo (dia e noite sem parar um instante), a brilhante romancista levaria, nessa agradável tarefa, 22 dias e 7 horas, aproximadamente!

É de surpreender a facilidade com que os poetas recorrem ao milhão.

Citemos um exemplo bastante curioso.

Em seu livro *Canções Poemas*[2] escreveu José Thadeu, poeta carioca, filiado à corrente modernista:

As noites passo sem dormir pensando
no meu, no teu, no nosso grande amor.
passo-as em claro, passo-as compondo
milhões de rimas em teu louvor!

Declara o poeta que passa noites, cm claro, compondo milhões de rimas em louvor de sua amada.

Admitamos que fossem, apenas, dois milhões de rimas (o poeta fala em *milhões* de rimas). Se o José Thadeu gastasse, apenas, um minuto para compor uma rima, teria que passar 9 anos, 9 meses e 18 dias em claro para compor aquele par de milhões de rimas. 9 anos 9 meses e 18 dias escrevendo, dia e noite, sem parar.

Em sentido indeterminado aparece, em linguagem literária, o ordinal milionésimo. Copiemos duas linhas de António Callado *Assunção de Salviano:*

Claro, sem dúvida. Acho tudo isso muito estranho — repetia Júlio pela milionésima vez. . .

Mário Lamenza, cm seu livro *Provérbios,* cita o seguinte adágio: "De grão em grão também se chega ao milhão."

2. Rio de Janeiro, 1949

Não gostava Machado de Assis, cm seus escritos, de recorrer ao milhão: Achava que o milhão era unia palavra feia. Para exprimir um número muito grande, empregava a forma milhares de milhares ou, ainda, milhares de milhares de milhares.

Vamos transcrever pequeno trecho do romance *Esaú e Jacó:*

> *Quem não viu aquilo não viu nada. Cascatas de ideias, de invenções, de concessões rolavam todos os dias, sonoras, e vistosas para se fazerem contos de réis, centenas de contos, milhares, milhares de milhares de milhares de contos de réis.*

Em relação ao milhão, ensina João Ribeiro, cm *Curiosidades Verbais,* obra de indiscutível valor pelos surpreendentes ensinamentos que encerra:

> *Milhão é aumentativo de criação moderna. Os portugueses prejeriam, outrora, dizer "um conto por milhão". Ainda hoje o "conto", especializado para moeda, equivale a "um milhão de réis". Em outro tempo, até o século XVIII, podia Manoel Bernardes escrever que a Biblioteca da Alexandria continha mais de um conto de livros.*

E havia, na Administração Portuguesa, a Casa dos Contos, que era o que é hoje o Tesouro, mais ou menos.

0 fato é que muita gente fala em milhão, imagina um milhão de coisas, sem pensar nessa imensidade que o milhão representa na sucessão infindável dos números. E o bilhão? Ora, do bilhão nem é bom falar. Do bilhão, até hoje, ninguém imaginou retrato algum. £ preciso não esquecer que o bilhão equivale a um milhão de milhões.

No Brasil e em outros países os grandes números são popularmente denominados:

milhão	=	1.000 X 1.000		10^6
bilhão	=	1.000 X 1.000.000		10^9
trilhão	=	1.000 X 1.000.000.000		10^{12}
quatrilhão	=	1.000 X 1.000.000.000.000		10^{15}

etc, seguindo-se a chamada regra dos

3N zeros = (N - l)lhão

Entretanto já foi normalizada internacionalmente a chamada regra dos

6N zeros = Nlhão

que é usada em toda a Europa e é aprovada legalmente no Brasil.

Segundo esta regra, o valor dos termos em causa é tal que:

milhão	—	1.000.000 X	1	=	10^6
bilhão	=	1.000.000 X	1.000.000	=	10^{12}
trilhão	=	1.000.000 X	1.000.000.000.000	=	10^{18}

e assim por diante.

Assim sendo, é recomendado que, em trabalhos técnicos e científicos, seja evitado o uso de palavras ambíguas, cujo sentido varia, dentro da língua portuguesa, conforme sejam empregadas no Brasil ou cm Portugal. Usar então o fator decimal 10^9 ou o prefixo "giga" (em lugar do "nosso" bilhão), o fator 10^{12} ou o prefixo "tera" (cm lugar do "nosso" trilhão), etc.

Asseguram vários historiadores que a palavra *milhão* é de origem italiana. Designou, a princípio, certa medida concreta para o ouro, mas o matemático italiano Lucas Pacioli (1445-1514) teve a idéia de empregá-la como um simples número natural equivalente a mil vezes o número mil.

Sabemos, porém, que as palavras bilhão e trilhão, jamais citadas por Pacioli, são bem antigas em Matemática.

Encontra-se na Biblioteca Nacional de Paris um manuscrito intitulado *La Tryparty en Ia Science des Nombres,* de 1484, onde se acham as palavras *millions, tryllions. . . novyllions* etc. Esse manuscrito só foi publicado em 1880 por B, Concompagni; o seu autor é Nicolas Chuquet. Na mesma Biblioteca de Paris, há um exemplar de uma *Aritmética,* de Estienne de Ia Roche dict Villefranche (sic) impressa em Lion em 1520, onde se encontram as palavras *million, billion, trillion, quadrillion, sixlion, septilion, octillion, nonillion.*

Segundo Antenor Nascentes *(Dicionário Etimológico)* o milhão passou do italiano para o francês *million,* e do francês passou para o nosso idioma.

Noiva em testamento

O célebre e genial matemático norueguês Niels-Henrik Abel (1802-1829) passou os últimos meses de sua vida em Frolancl, na residência de rica família inglesa. Sua noiva, Crelly Kemp, exercia, nessa casa, as funções de governante.

Abatido pela tuberculose, sentiu Abel que .pouco tempo lhe restava de vida. Escreveu, então, a seu amigo Franz Keilhan e pediu-lhe que casasse com sua noiva logo que êle fechasse os olhos para o mundo.

Ela não é bonita — escreveu Abel ao amigo — seus cabelos são avermelhados e o seu rosto é semeado de sardas. Asseguro, porém, que é uma mulher admirável.

Keilhan atendeu ao pedido de Abel e depois da morte dêste casou-se com a jovem Creliy Kemp. Casou-se com a noiva deixada em testamento e foi muito feliz nesse casamento.

O círculo e a igualdade

O círculo, que é o símbolo da Eternidade, apresentou-se muitas vezes como o símbolo da igualdade.

Os antigos, para não demonstrarem preferência a alguém em detrimento de outrem, quando relacionavam um grupo de amigos escreviam os nomes destes em círculo, de sorte que, não lhes atribuindo uma ordem fixa, nenhum podia rejubilar-se por ser o primeiro, melindrar-se por ser o segundo ou queixar-se por ser o último em sua estima.

Ficavam todos satisfeitos e a honra igualmente partilhada.

A instituição dos cavaleiros da Távola Redonda era fundada sobre o princípio de igualdade e a mesa, nesse caso, era um símbolo.

Nos congressos a mesa destinada aos embaixadores é ordinariamente redonda, a fim de evitar, tanto quanto possível, certas distinções que poderiam ferir suscetibilidades.

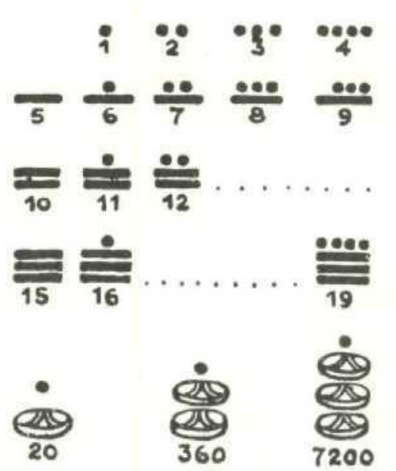
23

A Estranha Numeração dos Maias

A RAÇA MAIA, QUE FLORESCEU, OUTRORA, NA GUATEMALA, ERA DIVIDIDA EM PEQUENOS REINOS, DOS QUAIS O MAIS IMPORTANTE ERA AQUELE QUE TINHA POR CAPITAL DE MAYAPÁN. É INTERESSANTE OBSERVAR OS NUMERAIS QUE ERAM ADOTADOS PELOS CALCULISTAS, MERCADORES E SÁBIOS DE MAYAPÁN.

Eis os algarismos e sinais numéricos usados pelos maias no período Pré-Colombiano.

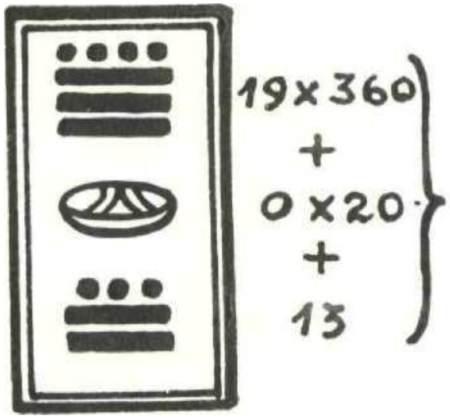
Adotavam os maias um sistema de numeração no qual os números, até quatro, eram representados, respectivamente, por um, dois, três ou quatro círculos negros; o cinco era representado por um pequeno traço horizontal; o número vinte, por uma espécie de prato com um disco preto em cima. Havia sinais especiais para 360 (dois pratos com um disco), para 7.200 (três pratos com um disco). Os números eram escritos cm colunas: 1.°, os múltiplos de 7.200; a seguir, embaixo, os múltiplos de 360; sob estes, os múltiplos de vinte e finalmente, embaixo, as unidades.



Aqui estão os algarismos da numeração adotada pelos maias.

Para indicar 100 o calculista de Mayapán pintava um disco encimado por um traço. O disco indicava 20 c o traço 5. O produto de 5 X 20 daria 100. O número 1.440, ou 4 X 360, seria, representado por dois discos (360) encimados por 4 pontos.

Vemos, dentro do quadro retangular, o número 6.853 escrito de acordo com a numeração dos maias. O número é decomposto em três parcelas: 13 unidades (embaixo), um múltiplo de 20 (que no caso é zero) e um múltiplo de 360 que é 19 vezes 360. O número 748, por exemplo, seria representado por três algarismos: um representando 8, outro 20 e um terceiro 2 vezes 360.



6 8 5 3

Na representação dos números adotavam os maias o sistema multiplicativo.

A numeração desses indígenas era, inegavelmente, muito engenhosa mas a divisão de dois números inteiros era problema que só os grandes sábios podiam resolver. E faziam a divisão com o auxílio da subtração.

Convém observar que o número 360 aparece, com destaque, na numeração dos maias por uma razão muito simples: a numeração estava, de certo modo, relacionada com o calendário (contagem do tempo) e de acordo com o Calendário Mayapán o ano tinha 360 dias.

Essa numeração era, aliás, muito curiosa, pois a base adotada não era 10, mas sim o número 20.

Tinham, pois, denominações particulares os números que designavam as potências de 20, a saber:

1	*hun*
20	*kal*
400	*bak*
8.000	*pie*
160.000	*calab*
3.200.000	*kinchel*
64.000.000	*alce*

O *alce* (sexta potência da base 20) é um número que revela o grau de cultura dos maias que durante 20 séculos (aproximadamente) permaneceram na América Central.

CURIOSIDADES

Porcentagem e poesia

O poeta mineiro Carlos Drutnmond de Andrade gosta de exprimir, em versos, certas imagens ou comparações por meio de porcentagens.

Vamos apontar, apenas, três exemplos, nesse brilhante modernista que o Brasil tanto admira:

Na poesia Itabira ao exaltar a riqueza de sua terra:

Alguns anos vivi em Itabira.
Principalmente nasci em Itabira,
Por isso sou triste orgulhoso, de ferro.
Noventa por cento de ferro nas calçadas
Oitenta por cento de ferro nas almas.

Em outro poema encontramos:

À noite do morro
descem vozes que criam o terror
(terror urbano, cinquenta por cento de cinema).

Einstein e a Música

Albert Einstein (1879-1955), o grande geômetra, acabara de ouvir a Sinfonia Espanhola de Lalo executada por Iascha Heifeiz, quando um amigo lhe apresentou numa jôlha cheia de cálculos a resolução de um belíssimo problema.

— Depois da Música a Matemática! — comentou alguém.

Observou Einstein:

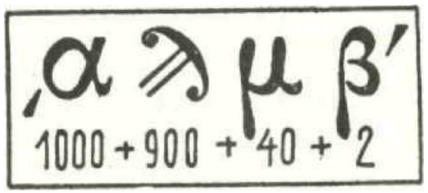
— A Música, de tão perfeita, é pura como a Matemática! A Matemática, de tão simples, é deslumbrante como a Música!

E concluiu:

— A Música parece uma equação; a equação bem formulada é cheia de harmonia e sonoridade.

Nota: A Sinfonia Espanhola de Eduardo Lalo (1823-1892) foi dedicada a Pablo Sarasate. Jacha Heifetz, violinista russo de fama universal, nasceu em 1901. É de origem judaica.

Numeração grega



A figura nos mostra como um calculista grego, três séculos a.C, escrevia o número 1942.
A letra alfa, à esquerda, precedida de um acento (embaixo), indicava 1.000. Seguia-se um sinal especial — o *sampi* — para indicar 900; a letra *mu* indicava quarenta e o *beta* final, dois. O apóstrofo à direita, no alto, indica que se trata de número e não de letra.

24

Homens e Mulheres Numa Festa Mal Organizada

SÃO NUMEROSOS OS PROBLEMAS NUMÉRICOS QUE REPONTAM, A CADA MOMENTO, EM TODOS OS RAMOS DA MATEMÁTICA RECREATIVA. ESSES PROBLEMAS PODERÃO DESEMPENHAR, NO ENSINO DA MATEMÁTICA, PAPEL DE ALTO RELEVO, POIS IRÃO DESPERTAR NOS ESTUDANTES CERTO INTERESSE PELAS TRANSFORMAÇÕES ALGÉBRICAS SIMPLES E ELEMENTARES. É CLARO QUE O PROFESSOR'DE MATEMÁTICA, SENDO UM BOM DIDATA, DEVE CONHECER ESSES PROBLEMAS. CONHECÊ-LOS E APLICÁ-LOS COMO FATOR DE MOTIVAÇÃO.

O homem da gravata preta ergueu-se, fechou o livro que estava lendo, aproximou-se do cavalheiro gordo e disse-lhe em voz baixa:

— Tive a impressão, professor, de que a festa literária de hoje não foi bem organizada. Foi péssima. Posso garantir: foi péssima. No princípio, o número de mulheres era o dobro do número de homens; terminada a conferência do Dr. Segadas Antunes, que foi aliás chatíssima, enervante, retiraram-se oito casais. Veja bem: Oito casais.

— E então? Que ocorreu?

Respondeu o homem da gravata preta, com ar misterioso:

— A situação, a meu ver, piorou. E piorou muito. O número de mulheres tornou-se igual a quatro vêzcs o número de homens. E não era isso que o nosso presidente queria. A sua ideia era obter maioria masculina.

Poderá você, meu amigo, depois dessa pequena e indiscreta conversa, entre os dois amigos, calcular com precisão matemática quantos homens e quantas mulheres havia na tal reunião mal organizada?

Solução:

O problema é facílimo. Pode ser resolvido, em dois tempos, por meio de tentativas.

O elegante, porém, para o bom matemático, será resolvê-lo com os recursos prodigiosos da Álgebra, recorrendo a um sistema de duas equações com duas incógnitas. Um problema, com duas equações, sempre impressiona melhor o leitor.

Vejamos:

Chamemos x o número de mulheres; y o número de homens.

Ao ser iniciada a animadíssima reunião literária a situação numérica era a seguinte:

$$x = 2y \qquad \text{(A)}$$

É essa a primeira equação do problema e exprime que o número de mulheres (x) era exatamente igual ao dobro do número de homens (y). Terminada a conferência (que o homem da gravata preta considerou chatíssima), retiraram-se 8 casais, isto é, 8 mulheres c 8 homens. Ficaram, pois, na sala:

$$x - 8 \text{ mulheres}; \quad y - 8 \text{ homens}.$$

E como o número de mulheres, nessa ocasião, tornou-se quatro vêzcs maior do que o número de homens, podemos escrever:

$$x - 8 = 4(y - 8). \qquad \text{(B)}$$

É essa a segunda equação do problema.

Resolvido o sistema, formado pelas duas equações *(A)* e *(B)*, achamos:

$$x = 24 \qquad y = 12.$$

Estaria o Dr. Segadas Antunes, o ilustre conferencista, incluído nessa conta?

Essa dúvida até hoje não foi perfeitamente esclarecida. E isso, em parte, deixa o problema incompleto e até confuso.

É pena!

25

Curiosidades Numéricas que Assombram os Calculistas

A PACIÊNCIA DOS MATEMÁTICOS, COM SUAS QUISAS INTERMINÁVEIS, É UMA COISA QUE SURPREENDE. OS CULTORES DA ARITMÉTICA FAZEM CÁLCULOS FABULOSOS, OPERAM COM FATÔRES ASTRONÓMICOS QUE EXIGEM LONGOS ANOS DE PERSEVERANTES TRABALHOS. E TUDO ISSO SÓ PARA INVENTAR TRANSFORMAÇÕES CURIOSAS NO CAMPO NUMÉRICO E AMPLIAR OS HORIZONTES DAS RECREAÇÕES MATEMÁTICAS.

Tomo da pena, meu amigo, e escrevo um número de oito algarismos

14.379.264.

Que terá esse número de singular? Parece um número como outro qualquer, apanhado ao acaso, e perdido na sucessão natural dos números inteiros.

Pois quem pensa dessa forma, tão pessimista, comete grave equívoco. Esse número, com seus quatorze milhões e tanto, está com o seu retrato cm corpo inteiro, na imensa galeria dos chamados *números singulares.*

Número singular?

Sim, e muito singular. Quer a prova? Vamos escrevê-lo assim:

14 3792 64

destacando bem o número formado pelos quatro algarismos do meio. Esses quatro algarismos, como se está vendo, formam o número 3.792 que é precisamente a raiz quadrada do número completo. Podemos, portanto, escrever:

$$3.792^2 = 14.379.264.$$

Veja, portanto, que coisa singular. A raiz quadrada, com seus quatro algarismos, salta de dentro do próprio número, sem cálculos, sem nada. Dos oito algarismos do tal número, quatro, em conjunto, formam a sua raiz quadrada.

Entre todos os números de oito algarismos só existe outro com essa mesma propriedade.

Esse segundo número singular, também identificado pelos pesquisadores, é o número

57.760.000,

terminado em quatro zeros, cuja raiz quadrada é 7.600, O cálculo está certo c o matemático pode escrever;

$$7.600^2 = 57.760.000.$$

É preciso ter muita paciência para descobrir singularidades numéricas que assombram os calculistas, mas que são destituídas da menor utilidade prática. Só valem como recreações matemáticas. Sempre servem, afinal, para alguma coisa.

CURIOSIDADE

Mil novecentos e quarenta e sete

A figura ao lado nos mostra o número 1947 escrito ao longo dos séculos. Na 1.ª linha, os algarismos são indianos do século III; na 2.ª linha, os algarismos (latinos) são do século IX; a seguir, do século XI; na 4.ª linha, são algarismos (latinos) do século XV. Na última linha, algarismos árabes atuais.

26

O Problema dos Anjos de Efraim

O PROFETA OSÉIAS, AO ATRAVESSAR UM RIO, VÊ, DE REPENTE, CRUZANDO O CÉU, PEQUENA COORTE DE ANJOS. COMO ERAM ESSES ANJOS E PARA ONDE IAM? DA VISÃO DE OSÉIAS, LIDA PELO HOMEM DA GRAVATA RISCADINHA, RESULTOU CURIOSO PROBLEMA DIOFANTINO COM SETE SOLUÇÕES INTEIRAS E POSITIVAS.

O homem da gravata riscadinha, e riscadinha de vermelho, que se achava a meu lado, parecia inquieto e nervoso. Bastante agitado. Afinal, ao abrir o terceiro livro, exclamou com entusiasmo:

— Aqui está, meu amigo! Aqui está! Vejo aqui o impressionante trecho de Oséias, um dos profetas menores, filho de Beeri, pastor de cabras. Alguns exegetas pretendem que se trata de uma citação totalmente apócrifa, ditada pela má-fé de um agnóstico. Eu, porém, tenho a impressão de que a profecia é legítima, é autêntica. Se me permitem, vou ler.

— Ouviremos com o maior prazer — acudiu prontamente, muito amável, o desembargador, Dr. Cristovam Breiner, que se dizia católico, grande conhecedor dos altos mistérios da Bíblia.

Depois de ajeitar melhor os óculos e apoiar o cotovelo esquerdo na mesa, o homem da gravata riscadinha (e riscadinha de vermelho), com voz pausada e meio rouca, leu o seguinte:

Ouvi isto ó sacerdote, e tu ó casa de Israel, ouve com a maior atenção. Ao atravessar o rio, na hora de apagar o Sol, vi, no céu, um amontoado de anjos que voavam no rumo das terras de Efraim. Havia anjos de cinco asas, anjos de três *asas e anjos de duas asas. Os anjos de cinco asas eram azuis; os de três asas, brancos, e os de duas asas, carmesins. Eram ao todo trinta e seis asas. Surpreendido com aquela estranha visão exclamei: — Acautela-te Efraim. . .*

— Um momento — interrompeu o advogado Dr. Guilherme Gomes de Mattos. — O profeta Oséias, nessa passagem que o senhor acaba de citar, não revelou o número de anjos. Disse, apenas que havia um total de trinta e seis asas. E os anjos? Quantos eram?

Um cavalheiro gordo, risonho, de roupa côr de vinho, que se achava no fundo da sala, perto da porta, ouvindo tudo muito atento, interferiu no caso. E disse:

— Penso, Dr. Guilherme, que o profeta Oséias, sempre violento nas suas ameaças contra Israel, não precisava revelar o número de anjos que voavam para terras de Efraim. Qualquer matemático, pelas indicações contidas na profecia, poderá calcular o número certo dos enviados de Deus.

— Calcular como? — interferiu mais uma vez o desembargador Breiner. — Que cálculo seria esse?

— É muito simples — revidou o homem da roupa de côr de vinho. — Simplicidade completa. O profeta afirmou ter visto anjos de cinco asas, anjos de três asas e, finalmente, anjos de duas asas. Designando por A o número de anjos de cinco asas (os azuis), por B o número de anjos de três asas (os brancos), e por C o número de anjos de duas asas (os carmesins), temos a seguinte equação:

$$5A + 3B + 2C = 36$$

E depois de pequena pausa, prosseguiu:

— Trata-se de uma equação de 1.° grau com três incógnitas, logo o problema é indeterminado, isto é, tem uma infinidade de soluções. Mas como as incógnitas A, B e C devem ser números inteiros c positivos (não se compreende anjo fracionário e, muito menos, anjo negativo), o número de soluções no caso é limitado.

Fêz-se um silêncio na sala. O cavalheiro da roupa de côr de vinho disse ainda:

— Concluímos, portanto, inicialmente, que A, B e C são números inteiros e positivos e o menor valor, de qualquer um desses números, é 2, pois o profeta falou em anjos (no plural) de cinco asas, anjos de três asas e anjos de duas asas. A solução imediata do problema seria:

4 anjos de cinco asas	20 asas
4 anjos de três asas	12 asas
2 anjos de duas asas	4 asas

— Mas, além dessa solução (4, 4, 2), com dez anjos, apresenta o problema mais seis soluções: (3, 5, 3), (2, 6, 4), (4, 2, 5), (3, 3, 6), (2, 4, 7) e (2, 2, 10).

E o calculista rematou:

— A solução que mais convém ao problema é a última por mim indicada, na qual os anjos são cm número de quatorze. E são: 2, 2 e 10.

— Interessante — comentou o Dr, Gomes de Mattos. — Muito interessante! De uma simples profecia, talvez apócrifa, que acreditam ter sido ditada por um dos profetas menores, vai o matemático tirar um problema e resolver uma equação.

O homem da gravata riscadinha (e riscadinha de vermelho), fechou o livro c não concluiu a leitura. Nada de saltar da Bíblia para a Matemática onde vivem os perigosos algebristas que inventam cálculos e complicações.

* * *

CURIOSIDADES

O peso de uma distância

A luz percorre, como sabemos, 300.000 quilómetros por segundo. (E num segundo dá sete vezes e meia a volta à Terra.)

A distância percorrida pela luz durante um ano denomina-se ano-luz.

Para que se possa ter ideia da grandeza representada pelo ano-luz, façamos a seguinte comparação:

Um metro de fio (linha comum número 40, de máquina) pesa 403 miligramas.

Um fio que tivesse um ano-luz de extensão teria o peso de 3.811.251.600 toneladas.

O transporte desse fio só poderia ser feito num trem que tivesse 190.512.000 carros, transportando cada carro 20 toneladas de fio!

Os carros desse trem, colocados em fila, formariam uma composição com um comprimento aproximadamente igual ao dobro da distância da Terra à Lua.

Temos, assim, o peso de uma distância, ou melhor, uma distância em peso.

Nota: A velocidade da luz, no vácuo, é de 299.776 quilômetros por segundo e é considerada pelos cientistas, como uma constante universal.

* * *

Curva vadia c delirante

Eis um tipo de curva que os geômetras não sabem definir com precisão.

A curva vadia e delirante aparece, porém, no livro Correspondência de Fradiquc Mendes, de Eça de Queiroz.

Esse grande romancista português escreveu:

> Apesar de trinta séculos de Geometria me afirmarem que a "linha reta é a mais curta distância entre dois pontos", se eu achasse que, para subir da porta do Hotel Universal à porta da Casa Havanesa, me saía mais direto e breve rodear pelo bairro de S. Martinho e pelos altos da Graça, declararia logo à secular Geometria — que "a distância mais curta entre dois pontos é uma curva vadia e delirante.

27

A Unidade Caçula: O Micrômetro

SURGE UMA NOVA UNIDADE NO SISTEMA MÉTRICO, ESSA UNIDADE "CAÇULA" RECEBEU O NOME DE MICRÔMETRO. O "MICRÔMETRO" PARECE MUITO PEQUENO, MAS DIANTE DE OUTRA UNIDADE, CHAMADA "BARN", TORNA-SE UMA MEDIDA QUASE GIGANTESCA. COMO PODEM OS CIENTISTAS CRIAR UNIDADES TÃO PEQUENAS? TODAS AS INDICAÇÕES QUE AQUI FIGURAM, EM RELAÇÃO AO MICRÔMETRO, FORAM COLHIDAS NO "BOLETIM INFORMATIVO DO INSTITUTO NACIONAL DE PESOS E MEDIDAS".

De acordo com a resolução n.° 7, da 13.ª Conferência Geral de Pesos e Medidas (Paris, 1968), a antiga unidade *microm* foi abolida e uma nova unidade, para maior tormento dos estudantes, surgiu em nosso secular Sistema Métrico.

Essa nova unidade, criada pelos técnicos, recebeu o nome bastante expressivo de *micrômetro.*

Que é *micrômetro?* Como se define essa unidade, que é a caçula de nosso Sistema?

A definição rigorosa, formulada com absoluta precisão pelo físico teórico, é perfeita c assegura a universalidade dessa nova medida. Tem, porém, um pequeno defeito. É totalmente incompreensível para o leigo e não dá a menor idéia do *micrômetro.*

Vamos transcrever a tal definição do físico teórico, a título de curiosidade, pois o leitor é sempre exigente no campo da Ciência Pura e precisa conhecer com segurança matemática o novo *micrômetro.*

— Que é o *micrômetro?*

— Nada mais simples — responde o físico, depois de consultar a sua carteirinha de notas. — Nada mais simples.

E diz martelando as palavras e amontoando dados numéricos com termos precisos que apavoram os incautos:

> *Denomina-se micrômetro a uma grandeza linear (unidimensional) equivalente a 1,65076373 do comprimento da onda, no vácuo, da radiação alaranjada correspondente à transição entre os níveis 2 p10 e 5d5 do átomo do criptônio 86.*

Compreendeu?

Para o físico essa definição é de uma clareza de água cristalina e de uma simplicidade criptônicamente comovedora.

A coisa parece-nos, entretanto, bastante obscura e complicada.

Nem vale a pena reler. Que adiantaria reler e tresler? Ficaria tudo na mesma.

Vamos tentar outra definição sem ondas alaranjadas, sem o menor traço do misterioso criptônio 86 e inteiramente fora do vácuo.

A nossa definição, cm poucas palavras, seria a seguinte:

Chama-se micrômetro ao milésimo do milímetro.

Toma-se um milímetro. Divide-se esse insignificante milímetro em mil partes iguais.

Cada uma dessas partes será, precisamente, o nosso minúsculo *micrômetro.*

Em outras palavras poderíamos dizer, talvez, de uma forma mais sucinta:

O micrômetro é a milionésima parte do metro.

E escrevemos para impressionar o leitor desprevenido:

1 micrômetro = 0,000.001 do metro.

Do ponto de vista aritmético poderíamos formular a proporção:

> *O micrômetro está para o milímetro, assim como o milímetro está para o metro.*

E agora que estamos livres da tal radiação alaranjada, vamos dar ao leitor curioso uma ideia da excessiva e surpreendente pequenez do *micrômetro.* É, realmente, de impressionar.

Um fio de aranha, que se torna por vezes invisível, tem aproximadamente 5 micrômetros de espessura. O físico não faz por menos: cinco *micrômetros.* Um fio de cabelo humano mede, em geral, 60 *micrômetros* de diâmetro. Uma lâmina de navalha parece muito fina. Mas a navalha mais afiada, tão exaltada pela propaganda, tem 100 *micrômetros* de espessura na sua aresta cortante.

A pequenez do micrômetro não impressiona o físico. E não o impressiona de forma alguma. E a razão é simples.

Para exprimir as seções, que se apresentam nas transmutações e depressões nucleares, foi criada uma unidade de superfície denominada *barn.*

Que é o *barn?*

O *barn é* 10^{-24} do centímetro quadrado.

Podemos exprimir o *barn* tomando como unidade o centímetro quadrado:

$$0{,}000.000.000.000.000.000.000.001 \ \text{cm}^2$$

Como comparar o *barn,* que é uma área, com o micrômetro, que é unidade de comprimento?

Será muito fácil.

Imaginemos um círculo *S* cujo raio fosse precisamente igual a 1 micrômetro. Sabemos que cinco desses círculos, colocados um ao lado do outro, darão a espessura de um fio de aranha.

Pois bem. Dentro do tal círculo *S,* de raio micrométrico, caberão nada menos de 2.000 milhões de círculos de 1 *barn* da área.

Convém atentar nesse número fabuloso:

Dois mil milhões de barns! Para formar a área da ponta de um alfinete seriam necessários mais de 400.000 milhões de barns!

Voltemos, porém, ao estudo do micrômeiro.

Antes de 1968, o micrômetro era denominado micron e formava o plural erudito micra. Dizia-se: um microm, dois micra, três micra etc.

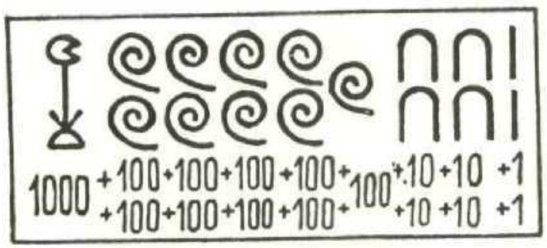
E como se indica, no cálculo, abreviadamente, o micrômetro?

Escreve-se a letra grega μ (mu), que corresponde ao nosso M, seguida de um m minúsculo.

O micrômetro ingressou na Ciência com todas as honras de praxe, e certamente, caminhará muitas léguas pelos campos da prática e da técnica, sem dar a menor importância ao barn que muitos apontam como o "primo-irmão" do nada.

CURIOSIDADE

Numeração egípcia



Eis como um calculista egípcio dois mil anos a.C. escrevia o número 1942.
Para escrever esse número empregava nada menos de 14 algarismos.
Na numeração escrita adotavam os egípcios o sistema aditivo e, assim, a grafia dos números não podia ser abreviada.

28

A Pirâmide Humana de Newton

A OBRA DE ISAAC NEWTON (1642-1727) FOI ESMIUÇADA DE CEM MIL MANEIRAS PELOS SEUS BIÓGRAFOS. TUDO FOI PESQUISADO, VISTO E REVISTO, AQUI APRESENTAMOS AOS LEITORES, COMO SIMPLES CURIOSIDADE, ALGUNS COMENTÁRIOS SOBRE UMA FRASE QUE É ATRIBUÍDA AO IMORTAL GEÔMETRA E FILÓSOFO INGLÊS. VEJAMOS EM QUE CONSISTE A "PIRÂMIDE HUMANA" DE NEWTON.

Sendo consultado por seu dileto amigo Edmund Halley, (1656-1742), o astrónomo, sobre as notáveis descobertas por êle realizadas, respondeu Newton, revelando, como sempre, o traço marcante de sua incomensurável modéstia:

Se eu consegui ver mais longe do
que os outros foi porque subi sobre
ombros de gigantes.

A forma mais corrente dessa frase, que ficou famosa na *História da Matemática, é* a seguinte:

If I have seen farther than others
it is because I have stood on
the shouldes of gigants.

Ao espírito do curioso repontam logo duas perguntas que são, aliás, bem naturais:

Como pôde Newton ver mais longe do que os outros. Nessa pirâmide, *de Anderson, aparecem figuras bem curiosas da História da Matemática.*

— Quem teria servido de pedestal para a maior glória do imortal criador do Cálculo Diferencial? Quais foram os *gigantes* que permitiram a Newton ver "mais longe do que os outros?"

A estranha "pirâmide" humana que vemos na caricatura foi imaginada pelo matemático americano Prof. Raymond W. Anderson e incluída em seu livro *Romping Throug Mathematics* (pág. 134).

Vemos que o autor do incrível Binômio, de binóculo em punho, tem o pé direito sobre o ombro esquerdo de Descartes (1596-1650) e o pé esquerdo bem firme sobre o ombro direito de John Neper (1550-1617).

O primeiro foi o criador da Geometria Analítica e o segundo teve a glória de inventar os logaritmos. Está, assim, Newton apoiado em dois *gigantes* da Análise Matemática.

Descartes e Neper, este com trajes escoceses, pisam tranquilos sobre os ombros de três geômetras orientais: al-Karismi (persa, século XII) que imaginou o sistema de numeração indo-arábica, Ornar Khayyamm (persa, 1040-1112) que ampliou o campo algébrico e um matemático anônimo (árabe ou hindu) que teve a ideia genial de criar o zero. Anderson dá a esse matemático a denominação de *Mr. Zero.*

Os três orientais da pirâmide newtoniana estão amparados por dois gregos de fama: Pitágoras, o filósofo do Número (IV século a.C), e Euclides, o criador da Axiomática (III século a.C).

Abaixo dos gregos, com os braços estendidos, está o geômetra egípcio (talvez um Ahmés, do *Papiro Rhind)* que enunciou as primeiras proposições geométricas e calculou áreas e volumes; na base da coluna colocou Anderson o matemático caldeu que construiu as bases do cálculo aritmético e criou o sistema sexagésima! de numeração.

Falta alguém nessa "pirâmide"?

Sim, na opinião do Prof. Cristovam dos Santos, matemático mineiro, dois geômetras e um astrónomo deveriam ser incluídos entre os *gigantes:* Arquimedes de Siracusa, Tales de Mileto e o alemão Johannes Kepler.

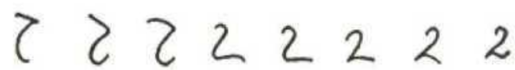
E por que esquecer o matemático anônimo que inventou o ponto geométrico?

Todos reconhecem e proclamam a importância do conceito de ponto entre noções básicas da Geometria. E tanto assim, que Horácio Lamb, físico e matemático inglês, propôs que se erguesse um monumento ao inventor *desconhecido* do ponto geométrico. Essa glorificação seria justa (assegurava Lamb), porque o primeiro homem a idealizar o ponto lançou os fundamentos do prodigioso edifício da abstração matemática.[1]

Sem o amparo do *ponto* Newton não teria dado um passo no ilimitado roteiro da Ciência.

CURIOSIDADES

O algarismo 2



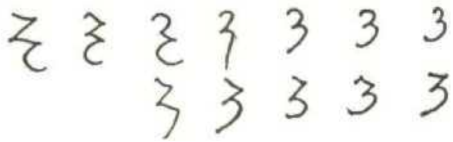
Não se surpreenda, meu amigo, ao conhecer a evolução do algarismo dois, ao longo dos séculos, desde o ano 950 (século X), em que êle apareceu, até o ano de 1706 (século XVIII), em que êle tomou a forma que tem hoje,

A princípio o dois era um arco de circunferência com um tracinho em cima; passou, depois, a ter a forma de um anzol; o anzol, no fim de meio século, virou uma espécie de L maiúsculo mal traçado.

E desse L é que surgiu o 2 atual.

1. Cf. E. T. BeU, Los Grandes Matemáticos, Buenos Aires, 1948.

O algarismo 3



Mostra-nos a figura as diferentes formas atribuídas ao algarismo 3, pelos calculistas, desde o ano 950 (século X) até o ano de 1706 (século XVIII).

O 3 era a princípio uma espécie de rabisco complicado, meio em ziguezague, com um laço na ponta. Os escribas foram pouco a pouco modificando o 3 até fixá-lo na forma que tem atualmente.

* * *

O algarismo 4

Mostra-nos a figura as formas curiosas atribuídas, pelos calculistas, ao algarismo 4 desde o ano 950 (século X) até o ano 1706 (século XVlll), em queête assumiu a sua forma definitiva.

O algarismo 4, que era a princípio um laço complicado, abandonou as curvas e passou a um traçado retilíneo. Mas no ano de 1350 ainda havia autores que, em seus escritos, adotavam para o 4 a forma de um 1 minúsculo mal traçado.

A metamorfose do quatro durou seis séculos.

* * *

Pitágoras e os números

Admirei, muitas vezes, o sistema místico de Pitágoras e a magia secreta dos números (Sir Thomas Browne, Sigma, I, 293.)

29

A Curva Perfeita do Laço de Fita

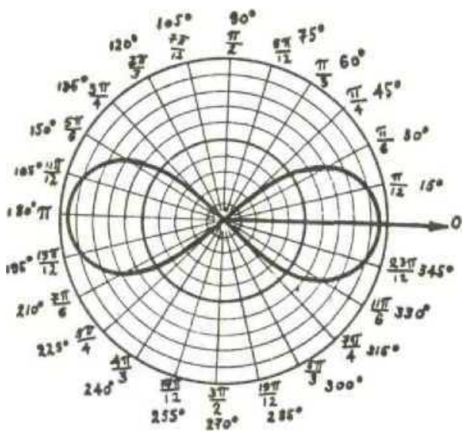
O ESTUDO DAS CURVAS É UM DOS CAPÍTULOS MAIS INTERESSANTES DA GEOMETRIA. MILHARES DE LIVROS JÁ FORAM ESCRITOS SOBRE CURVAS MATEMÁTICAS E TODOS OS DIAS OS PESQUISADORES ENRIQUECEM A CIÊNCIA COM NOVAS E INTERESSANTES DESCOBERTAS. VAMOS MOSTRAR, SOB UMA FEIÇÃO BEM ELEMENTAR, UMA CURVA ALTAMENTE CITADA: "A CURVA DO LAÇO DE FITA".

Vamos conhecer a famosa curva de 4.° grau denominada *lemniscata,* descoberta casualmente pelo geômetra suíço Jacques Bernoulli. A *lemniscata* (também chamada *lemniscata de Bernoulli)* pode ser considerada como um caso particular da *oval de Cassini* ou, ainda, como uma curva de *Booth* degenerada. (Veja a página seguinte.)

A *lemniscata é* uma curva fechada que apresenta dois eixos de simetria, um ponto duplo, dois vértices c um ponto alucinado perdido no infinito. Por sua forma em 8, lembra essa curva um laço de fita, e daí a denominação que recebeu — *lemniscata* — vocábulo de origem grega — *lemnisko* — que significa ornato ou laço de fita.

Sendo a palavra *lemniscata* de cunho erudito, o conjunto consonantal *mn* deve ser pronunciado. A pronúncia *leniscata* (sem o *m)* é apontada como errónea.

Convém não esquecer — declara muito sério o matemático — que a formosa *lemniscata* apresenta um ponto isolado que não se vê, ou melhor, não pode ser visto, pois está infinitamente afas-



Eis a curva *famosa, do 4° grau, denominada* lemniscata.

tado da curva. Dizem que a *lemniscata* repudiou esse ponto e mandou-o para toda a eternidade, confinado, no infinito. Era um ponto indesejável, que não faz falta alguma.

Ao ser estudada em Geometria Analítica, a *lemniscata* é definida do seguinte modo:

Admitamos, sobre o plano 5, um ponto *P* móvel e dois pontos fixos *F* e *F'*. Designemos por *2d* a distância *F F'*.

As distâncias do ponto *P* (móvel) aos pontos fixos F e F ' serão:

$$PF \text{ e } PF'.$$

Admitamos que o ponto P se move (no plano 5) de modo que o produto das duas distâncias, *PF* e *PF'*, seja constante e igual ao quadrado de *d*. Temos, assim:

$$PF \times PF' = d^2.$$

O ponto *P*, no seu movimento, vai descrever uma curva algébrica chamada *lemniscata.*

A equação cartesiana da *lemniscata* é a seguinte:

na qual *d* representa uma constante.

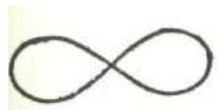
A equação polar dessa curva é mais prática:

$$p^2 = 2d^2\cos 2t$$

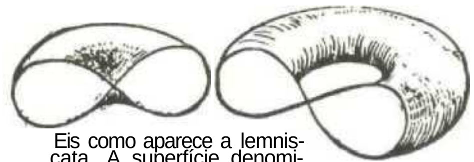
É de estranhar que uma curva tão simples seja definida por uma equação tão complicada.

Mas isso ocorre com muitas outras curvas matemáticas.

A figura abaixo nos mostra como podemos obter a *lemniscata* por meio de um corte no *toro* por um plano. O toro é um sólido de revolução que tem a forma aproximada de um pneu de automóvel.



Eis a curva denominada lemniscata. Tem a forma de um oito.



Eis como aparece a lemniscata. A superfície denominada toro de revolução (um pneu de automóvel lembra um toro) cortada internamente por um plano tangente.

A secção plana do toro é uma *lemniscata* quando o plano secante corta o toro tangente internamente.

Em relação à origem histórica da *lemniscata* alguns autores apresentam certa dúvida:

— A qual dos Bernoulli deve estar, na verdade, ligado o nome dessa curva? Ao Jacques, ou ao Jean?

Gomes Teixeira assegura que a *lemniscata* foi descoberta por Jacques Bernoulli, quando este geômetra procurava a solução do problema de Leibniz que consistia em determinar a curva descrita por um ponto, submetido à ação da gravidade, e obrigado a aproximar-se uniformemente de um ponto dado.

Outro historiador de renome, Gino Loria, aponta como verdadeiro descobridor da *lemniscata* o célebre matemático suíço Jean Bemoulli (1667-1748), irmão e discípulo do não menos célebre Jacques Bemoulli.

Mereceu Jean Bemoulli do filósofo e poeta Voltaire este epitáfio altamente elogioso:

Son Esprit vit Ia Veriíé
Et son Coeur connãt Ia Justice;
II a fait 1´honneur de Ia Suisse
Et celui de l´Humanité.

(Seu espírito aprendeu a Verdade/e seu coração conheceu a Justiça;/Engrandeceu não só a Suiça,/ como a Humanidade.) Percebe-se, no segundo verso, uma certa ironia do sarcástico autor de *Cândido.*

O verdadeiro epitáfio de Jean Bemoulli, legenda incrível que os discípulos e admiradores do geômetra mandaram inscrever em bronze sobre a sua campa, foi o seguinte:

Hoc sub lapide requiescit
Vir quo maiorem ingenio Basilea non tulit
Saeculi sui Archimedes
Non Mis Europae luminibus
Cartesiis, Newtoniis, Leibnitziis
Mathematicum scientia secundus
Johannes Bemoulli.

Eis a tradução desse epitáfio apontado como um dos mais famosos na História da Matemática:

Sob esta lápide descansa
um varão tal como Basiléia não produziu outro.
Arquimedes de seu século.
Não deram maior luz à Europa
Os Descartes, os Newtons e os Leibnizes,
Segundos na Ciência Matemática:
Jean Bemoulli.

O epitáfio latino, altamente elogioso, não fará com que possamos omitir a Verdade:

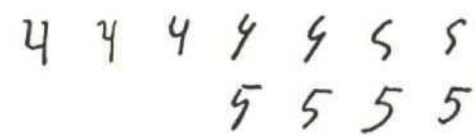
— Jean Bernoulli, injustamente colocado no mesmo nível de Arquimedes, foi homem egoísta, imprestável, invejoso e pérfido.

Quatro atributos negativos, o que seria inadmissível para um gênio.

Um fato, apenas, que define com precisão o péssimo caráter de Jean Bernoulli poderá ser aqui citado. Jean Bemoulli, ao saber que seu filho Daniel, ainda muito moço, havia conquistado um prêmio da Academia de Ciência, expulsou-o de casa. Teve ódio do próprio filho. Ambicionava somente para si todos os prêmios. Banido de seu lar, afastado do convívio de sua mãe e de seus irmãos, continuou Daniel, com extremo sacrifício, os estudos e foi, depois da morte de seu rancoroso e odiento pai, apontado como o maior matemático da Europa.

CURIOSIDADES

O algarismo 5



Eis como evoluiu o algarismo 5, em sua forma, desde o ano 950 até 1706 (século XVHl), quando êle apareceu com a forma que tem atualmente.

No ano 1230 (século XII) o cinco parecia um quatro deformado, como se vê no 3.° algarismo da linha.

Os calculistas foram, depois, pouco a pouco, modificando o algarismo até a última forma que ficou definitiva, e que parece, realmente, a mais simples e mais simpática.

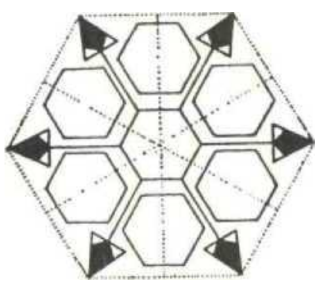
A folha dobrada

Nada mais mais fácil do que dobrar uma folha de papel. Dobrá-la duas vezes também é facílimo.
Imaginemos, porém, que alguém se dispõe a dobrar uma folha de papel 50 vezes!
Seria uma tarefa realmente curiosa. Uma vez realizada, a folha apresentaria uma espessura que seria aproximadamente igual à distância da Terra à Lua!
Eis aí uma conclusão matemática cuja verificação experimental nos parece quase impossível.

Com efeito.
Para que uma folha de papel pudesse ser dobrada 50 vezes, devia ter mais de 4.000.000 de quilômetros de comprimento!

A estaca do círculo

A palavra centro tem sua origem no grego kentron que significava estaca e pode ser facilmente justificada do seguinte modo:
A circunferência era primitivamente traçada com auxílio de um pequeno cordel atado por uma de suas extremidades a uma estaca enterrada no solo.
O ponto — equidistante de todos os pontos da curva — era, por esse motivo, denominado estaca do círculo.

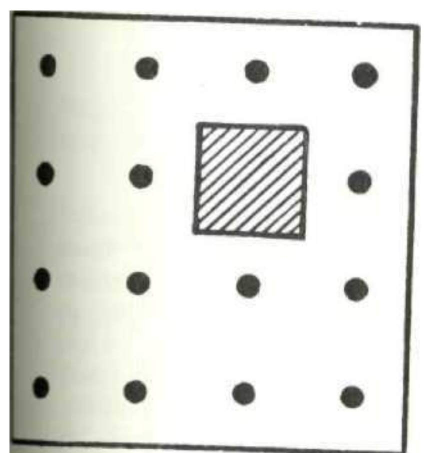


30

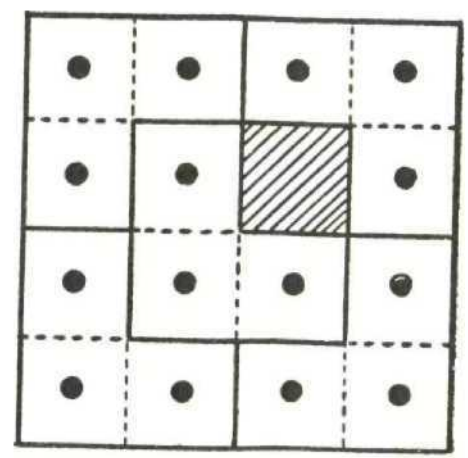
O Problema das Quinze Laranjeiras Bem Plantadas

O CHAMADO "PROBLEMA DAS QUINZE LARANJEIRAS" PARECE DIFÍCIL, MAS PODE SER RESOLVIDO POR MEIO DE UM ARTIFÍCIO GRÁFICO MUITO SIMPLES. VAMOS ENCONTRAR, NA SOLUÇÃO, CINCO HEXÁGONOS NÃO-CONVEXOS.

Certo fazendeiro, que tinha espírito de perfeito geômetra, possuía uma casa quadrada (fig. nº 1) implantada em grande terreno, também quadrado, onde floresciam quinze laranjeiras plan-



(I)



(II)

tadas e bem plantadas em linhas e colunas. CCada laranjeira é representada por um pequeno disco preto.)

O fazendeiro resolveu dividir pelos seus cinco filhos o terreno, em cinco lotes, excluindo a parte ocupada pela casa. Exigia, porém, o seguinte:

1°) que os cinco lotes fossem iguais;
2°) que cada lote tivesse três laranjeiras.

O fazendeiro chamou um geônietra que fêz a partilha como está indicada na figura 2. Os cinco lotes são rigorosamente iguais, e são todos polígonos formados por três quadrados. São hexágonos não-convexos, eqüidecomponíveis, com cinco ângulos retos cada um.

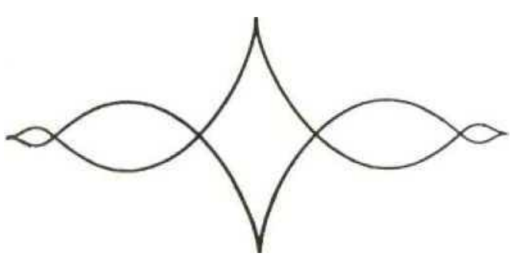
Cada um dos cinco hexágonos, que aparecem na solução, tem cinco ângulos retos e um ângulo reentrante de 270°. É interessante verificar que das nove diagonais do hexágono não-convexo, formado por três quadrados, uma é exterior, outra mista c duas são coincidentes.

Mas essa situação especial das diagonais de um hexágono nâo-convexo, com um ângulo reentrante — como dizia Kipling —, já é outra história.

* * *

CURIOSIDADE

A astróide de Joukowsky



Mostra-nos a figura uma curva derivada da hipociclóide de quatro reversões que é denominada astróide de Joukowsky. Curva algébrica do 8.° grau que admite dois eixos de simetria e oito pontos singulares sendo quatro pontos duplos.

31

Filhos, Netos e Perucas em Equação

DAS PERGUNTAS INDISCRETAS FEITAS POR ELEGANTE JOVEM A UMA DAMA ILUSTRE, QUE OSTENTAVA BELÍSSIMA PERUCA, FOI POSSÍVEL, AO MATEMÁTICO, TIRAR UM PROBLEMA COM TRÊS INCÓGNITAS E TRÊS EQUAÇÕES. EMBORA PAREÇA INCRÍVEL, PODEMOS GARANTIR QUE HÁ EPISÓDIOS, NA VIDA MODERNA, QUE INSPIRAM OS ALGEBRISTAS.

A moça elegante que estava de preto voltou-se para a senhora que ostentava lindo vestido azul-claro, de mangas curtas, e perguntou risonha:

— Mas, afinal, quantas perucas a senhora tem?

A interrogada, em tom gaiato, sacudindo com muita graça os longos brincos (que combinavam precisamente com o vestido), respondeu:

— O número de perucas que eu tenho, minha filha, nada tem de exagerado, É muito razoável, até. É igual ao dobro do número dos meus netos menos um!

— Menos um, como? — indagou a moça que revelava não entender nada de cálculos nem de contas.

— Menos um, sim — confirmou a senhora. — Veja bem. Do número total de meus netos tire um e multiplique o resultado por dois. Terá exatamente o número das minhas perucas. Entendeu?

— E a senhora tem muitos netos? — insistiu indiscreta a moça de preto.

— Ora — replicou, muito amável, a senhora. — Os meus filhos já estão todos casados (e bem casados!) e cada um deles já me deu dois netos. Notei, outro dia, fazendo uns cálculos de brincadeira, que somando o número das minhas perucas com o número de meus filhos e com o número de meus netos obteria 19. Ora, 19, noves fora, um. Esse *um* é meu marido que compra e paga as perucas. Entendeu?

Poderá você, meu amigo, tendo ouvido essa curiosa e indiscreta conversa feminina, calcular o número de perucas da amável senhora do vestido azul? Sim, da tal senhora que tinha os filhos casados e bem casados?

Solução: O problema é resolvido facilmente por meio de um sistema formado por três equações inteiras com três incógnitas.

Designemos por x o número de perucas da dama do vestido azul; y será o número de seus filhos e z o número exato de seus netos. Tendo ela afirmado que a soma desses três números era igual a 19, podemos escrever a primeira equação do problema:

$$x + y + z = 19 \qquad \text{(A)}$$

Sabemos, ainda, que o número x, das perucas, era igual ao dobro do número de netos, menos 1. É claro que dessa afirmação resulta:

$$x = 2(z - 1) \qquad \text{(B)}$$

Será essa a segunda equação do problema.

A terceira equação será destinada a exprimir que o número de netos é igual ao dobro do número de filhos:

$$z = 2y \qquad \text{(C)}$$

Resolvendo-se o sistema formado pelas três equações, que seriam *A*, *B* e *C*, achamos:

$$x = 10 \qquad y = 3 \qquad z = 6$$

O número de perucas (10) parece um pouco exagerado, mas não sabemos se a senhora do vestido azul-claro estava, ou não, mentindo graciosamente só para dar, ao matemático, um pretexto oportuno para um problema bastante simples e elementar.

CURIOSIDADES

Disposição caprichosa

Observemos o interessante arranjo que se pode obter com os algarismos 3 e 7.
Podemos escrever:

$$3^3 + 7^3 = 37\ (3 + 7)$$

e nessa igualdade, tanto no primeiro membro como no segundo, só figuram os algarismos 3 e 7 numa disposição caprichosa que parece encantadora aos olhos de um calculista.

Um produto quilométrico

Admitamos que um calculista se dispusesse a efetuar o produto dos números naturais

$$1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \ldots$$

até chegar a 100.000.

O produto obtido — segundo calculou F. Thoman — teria nada menos de 456.572 algarismos.

Não vale a pena tentar escrever esse produto fabuloso. Os seus algarismos escritos em linhas retas, e no corpo em que foi composta esta página, formariam um número com 1.050 metros de comprimento! Seria um número de 1 quilómetro e 50 metros. Teríamos, assim, um número quilométrico.

Produto singular

Consideremos, por exemplo, o número 41096.
Multiplicando-se esse número por 83, obtemos:

3410968

Observe que o produto é formado peto multiplicando (41096) precedido de 3 e seguido de 8, que são os algarismos do multiplicador.
O produto não alterou a posição dos algarismos do primeiro fator.

Sem o zero

Um livro intitulado Álgebra, que é atribuído a um matemático, Aben-Bedr, espanhol de origem árabe, foi publicado no século XII ou no século XIII.

E interessante assinalar o seguinte:
Nesse livro a numeração das páginas ainda é feita por um sistema no qual não aparecia o zero e os algarismos não apresentavam valor de posição.

32

Gato e Rato aos Pulos Uniformes

O MATEMÁTICO É, EM GERAL, DE UMA IMAGINAÇÃO PRODIGIOSA. AQUI APRESENTAMOS UM PROBLEMA NO QUAL O AUTOR IMAGINA UM GATO PERSEGUINDO UM RATO COM VELOCIDADE UNIFORME, MAS AOS PULOS, O RATO DÁ PULOS IGUAIS EM TEMPOS TAMBÉM IGUAIS. SÓ UM RATO GEÔMETRA CONHECERIA BEM AS LEIS DA MECÂNICA. E O RATO GEÔMETRA SERIA PERSEGUIDO POR UM GATO PERITO NA ARTE DE PULAR.

No livro Matemática, Primeira Série, do Prof. Carlos Galante, encontramos o seguinte problema que é apresentado como uma aplicação simples dos cálculos aritméticos:

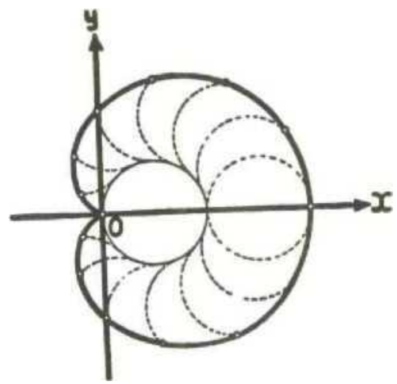
> Um gato persegue um rato; enquanto o rato dá 5 pulos, o gato dá 3, porém, 1 pulo do gato equivale a 2 pulos do rato. O rato leva uma dianteira de 50 pulos dados pelo gato. Quantos pulos deverá o gato dar para alcançar o rato?

Eis aí um problema interessante, divertido, mas inteiramente fora da vida real. Até hoje não se encontrou, no mundo em que vivemos, um rato que fugisse aos pulos, e pulos uniformes, de um gato que andasse, como um louco, aos pulos, também uniformes, atrás dos ratos. E o gato e o rato (mesmo aos pulos) correm atendendo ao princípio mecânico do movimento uniforme. De acordo com o enunciado do problema, o rato, mesmo em perigo de vida, perseguido pelo gato, não deixa de dar pulos iguais em tempos iguais. E assim procedendo, arrisca a pele, para não ferir a precisão matemática do curioso e disparatado problema.

O mais tudo está certo. É claro que o estudante terá que dar dois ou três pulos (que não serão possivelmente uniformes) para resolver o problema e calcular o número total de pulos do gato alucinado e certamente, faminto, preocupado em abocanhar o ratinho geômetra.

CURIOSIDADE

A curva do coração



Quando uma circunferência móvel rola, sem escorregar, sobre uma circunferência fixa, do mesmo raio, um ponto qualquer da circunferência móvel gera uma curva denominada cardióide. Essa curva notável, que tem a forma de um coração, apresenta um ponto singular e pode ser cortada por uma reta em quatro pontos reais ou imaginários. A cardióide, que pertence à família das epiciclóides, tem um ponto singular e admite um eixo de simetria.

33

A Idade Fantasiosa de Ura Poeta

ENCONTRAMOS COMUMENTE, EM LIVROS DIDÁTICOS DE MATEMÁTICA, PROBLEMAS RIDÍCULOS E TOLOS SOBRE IDADES. SÃO PROBLEMAS SEM A MENOR APLICAÇÃO PRÁTICA, ISTO É, PURAMENTE RECREATIVOS, MAS QUE CERTOS PROFESSORES, ESPECIALMENTE OS ALGEBRISTAS, GOSTAM DE EXIGIR DE SEUS ALUNOS EM PROVAS E EXAMES. SERÁ INTERESSANTE ESTUDAR UM DESSES QUEBRA-CABEÇAS.

Ao prefaciar o livro Felicidade,[1] de Ruy Cirne Lima, escreveu o académico Álvaro Moreyra:

> Este poeta não havia nascido quando eu tinha a idade que êle tem agora.

A frase de Álvaro Moreyra, bastante fantasiosa, poderia ser aproveitada, por um professor de Matemática, para curioso problema de idades:

> Qual era a idade de Álvaro Moreyra (em relação à idade do poeta) quando escreveu o tal prefácio?

Ocorre-nos agora recordar aqui um problema famoso, com o qual os algebristas torturavam os seus infelizes alunos, e cujo enunciado era o seguinte;

Rio de Janeiro, 1925.

Rui disse a Alice: "Tenho duas vezes a idade que tu tinhas, quando eu tinha a idade que tu tens. Quando tu tiveres a idade que eu tenho a soma das nossas idades será de 63 anos." Pergunta-se: Qual a idade de Rui? Qual a idade de Alice?

Esse problema poderá ser resolvido, facilmente, com o auxílio de um sistema de equações com duas incógnitas.

Vejamos. Chamemos x a idade de Rui e y a diferença entre as idades.

A situação atual é a seguinte:

Rui	**x**	**anos**
Alice	**x - y**	**anos**

Quando Rui (no passado) tinha x - y anos (que é a idade atual de Alice), a Alice teria, é claro, x - y - y ou x - 2y anos.

A situação hipotética seria:

Rui	x - y	anos
Alice	x - 2y	anos

Disse o Rui (e certamente é verdade) que a sua idade atual (x) era o dobro da idade de Alice naquele tempo.

Podemos, portanto, escrever:

$$\mathbf{x = 2(x - 2y)} \qquad \textbf{(A)}$$

É essa uma das equações do problema. Ela exprime o seguinte:

A idade atual de Rui (x) é o dobro da idade de Alice (x — 2y) quando êle, Rui, tinha a idade x — y.

A equação (A) pode ser escrita sob a forma mais simples. Basta efetuar o produto indicado:

$$\mathbf{x = 2x - 4y} \qquad \textbf{(B)}$$

Vamos agora estabelecer a segunda equação do problema.

Quando a jovem Alice tiver *x* anos (que é a idade atual de Rui), o nosso Rui terá x + *y*.

A situação futura será:

Rui	**x + y**	**anos**
Alice	**x**	**anos**

Disse Rui que, nesse tempo, a soma das duas idades (*x* + *y* e *x)* será de 63 anos.

Isso nos permite escrever:

$$x + y + x = 63 \qquad \textbf{(C)}$$

Obtemos, desse modo, a segunda equação do sistema.

Eis as duas equações:

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= \mathbf{2x - 4y} \\ \mathbf{x + y + x} &= \mathbf{63} \end{aligned}$$

Essas equações, como já dissemos, formam um sistema. Vamos resolvê-lo.

A primeira equação exprime que se do dobro de *x* tiramos 4y obtemos *x.*

É fácil concluir que *x* é igual a 4y.

Podemos escrever:

$$x = 4y$$

A idade de Rui é quatro vezes a diferença das idades.

Substituindo na equação (C) a incógnita x por seu valor 4y, temos:

$$4y + y + 4jy = 63$$

Reduzindo:

$$\mathbf{9y = 63}$$

Dessa última equação tiramos imediatamente o valor de y.

$$y = 7$$

A diferença entre as idades é de 7 anos. A idade de Rui é 4 vezes 7, ou 28.

Conclusão: O Rui tem 28 anos e a Alice tem 28 - 7 ou 21.

Quando Rui tinha 21 a Alice teria 14, e 28 é o dobro de 14.

Quando Alice tiver 28 o Rui terá 35, e a soma, 28 + 35, será igual a 63.

Fica assim resolvido, com cálculos e equações, o problema de Rui e Alice. É bem possível que os dois heróis da história sejam noivos. E seria, sem dúvida, a solução mais simples e mais interessante para o problema.

CURIOSIDADE

O litro e seus nomes

A unidade de capacidade do Sistema Métrico mudou duas vezes de nome.

Era, a princípio, denominada pinte e definida como a milésima parte do cade (metro cúbico). Em janeiro de 1794 um decreto do governo francês substituiu o nome pinte por outro mais sonoro, cadil.

O cadil teria os submúltiplos: decicadil, centicadil e milicadil. Pouco tempo, porém, foi mantido o cadil. Um dos organizadores do novo sistema sugeriu a denominação de litro, que foi definitivamente adotada.

34

O Palmo, o Palminho e Outras Medidas

O PALMO E A LEI DE 1835. COMO VARIAVA O PALMO NOS DIVERSOS PAÍSES. O PALMINHO DE CARA. FALA-SE DE UM JOVEM QUE PRETENDIA FULMINAR COM FLUIDOS MAGNÉTICOS TODOS OS PALMOS DE CARA DA CIDADE. O PALMO NA LINGUAGEM POPULAR.

O palmo é apontado como uma das unidades mais antigas e uma das mais preferidas pelo povo. A Lei de 1835, no Brasil, fixou o palmo em oito polegadas. Usa-se também, com frequência, o meio palmo.

O palmo, medida incerta e bastante variável, era definido em gerai como a distância da ponta do polegar à ponta do dedo mínimo estando a mão bem aberta sobre um plano horizontal.

A unidade denominada *cúbito,* sem dúvida também uma das mais antigas, admitia o palmo como submúltiplo. O cúbito media sete palmos.

O palmo deveria ser equivalente, como dissemos, a oito polegadas ou 22cm. Eis, porém, o valor do palmo em centímetros em cinco países diferentes:

Argentina	21,65
Chile	20,9
Espanha	21,07
Portugal	21,09
Venezuela	20

unidade palmo é de emprego frequente na linguagem do povo.

A dita cobra que podia ter uns dez palmos vejam que bruta.[1]

Na Bíblia encontramos a unidade palmo citada por Ezequiel (40,43):

> Os ganchos, de um palmo de comprido, estavam fixados por dentro, ao redor.

Para Eça de Queiroz o palmo seria uma unidade certa, bem determinada:

> *Era, como disse, um farrapo de linho, rasgado de uma fralda de camisa e do tamanho de um palmo.*[2]

Para a medida da lâmina do facão, é o palmo a unidade preferida pelo gaúcho:

> E na cintura, atravessado com entono, um facão de três palmos, de conta[3]

Encontramos a unidade palmo, sob a forma diminutiva, na expressão "palminho de cara" para indicar jovem graciosa e sedutora:

> Ela tem um palminho de cara que agrada, mas nem vintém de seu ou a ser seu.[4]

O sedutor "palminho de cara" vamos observar entre as operárias de uma fábrica:

> *Da fábrica, à saída, sempre a vejo*
> *Sem malícia e sem desejo,*
> *Um palminho de cara original.*[5]

1. Waldomiro Silveira, Leréia.
2. Eça de Queiroz, As Minas de Salomão.
3. Simões Lopes Neto, Contos Gauchescos e Lendas do Sul.
4. Klora Possolo, Garoto Moderna.
5. Mauro Carmo, Vaga-lume.

Refere-se o escritor Herman Lima *(Tigipió)* a certa morena que ostentava o clássico "palminho de cara":

> *Alta, morena, de um moreno mate aveludado e quente, o palminho de cara mais formoso da redondeza.*

Alguns autores abandonaram o "palminho" e adotaram a forma "palmo de cara":

> *Distante três léguas da "Irara", vivia, com sua mãe, a Joaninha Mundé. Era o palmo de cara mais atraente que possa imaginar.*[6]

Podemos ler em Monteiro Lobato:

> *Eu tive um companheiro de república, o Matheus, que se viciou em encarar e fulminar com fluidos magnéticos todos os palmos de cara bonitinhos com que se cruzava nas ruas. Uma vez estrepou-se.*[7]

Fala-nos o escritor Guimarães Rosa de um homem meio amalucado, que tinha a mania de alinhar números com uma caravana interminável de algarismos. E Guimarães Rosa procura exprimir a grandeza dos números em palmos:

> *Botou mais um palmo de numeração, ligeiro, ligeiro*[8]

A altura de uma estrela, no céu, pode ser, segundo esse mesmo autor, avaliada em palmos:

> *... nem o Setestrêlo, nem as Três Marias — já tinham afundado; mas o Cruzeiro ainda rebrilhava a dois palmos, até que descendo. ..*[9]

No sertão, o palmo exprime, em geral, uma avaliação aproximada. Podemos ler no romancista W. Bariani Ortêncio:

6. Pedro Gomes, *Na Cidade e na Roça.*
7. Monteiro Lobato, *A Barca de Gleyre.*
8. Guimarães Rosa, *Corpo de Baile.*
9. Guimarães Rosa, *Grande Sertão e Veredas.*

Certo dia levantou-se cedo e foi assuntar o rio: as águas subiram bem um palmo.[10]

O poeta Tolentino Miraglia empregou conjuntamente uma unidade antiga (palmo) e a unidade oficial (metro) para atender à beleza do verso. Referindo-se ao crescer rápido de um mamoeiro, escreveu:

Não tinha um palmo em dias de janeiro,
Mas hoje ostenta mais de um metro e meio.[11]

Os poetas apreciam o palmo como unidade e não hesitam em empregá-lo. De Adelmar Tavares cabe-nos destacar esta trova:

Minha filha tem apenas
Um palmo de minha mão,
— Não cabe dentro do mundo
E cabe em meu coração.

O poeta Eugênio de Castro, no soneto *Martim,* referindo-se à morte de seu filho pequenino:

Títulos, honras, glórias e façanhas
Tudo quanto eu sonhava, cabe tudo
Num caixãozinho branco de dois palmos!

O meio palmo era empregado com muita frequência:

Canoas que tinham dez palmos de comprimento e dois e meio de largura}[2]

No romance *Caminhos Errados* escreveu Aquilino Ribeiro:

Não tenho meio palmo de terra, onde cair morto.

O meio palmo, nas medidas de terras, exprime uma grandeza mínima, sem valor. Assim escreveu Aluísio Azevedo:

10. Bariani Ortêncio, O *Sertão, O Rio e a Terra.*
11. T. Miraglia, *Uma Vela ao Luar.*
12. Augusto de Lima Júnior, *História dos Diamantes em Minas.*

— Ora, detxe-se disso, homem, e diga lá quanto quer pelo que lhe propus.
— Já lhe disse o que tinha a dizer.
— Ceda-me, então, ao menos, as dez braças de fundo.
— Nem meio palmo}[3]

Júlio Dantas, na *Ceia dos Cardeais,* recorre ao meio palmo, em sentido indeterminado:

Inda desembainhei meio palmo de espada,
Mas contive-me. "Não. Logo é melhor", disse eu.

Certa avaliação em palmo e meio vamos encontrar cm Mário Palmério:

Mas o luxo do padre era a zagaia: palmo e meio de aço alemão, espora reforçada, e de corte dos dois lados[14]

Êssc padre que pregava a caridade e o amor ao próximo nos sertões de Minas certamente ensinava o Catecismo aos bons católicos com palmo e meio de zagaia reforçada na mão.

As pequenas medidas não itinerárias eram feitas sempre a palmos. As outras unidades (pé, polegada, braça, jarda etc.) iam, em geral, para o rol das coisas esquecidas.

— Ganhei um palmo de fumo.

— Ganhei cinco palmos de chita.

— O muro tinha nove palmos de altura.

Em consequência da popularidade do palmo, vamos encontrá-lo cm várias expressões populares. Vamos citar algumas expressões :

Língua-de-palmo-e-meio — Pessoa intrigante que assaca aleivosias.

Não enxergar um palmo adiante do nariz — Alusão a uma pessoa bronca, incapaz, sem cultura.

13. A. Azevedo, O *Cortiço.*
14. Mário Palmério, *Vila dos Confins.*

Não tem um palmo de terra — Expressão que significa pobreza, ruína, falta de recursos: *Chove chuva! Pode chover que não molha um palmo de terra meu!*[15]

Pagar com língua-de-palmo — Estuda João Ribeiro a origem desse modismo. Parece aludir ao castigo que alguém sofria em consequência de um erro praticado. O enforcado era, em geral, representado com a língua de fora (com uma *língua-de-palmo).* Ir para a forca equivalia a pagar o crime com *língua-de-palmo.*[16]

Mede-palmos — Nome popular de uma lagarta da família dos geometrídeos. É muito característico o modo de caminhar dessa lagarta, modo este determinado pelo número reduzido de patas. Tem ela, apenas, os três pares de patas torácicas usuais e, além disso, só dois pares na extremidade posterior, quando as lagartas normais têm, ao todo, oito pares, O "mede-palmos", juntando as duas extremidades opostas, curva o corpo em arco e logo o distende adiantando a parte anterior; parece, assim, medir o espaço aos palmos, ao que também o nome latino faz alusão.

Palmo-a-palmo — Vagarosamente. Com cuidado. Lentamente.

Chego ao pé da colina verdejante
Onde alegre vivi na minha infância
Descuidoso e feliz, presto e cantante
Palmo-a-palmo correndo a velha estância.[17]

O palmo é, ainda, encontrado em outra expressão bem conhecida: sete palmos, nome que é dado à sepultura.

Aqui fica, meu amigo, o estudo da unidade *palmo,* feito com cuidado, isto é, palmo-a-palmo.

15. Waldomiro Silveira, *ob. cit.*
16. João Ribeiro, *Frases Feitas.*
17. Solimar de Oliveira, *Cidade Antiga.*

35

Goethe e a Tabuada da Feiticeira

ENTRE OS TRECHOS MAIS DEBATIDOS PELOS MÍSTICOS E PELOS NUMEROLOGISTAS PODEMOS APONTAR A "TABUADA DA FEITICEIRA", NA GRANDE OBRA "FAUSTO", DE GOETHE, AQUI O LEITOR ENCONTRARÁ UM PARALELO CURIOSO ENTRE DUAS TRADUÇÕES NOTÁVEIS, E O ESTUDO PODERÁ SER COMPLETADO COM A TRADUÇÃO DE GERARD DE NERVAL.

Em *Fausto,* de Goethe, destaca-se uma cena, revestida de muita Matemática e alto mistério, que é chamada a *Tabuada da Feiticeira.* Até hoje não houve analista, com os recursos da Kabbala, que conseguisse esclarecer o enigma numérico do magistral poeta alemão.

Em dado momento, interpelada por Mefistófcles, e na presença de Fausto, a feiticeira, com grande ênfase, começa a declamar do livro.

Eis a tradução de Antenor Nascentes c José Júlio F. de Souza:[1]

Deves entender!
De um faz dez
E deixa dois irem
E igual a três,
Assim rico estás.
Perderás o quatro!
Tira cinco e seis

I. Rio de Janeiro, 1964, pág. 94.

Assim diz a bruxa
Faz sete e faz oito,
Está tudo acabado;
E nove são um!
E dez são nenhum.
Tal é das bruxas
A tabuada.

Vamos ler, agora, a mesma estranha tabuada de acordo com a recente tradução do Dr. Augusto Bastos Meira:[2]

Deves compreender!
De um faz-se Cento.
Deixa dois de lado,
Com três a acrescer
Já estás enricada!
Perde quatro de vez!
Dos cinco e dos seis.
Diz a feiticeira,
Faz sete e faz oito
A conta é encerrada
O nove é só um!
E dez é nenhum
Da bruxa é a tabuada!

Podemos assinalar, facilmente, entre essas traduções, feitas com o maior capricho por filólogos eruditos, divergências bem sérias. O paralelo poderá ser feito de maneira muito simples. Observemos inicialmente o segundo verso. Na primeira tradução êle se apresenta sob a forma:

De um faz dez.

Na segunda, do Dr. Meira, a afirmação é totalmente diversa:

De um faz-se Cento.

2. Rio de Janeiro, 1968, pág. 136.

Conclusão: um dos tradutores equivocou-se. Qual seria a ideia mística de Goethe? De um faz dez, ou de um faz cem? Em que ficamos? Não é possível que Goethe tivesse, ao mesmo tempo, afirmado coisas inteiramente diversas.

A seguir, de acordo com A. Nascentes e J. J. de Souza, encontramos duas afirmações de sentido obscuro:

E deixa dois irem
E igual a três.

Afasta-se o Dr. Meira dessa forma e, preocupado em ser rigoroso c perfeito, oferece-nos esta tradução:

Deixa dois de lado,
Com três a acrescer.

Nas duas traduções indicadas, como o leitor poderá observar, só há um verso com a mesma forma. É o nono. Os tradutores concordam inteiramente com o poeta:

Faz sete e faz oito!

A Tabuada da Feiticeira até hoje não foi interpretada nem pelos místicos nem pelos matemáticos. O Prof. Nascentes e seu ilustre colaborador, em nota, asseguram que toda essa complicação numérica sem o menor sentido matemático, proferida pela feiticeira, não passa de uma zombaria com a Santíssima Trindade, isto é, com o dogma da Santíssima Trindade.

Há expressões na *Tabuada* que se apresentam ao espírito do matemático sem o menor sentido lógico. Na primeira tradução os quatro últimos versos são:

E nove são um!
E dez são nenhum.
Tal é das bruxas
A tabuada.

O Dr. Meira preferiu, para esses mesmos versos, outra forma bem diferente:

O nove é só um!
E dez é nenhum
Da bruxa é a tabuada!

Para melhor esclarecer o problema, vamos transcrever a tradução, feita para o francês, pelo poeta Gerard de Nerval:

A mi, crois à mon système
Avec un, dix tu feras;
Avec deux e trois de mêm
Ainsi tu t'enrichiras.
Passe le quatrième
Le cinquième et le sixième
La sorcière Va dit:
Le septième et le huitième
Réussiront de même.. .
Cest là que finit
Uouvre de Ia sorcière.
Si neuf est un,
Dix n'est aucun
Voilà tout le mystère.

À semelhança do famoso Teorema de Fermat, a *Tabuada da Feiticeira,* de Goethe, é lançada como desafio à argúcia dos místicos e dos decifradores de enigmas.

Como esclarecê-la?

No caso dessa passagem famosa do *Fausto,* as afirmações abstrusas da bruxa devem ser interpretadas, não por um filólogo, nem por um matemático, mas por um cabalista da Escola de Akiba. Os números de um até nove, citados em ordem crescente, com total desconexão aritmética, aparecem envoltos na névoa do ocultismo, e só um sábio inspirado nas páginas de *Zohar* poderá revelar o mistério.

36

Problemas, Charadas e Enigmas

RELEMBRAMOS AQUI EXPRESSIVA FRASE DE UM TEÓLOGO FRANCÊS FALANDO DOS PROBLEMAS QUE EDUCAM: "DEVEMOS SILENCIAR SOBRE OS PROBLEMAS QUE DESEDUCAM E QUE LEVAM O ADOLESCENTE A TER MEDO DA MATEMÁTICA." CUMPRE, PORÉM, AO BOM PROFESSOR APRESENTAR A SEUS ALUNOS, DE QUANDO EM QUANDO, UM PROBLEMA RECREATIVO DE MATEMÁTICA. ESSES PROBLEMAS DESPERTARÃO NOS JOVENS EDUCANDOS INTERESSE E SIMPATIA PELA CIÊNCIA E ATÉ PELAS PESQUISAS CIENTÍFICAS.

Há muita gente, dotada de acentuada inteligência abstrata, que se sente fascinada pelos paradoxos, enigmas, recreações algébricas, curiosidades numéricas etc. É expressiva a afirmação do escritor e teólogo francês François Fenelon (1651-1715), que nunca teve suas atenções voltadas para as transcendentes questões da Análise:

Felizes aqueles que se divertem com problemas que educam a alma e elevam o espírito.

E quais são os problemas, de alto interesse, que educam a alma e elevam o espírito? São aqueles relacionados com a Matemática. Não deixa portanto de ser interessante e agradável resolver um problema de Matemática Recreativa.

Aqui está um, curioso, publicado no *Boletim Informativo do Instituto Nacional de Pesos e Medidas:*

Quanta terra há num buraco perfeitamente cilíndrico, de um metro de profundidade por 80 centímetros de diâmetro?'

Resposta: Dentro do buraco não deve haver terra alguma. Se houvesse, o buraco deixaria de ser "perfeitamente cilíndrico" com as dimensões dadas.

Isso é bem claro, não acha?

Além dos problemas vamos encontrar, nos domínios da Matemática Recreativa, as *charadas.* Citemos a seguinte que pertence ao lipo *novíssima:*

Número! Número! Número! Que linda cidade mineira!
1 — 1 — 1

Como o conceito é *linda cidade mineira* a solução da charada será dada por uma cidade de Minas cujo nome, com três sílabas (1 — 1 — 1), seja formado por três números.

Só existe, para o caso, uma solução. É a cidade de *Pi um — i* que fica situada na serra da Canastra, nas proximidades da nascente do rio São Francisco.

No singular nome de *Pium — i* encontramos o número *Pi,* 3,14 (relação entre a circunferência c o diâmetro); o número cardinal *um* (1) e o número *i*, que para o matemático é a raiz quadrada de -1. É o símbolo da imaginariedade.

Além das charadas surgem as perguntas enigmáticas. Citemos um exemplo bem simples:

Em que caso uma pessoa, ao escrever vinte, é obrigada, inicialmente a escrever seis?

Resposta: Quando essa pessoa quiser escrever a palavra VINTE com letras maiúsculas. As duas primeiras letras, tomadas como algarismos romanos, formam o número seis. Ao escrever, portanto, VINTE ela inicialmente escreveu a palavra seis em algarismos romanos.

Outro enigma pitoresco:

Em que caso, numa sucessão de números inteiros na ordem natural, de zero até mil, o cem é forçosamente o primeiro e zero o último?

Resposta: Quando esses números forem escritos por extenso (zero, um, dois, três, quatro. . .) e colocados em ordem alfabética. O *cem,* que começa em *c,* será o primeiro, e o *zero,* que começa em *z,* será o último.

E finalmente apresentamos ao leitor um enigma puramente algébrico.

O professor de Matemática perguntou, certa vez, ao melhor aluno de sua turma:

— Roberto! Qual é a sua idade?

O interrogado respondeu prontamente:

— Ê muito simples, professor. Dentro de dois anos a minha idade será igual ao quadrado da idade que eu tinha há dez anos.

O professor sem hesitar respondeu:

— Já sei Roberto! Você tem quatorze anos.

Pergunta-se: Como pôde o professor achar tão depressa a idade do menino?

Solução: O menino tem mais de dez anos e a sua idade diminuída de dois é um quadrado.

Os quadrados maiores que dez, são:

16, 25, 36, 49, 64...

Diminuídos de 2 darão:

14, 23, 34, 47, 62. ..

O primeiro, citado pelo professor, é o único que poderá exprimir a solução do problema, isto é, a idade de um *menino.*

Com os recursos da Álgebra podemos resolver esse problema. Tudo irá recair em banalíssima equação do 2º grau com uma incógnita.

Chamemos *x* a idade atual do Roberto.

A idade desse menino, dentro de dois anos, será

$$x + 2$$

A sua idade, há dez anos passados, era

$$x - 10$$

De acordo com o enunciado do problema a idade x + 2 é o quadrado da idade de x — 10. Temos então:

$$x + 2 = (x - 10)^2$$

Obtemos, dessa forma, uma equação do 2º grau. Efetuando o quadrado, vem:

$$x + 2 = x^2 - 20x + 100$$

Transpondo e reduzindo:

$$x^2 - 19x + 98 = 0$$

Essa equação apresenta duas raízes reais, inteiras e positivas: 14 e 7.

A 1ª raiz serve ao problema. O menino tem 14 anos.

A 2ª raiz serve à equação mas não serve ao problema. Com efeito. Um menino de 7 anos, mesmo sendo o primeiro da classe, não poderia, de modo algum, aludir à idade que êle tinha "há dez anos passados". (É bem possível que nesse tempo os seus pais ainda não estivessem casados.)

Matematicamente a sua idade será (há dez anos passados):

$$7 - 10 \text{ ou } -3$$

Essa idade negativa exprime: Faltavam 3 anos para que ocorresse o seu nascimento. O quadrado de -3 é igual a (7 + 2) ou 9.

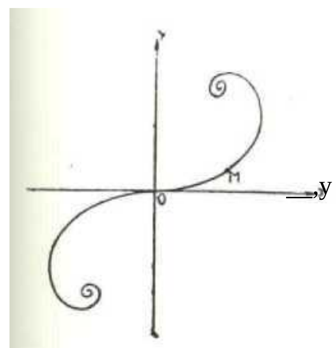
Conclusão: Roberto tem 14 anos de idade.

E afinal a verdade deve ser dita: Resolver um problema, assim banalíssimo, com fórmulas e equações, é o mesmo que matar formiga saúva, na roça, com bomba atômica.

* * *

CURIOSIDADES

A clotóide



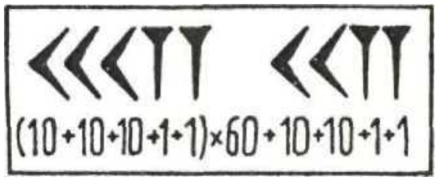
Vemos na figura ao lado uma das curvas mais famosas e mais estranhas da Matemática. Ê chamada clotóide. O seu nome vem do grego Klothos (eu fio). A clotóide é a curva que se enrola e não pode parar de se enrolar.

Ê gerada por um ponto M, que a partir de um ponto O (num sentido ou no outro) percorre uma circunferência cujo raio é inversamente proporcional ao arco OM percorrido pelo ponto M. Como o raio de curvatura vai diminuindo, a curva vai se enrolando como se fosse uma espiral. A clotóide foi mesmo denominada espiral de Cornu, em homenagem ao físico francês Marte Alfred Cornu (1814-1902) que a descobriu ao estudar (1864) o fenómeno da difração.

A clotóide foi analisada pelo suíço Jacques II Bernoulli (1759-1789), neto do suíço Jean Bernoulli.

Ocorre com a clotóide uma particularidade: A curva tem dois pontos extremos que são inatingíveis. São pontos assintóticos da clotóide.

Numeração antiga



A figura nos mostra o número 1942 escrito pelo sistema cuneiforme dos caldeus. (Cerca de 4000 a.C.) Só são indicados, na verdade, dois números: O primeiro, à esquerda, formado de cinco sinais, representa 32; o outro, com quatro sinais, é o 22.

Como o sistema de numeração é sexagesimal, o 32 deve ser multiplicado por 60. Temos assim

32 X 60 + 22

O resultado ê o número 1942.

Elevando ao quadrado

Para elevar o número 45 ao quadrado deveríamos efetuar o produto:

45 X 45

Essa conta pode parecer trabalhosa. Decompondo então o 45 em duas parcelas:

20 + 25

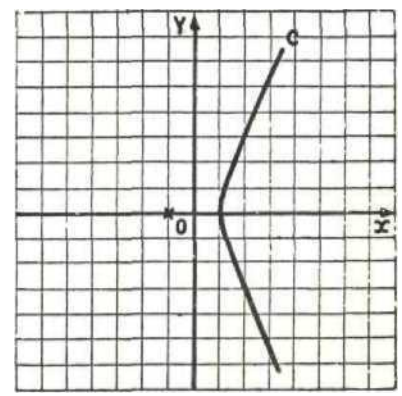
Escrevo uma parcela (20) seguida de outra (25).
Obtenho o número 2025 que é o quadrado de 45.
O cálculo foi bem simples, não acha?

37

Curva Patológica com Ponto Isolado

PODE O PONTO M DE UMA CURVA ENCONTRAR-SE ISOLADO, PERDIDO, FORA DA CURVA? ESTUDAM OS GEÔMETRAS ESSA SINGULARIDADE QUE NOS CAUSA VERDADEIRO ASSOMBRO: A TEORIA DOS PONTOS PERDIDOS.

Admitem os matemáticos a existência de certas curvas patológicas, formadas de ramos fechados ou ilimitados, e que apresentam um, dois, três ou mais pontos isolados. São pontos que analiticamente pertencem à curva mas que estão fora da curva como se tivessem sido esquecidos, abandonados pelo caminho, repudiados pela curva. Trata-se de uma anomalia geométrica. Vemos na figura ao lado uma curva algébrica, do 3.° grau, formada por um ramo parabólico (ilimitado) e que ostenta um ponto singularmente isolado. O ponto isolado está sobre o eixo dos *x* e para além da origem. Quem quiser traçar essa curva deverá agir em dois tempos: traçar, primeiro, o ramo ilimitado que se vê à direita, e, em seguida, assinalar aquele pontinho isolado. Não fazendo assim, a curva fica incompleta. A curva que apresentamos tem



Curva com ponto isolado.

duas partes: um arco ilimitado e um ponto no exílio. É uma curva paranóica definida pela equação cartesiana:

$$y^2 = (x + 1) \quad (x^2 \ - \ 1).$$

Convém repetir: o ponto isolado é da curva, faz parte da curva, mas está afastado dos outros, fora da curva.

As coordenadas cartesianas do ponto isolado, no exemplo, são: $x = -1$ e $y = 0$.

Essas coordenadas satisfazem a equação da curva.

No caso citado, pretendem alguns geômetras que o ponto isolado (- 1 ; 0) é o ponto duplo da curva. Admitida essa hipótese, a situação torna-se mais grave. A curva teria, nesse caso, dois pontos isolados coincidentes, isto é, dois pontos que formam um ponto único.

Fazendo-se, com efeito, na equação da curva y = 0 obtemos uma equação do 3º grau com três raízes reais, das quais duas são iguais:

$$x = \quad -1 \qquad x = \quad - \qquad x = 1.$$

A reta, eixo dos *x* encontra a curva em três pontos, mas dois desses pontos apresentam a mesma abscissa. Logo, os dois pontos coincidem.

Como simples curiosidade apresentamos aos leitores matemáticos a seguinte equação totalmente inédita nos domínios da Geometria Analítica:

$$+ \ y^2 \ - \ 2 \quad —^{\mathsf{T}} \qquad \text{(A)}$$

Essa estranha equação, de forma tão simples, apresenta, como pintura geométrica, uma circunferência, de raio 4, com um ponto isolado no centro. (A figura seria formada por uma circunferência com um ponto no centro.)

A equação (A) não define uma curva do 2.° grau pois uma curva do 2.° grau não poderia admitir ponto singular (ponto isolado).

A "circunferência" definida pela equação (A) admitiria uma infinidade de pontos imaginários, isto é, todos os pontos da reta.

$$y = íx \qquad i = V - 1 \qquad \text{(B)}$$

Essa reta imaginária, segundo os matemáticos demonstram, é perpendicular a si mesma e a distância entre dois quaisquer de seus pontos é nula.

Seria facílimo escrever equações algébricas de forma

$$f\ (x,\ y) \ = \ 0$$

que definem respectivamente elipses, parábolas e hipérboles com pontos reais isolados.

Eis um exemplo. A equação

$$|\,|y - x^2| - a\,| = a$$

define uma parábola com ponto isolado, sendo *a* um número positivo.

Há, porém, em relação ao problema do ponto isolado, um caso altamente curioso e para o qual chamamos a atenção dos matemáticos. A equação modulada

$$|x| + |y| = 6$$

define, como sabemos, um quadrado ABCD com o centro na origem, os vértices sobre os eixos coordenados e o lado sendo igual a $6\sqrt{2}$.

Se tomamos, porém, a equação modulada

$$||x| \ + \ |y| - 3| \ = \ 3$$

podemos observar um caso espantoso: essa equação define cartesianamente uma figura estranha: um quadrado ABCD com um ponto isolado no centro.

Essa revelação é uma das descobertas mais notáveis feitas por um matemático brasileiro.

Até hoje (antes da publicação deste livro) nenhum matemático do mundo havia inventado uma equação que definisse essa figura assombrosa: um quadrado com um ponto isolado no centro.

A equação modulada

A equação modulada

$$/\ /x^2 + y^2 - 6\ /\ = 2$$

representa geometricamente dois círculos concêntricos.
O primeiro, isto é, o menor, tem o raio igual a 2; o segundo terá *o raio igual a* $\sqrt{8}$, *ou melhor, 2,82.*

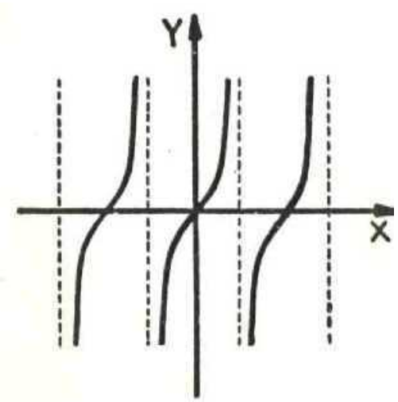
Os centros dos círculos estão na origem.
Até agora (1971) os matemáticos (e isso ocorria no mundo inteiro) não sabiam escrever uma equação cuja pintura geométrica fosse constituída por dois círculos concêntricos.
A equação modulada

$$/\ \ /x/\ +\ /y/ - 4\ /\ = 2$$

define dois quadrados concêntricos.
B uma descoberta muito simples mas que honra a cultura matemática no Brasil. Ê descoberta de um brasileiro.

• * *

A tangentóide



Eis a tangentóide, curva formada por uma infinidade de ramos iguais e separados.
Cada ramo tem duas assíntotas e todas as assíntotas são paralelas.
Todos os ramos de uma tangentóide admitem (dizem os matemáticos) um ponto comum no infinito.

38

Ao Reflorir Suave das Rosáceas

AS ROSÁCEAS SÃO CURVAS BEM CURIOSAS QUE O GEÔMETRA ESTUDA POR MEIO DE FÓRMULAS E DE EQUAÇÕES. APARECEM, COM MUITO DESTAQUE, EM UM DOS CAPÍTULOS DA MATEMÁTICA DENOMINADO ÁLGEBRA ORNAMENTAL. É CLARO QUE TODO PROFESSOR DE MATEMÁTICA DEVE CONHECER, E CONHECER BEM, AS CAPRICHOSAS ROSÁCEAS COM SUAS SINGULARIDADES GEOMÉTRICAS.

Em séria dificuldade ficará, certamente, um professor de Matemática se um aluno, altamente motivado, o interpelar sôbre a definição de uma curva elementar, muito conhecida, que denominamos *rosácea.*

A pergunta, bastante impertinente, poderia ser formulada nos seguintes termos:

— Que se chama, em Geometria, uma *rosácea?*

Em outras palavras:

— Qual será a definição certa, e logicamente perfeita, do ponto de vista geométrico, para a curva que chamamos *rosácea?*

Ou ainda:

— Em que condições uma curva algébrica, ou transcendente, poderia ser incluída na família das *rosáceas?*

A verdade é a seguinte:

O Prof. Francisco Vera, cm seu *Dicionário da Matemática,* não define, e nem mesmo cita, as rosáceas; Glenn James, em

Mathematics Dictionary, refere-se à *rosácea* de três folhas th*ree leafed rose)* e apresenta, para essas *roses,* as suas respectivas equações polares, mas não oferece o menor esclarecimento sobre as formas, singularidades e atributos geométricos de tais curvas,

O escritor português Júlio de Castilhos (1830-1908), em seu livro *Lisboa Antiga,* publicado em 1879, incluiu uma pseudo-definição de *rosácea,* que foi copiada e recopiada durante mais de meio século por dicionaristas inescrupulosos:

> *Rosácea — Figura simétrica terminada em circunferência e apresentando, mais ou menos, analogia com a rosa.*

Do ponto de vista geométrico essa definição não passa de um disparate; é totalmente inaceitável. É um modelo perfeito de definição tola e sem sentido. Nem mesmo chega a dar uma ideia do conceito que pretende caracterizar.

Os arcos de curva, fechados, que formam a *rosácea* são chamados "folhas da rosácea", ou simplesmente "folhas".

É claro que uma *rosácea* pode ter duas, três, quatro ou mais folhas. Quando a *rosácea* apresenta uma folha única é chamada *rosácea degenerada.*

Em certos casos a *rosácea* apresenta uma infinidade de folhas.

Alguns professores de Desenho falam em *rosácea* de três folhas, *rosácea* de quatro folhas etc. Aludem, porém, a certas figuras construídas com traçados de arcos de circunferências. Mas essas curvas, ou esses arranjos geométricos, dentro da Análise Matemática, não podem ser aceitos como *rosáceas.* Propomos, para essas curvas, ou entrelaçados de curvas, a denominação de *rosálidas.* A *rosácea,* como é fácil provar, não pode ser obtida, em seu traçado contínuo, com régua e compasso. A verdadeira *rosácea* não é, nem pode ser euclidiana, isto é, admitir a construção com régua c compasso.

No clássico e citadíssimo compêndio *Desenho Geométrico Elementar,* de Mello e Cunha, encontramos indicações precisas sobre a *rosa de três folhas* e a *rosa de quatro folhas,* que o autor ensina a construir mas não ensina a definir. É claro que essas *rosas,* inventadas pela fantasia do desenhista, c feitas a compasso, muito longe estão das verdadeiras *rosáceas.* Seriam, como já dissemos, *rosálidas,* mas não *rosáceas.*

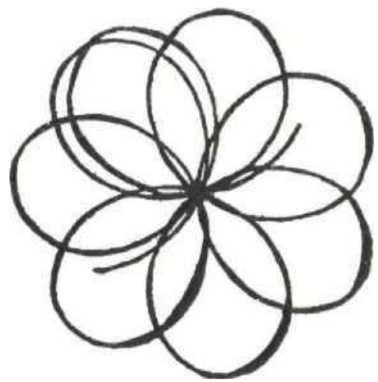
Preocupado com o rigor adstrito às leis da Lógica, apresenta o matemático para a *rosácea* uma definição puramente analítica:

> *Chama-se rosácea a uma curva cuja, equação polar é da forma:*
>
> $$r = a \text{ sen.} mu \qquad \text{(A)}$$
>
> *na qual* r *é o raio polar,* u *o ângulo polar,* a *um parâmetro constante real e positivo, e* m *um número real que pode ser racional ou irracional.*

É essa a definição que encontramos em J. Rey Pastor, *Geometria Analítica.*

Essa mesma definição poderá ser lida na obra monumental, sobre curvas, do geômetra português Gomes Teixeira. Aconselhamos ao leitor curioso consultar, também, a tal respeito, o italiano Gino Loria, em seu estudo sobre as curvas algébricas.

Há curvas que apresentam folhas, ou que são formadas de folhas c que não são *rosáceas.* A *lemniscata de Bernoulli,* por exemplo, com duas folhas, para o geômetra, não pertence à família das *rosáceas.* Só seria uma *rosácea* no sentido de Rey Pastor (veja definição).



Rosácea transcendente. É a transrosácea. Pode ser cortada por uma reta numa infinidade de pontos.

Conclusão: a *rosácea,* definida analiticamente como curva geométrica, pode ser algébrica ou transcendente. Será algébrica se o parâmetro *m* (veja equação *A*) fôr racional; neste caso o número de ramos da curva é finito. Será transcendente quando o número *m* fôr irracional; nesse caso o número de ramos da curva será infinito.

Para atender à natural curiosidade do leitor apresentamos, ilustrando êsse pequeno esboço de um capítulo de Geometria, três *rosáceas* que são altamente curiosas.

Vemos, na primeira, com algumas folhas iniciais, uma *rosácea* transcendente. Não se impressione com o caso. A curva é transcendente. O seu traçado está apenas iniciado, pois essa *rosácea* definida pela equação polar

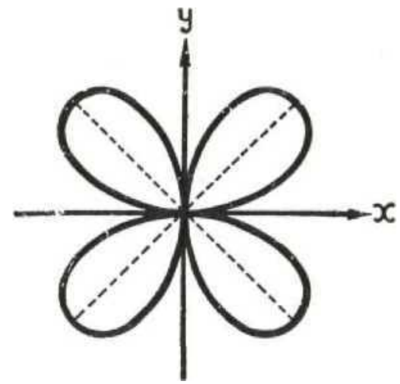
$$r = a \ sen \ u \sqrt{2}$$

é transcendente e tem, portanto, uma infinidade de folhas, com um ponto singular na origem e uma infinidade de outros pontos, também singulares, de interscção dos ramos que se amontoam indefinidamente. Uma reta encontra essa *rosácea* numa infinidade de pontos reais ou imaginários. Essa *rosácea,* definida analiticamente, com uma infinidade de ramos, de vértices c de eixos, é denominada *tramrosácea,* nome bastante sonoro que significa *rosácea transcendente,* isto é, aquela que figura entre as curvas transcendentes como a *ciclóide,* a *catenária,* a *espiral logarítmica* etc.

O estudo completo c delicado da *transrosácea* só interessa ao matemático teórico, pesquisador de coisas impossíveis, pois nem mesmo na Arte Decorativa, ou na Pintura Moderna, o diligente abstracionista poderia encontrar a menor aplicação para essa curva fabulosa, de cem bilhões de ramos.

Representa a segunda figura uma bela, harmoniosa e perfeita *rosácea* de quatro folhas, a *tetrafoliada.* É uma curva algébrica, de singular beleza, que admite quatro eixos de simetria. A *tetrafoliada* pode ser cortada por uma reta cm seis pontos, reais ou imaginários.

O ponto em que os ramos se cortam, na interseção dos eixos, é um *ponto singular* da curva; todos os outros pontos são *pontos ordinários.*



Esta rosácea é chamada a tetrafoliada.

Entre os *pontos ordinários* precisamos destacar quatro que são os vértices da *tetrafoliada.* Em cada vértice, ponto extremo da folha, a tangente à curva é perpendicular a um dos eixos de simetria da *rosácea.*

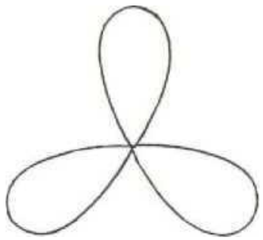
O ponto singular da *tetrafoliada* é um ponto múltiplo da curva. Trata-sc, na verdade, de um *ponto quádruplo.* Assegura o geômetra que, na *tetrafoliada,* o ponto singular é formado por quatro pontos coincidentes. E isso que parece espantoso para um literato, por exemplo, é um fato banalíssimo para o geômctra. Quatro pontos de uma curva, e pontos bem distintos, formando um ponto único!

Na terceira figura podemos admirar uma *rosácea* de três folhas — a *trifoliada* —, definida em coordenadas populares pela equação trigonométrica:

$$r = a \ sen \ 3u$$

É claro que para $u = 0$, nessa equação, resulta $r = 0$. Obtemos, desse modo, as coordenadas do *ponto singular* da curva. É um ponto *triplo.*

A trifoliada, com toda a sua simplicidade, apresenta três vértices c três eixos de simetria e pode ser cortada por uma reta cm quatro pontos reais ou imaginários. É a *rosácea* da perfeita harmonia.



Eis a famosa trifoliada. *É a rosácea da perfeita harmonia.*

O escritor e matemático italiano Guido Grandi (1671-1742), sacerdote católico, foi o primeiro a estudar as *rosáceas. O* nome de *rosáceas* foi por êle atribuído a essas curvas com dois, três ou mais ramos com um ponto comum,

Guido Grandi ingressou na Ordem dos Beneditinos e deixou várias obras que tiveram larga projeção na História da Matemática. O seu verdadeiro nome era Francisco Ludovico.

Esse notável monge, no jardim prodigioso da Matemática, com o seu talento e sua dedicação, fêz reflorir as *rosáceas.*

Desenho ornamental no qual vemos uma rosálida de quatro folhas com um quadrado entrelaçado.

39

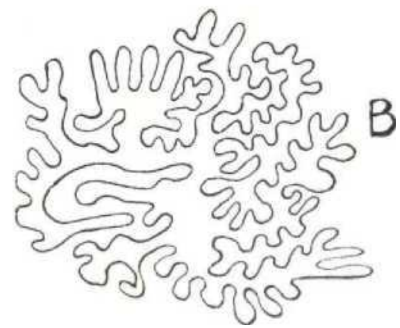
O Simples Complicadíssimo e o Não-Simples Corriqueiro

PARA 0 LEITOR NÃO-MATEMÁTICO, O "SIMPLES" E O "NÃO-SIMPLES" SÃO CONCEITOS LÓGICOS E ACEITÁVEIS, o "SIMPLES" É AQUILO QUE ESTÁ TOTALMENTE ISENTO DE DIFICULDADES E COMPLICAÇÕES. O "NÃO-SIMPLES" SERÁ O CONTRÁRIO——CHEIO DE COMPLEXIDADES E CONFUSÕES. PARA O MATEMÁTICO ESSES DOIS CONCEITOS APRESENTAM INVERSÕES BEM CURIOSAS, COMO PODERÃO VER NOS EXEMPLOS QUE APRESENTAMOS.

Olhe bem, meu amigo, para as curvas *A* c *B* representadas no desenho.

Qual delas, na sua opinião, é a mais simples?

A sua resposta, pelo que supomos, é imediata: entre as curvas *A e B do* desenho, a mais simples é a curva *A,* que parece com um laço, ou talvez com um 6 meio retorcido. A outra curva, cheia de voltas e víravoltas, é complicadíssima. Lembra, de momento, um desenho futurista, ou a suposta trajetória de um vírus alucinado.



Qual é, na sua opinião, a curva simples? *A curva A ou a curva B*

Pois está inteiramente enganado.

Para qualquer matemático a curva *simples é* a curva *B,* que não tem ponto duplo; a curva *A,* que apresenta um ponto duplo, é uma curva *não-simples.* (O ponto duplo é aquele em que a curva corta a si própria.)

Temos, assim:

A — curva *não-simples;*
B — curva *simples.*

O conceito de *simples*, para o matemático, pode ter, como acabamos de ver, um sentido bastante singular.

Assim, a fórmula que resolve a equação do 3º grau, com frações expoentes e radicais duplos, para o mais modesto dos matemáticos, é uma fórmula algébrica simples e elementar:

$$x=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}+\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}$$

Eis a chamada *fórmula de Cardan* que resolve a equação cúbica da forma

$$x^2 + px + q - 0$$

Para o matemático essa fórmula é tão simples, tão harmoniosa que chega a ser poética.

Tão simples, tão corriqueira, que foi por um matemático italiano enunciada em versos. Esses versos tinham, dentro da métrica impecável, imagens poéticas de rara beleza.

Apontemos, meu amigo, para a originalíssima equação com uma incógnita:

$$x^x = x$$

Tudo nela é incógnita: *x* elevado a *x* é igual a *x!*

Essa equação que parece simples, banalíssima (tem uma solução imediata: $x = 1$) é, entretanto, de análise complexa, difícil, transcendente. Apresenta duas raízes infinitas, reais, representadas por dois números inteiros com uma infinidade de algarismos. (Um desses números termina em 76 e o outro em 25.)

O cálculo dessas duas raízes, reais e inteiras, exige uma análise longa, trabalhosa e complicada. Sabemos como essas raízes terminam mas só com um tempo infinito será possível calculá-las.

Deixemos a Álgebra com suas equações c observemos a Geometria.

A curva mais simples é o círculo e, no entanto, a relação entre a circunferência e o diâmetro é expressa por um número transcendente, o famoso número *Pi.*

Vemos, assim, que em muitos casos a simplicidade da Matemática oculta armadilhas perigosas para o calculista e segredos que assombram o pesquisador.

O que é simples para o leigo pode ser de alta complexidade para o matemático.

CURIOSIDADES

Ensinando Matemática

O Prof. Octacilio Novais, que durante mais de quarenta anos lecionou Matemática na antiga Escola Politécnica do Rio de Janeiro, disse-nos certa vez:

— Sei que o meu dever é ensinar Matemática de uma forma clara, agradável, interessante, educativa e útil. Procuro, pois, cumprir com o meu dever.

O Prof. Novais, parecia, pelas obras que deixou, pelos inúmeros discípulos que formou, seguir o roteiro do grande médico e artista Alberto Schweitzer (Minha Vida c Minhas Ideias, *pág. 132):*

Sempre achei que para cumprir com o dever é preciso fazer um pouco mais que o dever.

Planos paralelos

Expressão geométrica bastante feliz poderia ser assinalada nos seguintes versos do brilhante poeta Djalma Andrade, da Academia Mineira de Letras:

> Dois planos paralelos não se encontram,
> Mas tu bem vês que a Geometria mente:
> Quantos planos fizemos nós dois juntos
> Para encontrar-nos paralelamente?

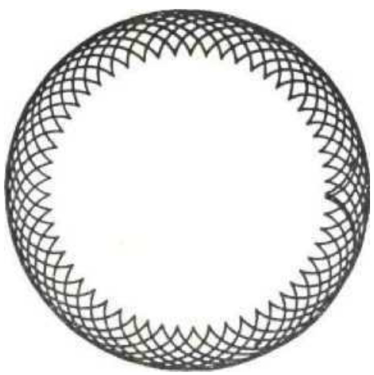
A Geometria e o espaço

Eis um pensamento famoso atribuído a Kant, filósofo alemão (1724-1804):

> A Geometria é uma ciência de todas as espécies possíveis de espaços.

E Louis Alexandre Couturat, matemático francês (1868-1914), dizia:

> A Geometria, em geral, passa ainda por ser a ciência do espaço.



40

O Problema da Besta e a Solução do Sábio

CITAM OS HISTORIADORES, COMO ROUSE BALL E OUTROS, VÁRIOS PROBLEMAS COLHIDOS ENTRE OS POEMAS QUE FIGURAM NA ANTOLOGIA GREGA. O PROBLEMA DO "MACHO E DA BURRA" É UM DOS MAIS SIMPLES E DEVIA SER RESOLVIDO PELOS SÁBIOS E DISCUTIDO PELOS JOVENS.

Os geômetras gregos, cinco séculos antes de Cristo, propunham a seus alunos o seguinte problema:

> Um macho e uma burra, carregados de trigo, dirigiam-se ao mercado. A burra gemia sob o grande peso.
>
> — De que te queixas? — disse o macho, — Se me desses uma de tuas medidas, eu ficaria com o dobro das tuas; e se eu te desse uma, das minhas, as nossas cargas ficariam iguais.
>
> — Sendo assim, dize-me, sábio geômetra, quais eram as cargas de cada um dos animais?

Vejam só: quem propõe o problema é o burro; a solução caberá ao sábio geômetra!

É claro que o problema não apresenta a menor dificuldade e a solução é imediata: o macho levava 7 medidas, e a burra gemia sob o peso de 5 medidas.

Há muitos problemas desse mesmo gênero que poderiam ser apresentados aos estudantes como simples recreações matemáticas. São problemas que dificilmente encontrariam margem para a menor aplicação na vida real.

Citemos um exemplo:

Dois mendigos, ao cair da tarde, voltavam para as suas choupanas. Cada um deles levava um certo número de moedas. Em dado momento, um dos mendigos, em tom queixoso, disse ao companheiro:

— A sorte hoje não me favoreceu. Se você me desse duas das suas moedas, ficaríamos ambos com a mesma quantia.

— Essa é boa — replicou o outro, em tom de gracejo. — essa é muito boa! Se você me desse duas das suas moedas eu ficaria com o triplo do que você teria de resto.

Pergunta-se: Quantas moedas tinha cada um dos mendigos?

Não oferece esse problema a menor dificuldade. Da afirmação do primeiro mendigo resulta a equação:

$$x - 2 = y + 2$$

na qual *x* é o número de moedas do mais rico, e j o número de moedas do mais pobre.

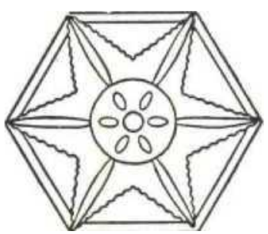
Da réplica do segundo mendigo teríamos uma segunda equação:

$$x + 2 = 3(y - 2)$$

Essas duas equações formam um sistema do 1.° grau que pode ser resolvido mentalmente.

A solução é a seguinte:

O mendigo que formulou a queixa trazia, em sua bolsa, 6 moedas. O outro, o mais feliz, tinha 10 moedas.



41

O Estranho Mistério dos Calculistas Famosos

INTERESSANTE ESTUDO PODERÁ SER FEITO DOS HOMENS PRODIGIOSOS QUE EFETUAVAM CONTAS ASSOMBROSAS EM POUCOS SEGUNDOS. CITEMOS ALGUMAS PROEZAS DE BUXTON, DE FULLER E DO PRODIGIOSO INAUDI, O ARTISTA DOS NÚMEROS. OS PSICÓLOGOS ESBARRAM COM UM PROBLEMA QUE DESAFIA A CIÊNCIA.

Muitos foram os calculistas famosos apontados na História da Matemática.

Relembremos, inicialmente, o inglês Jededish Buxton (1702-1762), que revelou possuir prodigiosa memória para determinadas contas e cálculos. Não passava Buxton de modesto operário, iletrado, incapaz de assinar o próprio nome. E, no entanto, achando-se em Londres, foi levado ao Teatro Drury-Lane onde assistiu à peça "Ricardo **III",** de Shakespeare. Ao terminar a representação, declarou Buxton a um de seus acompanhantes:

— Nessa peça, que acabo de assistir, o ator principal proferiu 12.445 palavras!

Esse cálculo espantoso, feito por Buxton, foi mais tarde rigorosamente confirmado.

Ainda no século **XVIII,** um negro, chamado Tom Fuller, escravo na Virgínia, EUA, causou assombro efetuando mentalmente operações numéricas que pareciam espantosas. Tendo, certa vez, um curioso perguntado a Tom Fuller quantos segundos já havia vivido um homem com 70 anos, 17 dias e 12 horas de idade, o calculista, no fim de meio minuto, respondeu:

— Dois bilhões, cento e dez milhões, quinhentos mil e oitocentos segundos!

Além desses, poderíamos citar, ainda: Mathicu Le Coq, Zorah Colburn, Vito Mangiamelc, Henri Modeux, o russo Ivan Petrof, Maurice Dagbert e muitos outros.

Dagbert, por exemplo, calculava mentalmente, em poucos segundos, a raiz sétima de um número de vinte algarismos.

Um dos mais recentes foi o italiano Giacomo Inaudi (1867-1950), que era exímio em multiplicar, mentalmente, em rápidos instantes, dois números, cada um dos quais com mais de cinco algarismos. Inaudi percorreu vários países da Europa, como profissional no cálculo mental, exibindo-se em sessões públicas, e submeteu-se a ser arguido e examinado por matemáticos. Em 1892, fêz uma demonstração de cálculo mental rápido, perante a Academia de Ciências de Paris.

Aos vinte e quatro anos foi examinado, em Paris, por uma comissão de homens de ciência, da qual faziam parte Charcot, Darbeaux e Binet, que se manifestaram surpresos pela rapidez prodigiosa com que Inaudi fazia tão longos e complicadíssimos cálculos mentais.

Perguntaram-lhe, por exemplo, qual era o cubo de 27; após dez segundos, êle dava a resposta exata.

Um dos pesquisadores interrogou-o:

— Quantos segundos contém um período de 29 anos, 3 meses e 12 horas?

No fim de três segundos Inaudi apresentava, sem hesitar, a resolução do problema: 1.220.875.200 segundos!

O cálculo da raiz quadrada de um número de quatro algarismos, Inaudi efetuava em dois minutos; indicava, com rapidez, o produto de dois fatôres de cinco algarismos cada um.

Os calculistas prodígios, do tipo Inaudi, representam, até hoje, um grande mistério para a Ciência.

42

Circunferência Feita com Retas

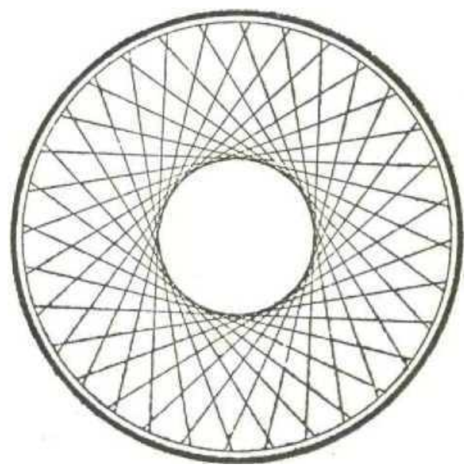
ESTUDAM OS MATEMÁTICOS UMA TEORIA NOTÁVEL, DE LARGA APLICAÇÃO EM TODOS OS RAMOS DA CIÊNCIA QUE É CHAMADA "TEORIA DOS LIMITES". DE ACORDO COM ESSA BELÍSSIMA TEORIA O CÍRCULO É UM POLÍGONO——SIM, UM POLÍGONO COM UMA INFINIDADE DE LADOS. É O QUE VAMOS VER.

Será possível obter-se uma circunferência trançando apenas linhas retas?

O desenho que apresentamos, feito por artista paciente, mostra que essa proeza gráfica é realizável.

Na parte central da figura aparece uma "circunferência" formada exclusivamente por feixe de retas.

Do ponto de vista rigorosamente matemático a parte central da figura, que parece ser um círculo, é apenas um polígono regular convexo, com 128 lados. Somos levados, assim, a observar e aceitar um círculo que não existe na realidade.



Na parte central da figura aparece um polígono regular com 128 lados e não um círculo. Como os lados do polígono são muito pequenos, a figura nos dá a ilusão da circunferência.

O geômetra define o círculo como o limite de um polígono regular convexo que tem uma infinidade de lados.

Vejamos como esclarecer esse conceito.

Tomemos um círculo de raio R. Inscrevamos nesse círculo polígonos regulares convexos de 8, 16, 32, 64, 128, 256 lados e assim sucessivamente. O polígono vai cada vez mais se aproximando do círculo. O círculo seria o último dos polígonos, isto é, um polígono regular convexo com uma infinidade de lados.

É firmado nesse princípio que o matemático obtém a fórmula que nos dá, com absoluto rigor, a área do círculo.

A Teoria dos Limites, que é um dos capítulos mais notávei- e mais interessantes da Matemática, vai nos permitir tirar conclusões singulares. Apontemos as seguintes:

1 — A reta é um círculo de raio infinito.

2 — A esfera é um poliedro que tem uma infinidade de faces sendo todas essas faces infinitamente pequenas.

3 — A unidade pode ser decomposta numa infinidade de parcelas da forma:

$$\frac{1}{2}, \quad \frac{1}{4}, \quad \frac{1}{8}, \quad \frac{1}{16}, \ldots$$

Importa, pois, dizer que a unidade é o limite da soma:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \cdots$$

quando o número de parcelas fôr infinito.

Com os recursos das séries infinitas, a Matemática faz prodígios que assombram a inteligência humana.

4 3

A Paixão e a Vez de Sofia Kovalevskaia

É AQUI APRESENTADA EM POUCAS LINHAS A VIDA SINGULAR DA FAMOSA GEÔMETRA RUSSA SOFIA KOVALEVSKAIA, A ÚNICA MULHER SÁBIA QUE MORREU DE AMOR. CONHECIA PROFUNDAMENTE A ANÁLISE INFINITESIMAL, RESOLVIA OS MAIS TRANSCENDENTES PROBLEMAS DE FÍSICA MATEMÁTICA MAS NÃO SOUBE (DIZ O HISTORIADOR) HARMONIZAR O CÉREBRO QUE PENSA COM O CORAÇÃO QUE SENTE.

Jacqucs Boyer, na sua Histoire des Mathématiques, sempre muito comedido e sóbrio em seus elogios, dá o qualificativo de "graciosa" à imortal Sofia Kovalevskaia.

O geômetra português Gomes Teixeira, em seu livro Uma Santa e Uma Sábia, derramou mil alqueires e toneladas de elogios ao esboçar o rctrato de Sofia:

> O seu perfil era severo e acentuado, cabelos castanhos-escuros, negligentemente levantados em tranças, talhe delgado, com flexibilidade elegante, mas em desproporção com a cabeça monumental. A boca era grande, de um desenho irregular, mas cheia de expressão; os lábios fortes e frescos, as mãos pequenas e finas como as de uma criança, um pouco deformadas por veias muito salientes. Mas os olhos! Eram eles que davam a esta fisionomia o caráter de alta inteligência, tão surpreendente para quem via. De côr indecisa, variando do cinzento ao verde, grandes, brilhantes e à flor do rosto, olhavam com uma intensidade que parecia penetrar até o fundo da alma; e, ainda que penetrantes, eram cheios

de doçura, de simpatia, e cada pessoa se sentia pronta a revelar-lhe os segredos de seu coração sob a influência magnética desse olhar inteligente e quente.

Essa mulher, que conquistou tão alto renome na Matemática, nasceu em Moscou, em 1853, descendente de família nobre. Fêz os seus primeiros estudos cm Heidelberg com o célebre gcômetra Leo Kocnigsbcrger (1837-1924) e, mais tarde, em Berlim, sob a direção de Karl Weierstrass (1815-1897).

Tinha apenas dezoito anos — escreveu Gomes Teixeira — *e parecia muito nova. Baixa, franzina, o rosto redondo, os cabelos curtos e frisados, a fisionomia expressiva da jovialidade, os olhos, sobretudo, passando com mobilidade da jovialidade, à serenidade sonhadora, ofereciam a mistura de uma candura infantil e de uma notável profundeza inconsciente que a caracterizava nessa época; jovens e velhos, homens e mulheres, eram igualmente atraídos; mas ela não parecia notar as homenagens que a cercavam, tanto que simples e desprovida de vaidade. O modo de vestir não lhe dava cuidado e tinha nisso uma grande negligência, que conservou sempre.*

Em 1884, na Universidade de Göttingen, recebeu o grau de doutora conferido pela produção de duas teses de indiscutível valor. Weierstrass tinha por sua discípula grande estima c amizade.

A Academia de Ciências de Paris conferiu-lhe, em 1888, o Prémio Bordin, pelo trabalho *Sobre Um Caso Peculiar do Problema de Rotação de Um Corpo Pesado ao Redor de Um Ponto Fixo.*

Além de notável matemática, Sofia Kovalevskaia era possuidora de alta cultura literária. Declamava com muito talento e muita graça em vários idiomas; conhecia a Música. Era profunda em Astronomia c doutora em Física Matemática.

Karl Weierstrass, seu mestre, um dos maiores matemáticos de todos os tempos, dizia: *Beleza no mundo, beleza de verdade, é a dupla Sofia e a Matemática.*

Sofia Kovalevskaia foi mais tarde nomeada pelo Rei Oscar II professora da Escola Superior de Estocolmo, e durante todo o tempo em que exerceu o magistério deu provas de possuir uma inteligência invejável. A Física Matemática deve a Kovalevskaia valiosas contribuições.

Sofia Kovalevskaia (desenho de Felicitas Barreto).

Gomes Teixeira, referindo-se à encantadora Sofia, escreveu:

Era uma sábia e uma romântica; uma geômetra e uma sonhadora.

Tendo ficado viúva após o suicídio do seu marido — aliás, paleontólogo — foi, algum tempo depois, solicitada novamente em casamento pelo célebre Fridtjof Nansen (1861-1930), naturalista norueguês; não pôde, porém, aceitar o pedido c contrair novas núpcias por causa de sua situação excepcional, no meio científico. Ademais, Nansen era onze anos mais moço do que a sua tão querida geômetra.

Ficou, porém, tão apaixonada que, não resistindo ao desgosto, faleceu, no dia 10 de fevereiro de 1891, poucos meses depois do seu encontro com Nansen.

Escreveu o Prof. Luiz Freire, na *Revista Brasileira de Matemática:*[1]

> *A linda eslava de olhos maravilhosos, a que ninguém soube resistir (o sábio Prof. Mittag-Lefjler nunca se cansava de repetir), esquecera-se por completo de que a felicidade da mulher consistirá sempre em equilibrar o cérebro que pensa com o coração que sente.*

Ao ser enterrada, teve Sofia Kovalevskaia honras de rei e a Universidade de Estocolmo recebeu telegramas de condolências de todos os recantos do mundo civilizado, *et les femmes russes décidérent d'êlever, à celle qui avait si bien honoré leur sexe, un monument dans la ville même ou avait cnseigné."*

O nome de Sofia Kovalevskaia está gravado no singular Monumento da Matemática na cidade de Itaocara (Estado do Rio).

Essa mulher extraordinária soube inspirar paixão em três notáveis geômetras: Karl Weierstrass, Leo Koenigsberger c Mittag-Leffler. Pela primeira vez, na História da Matemática, somos surpreendidos com três génios da Análise, rivais no amor.

44

Um Paradoxo Incrível no Infinito

COM OS PRODIGIOSOS RECURSOS DA "TEORIA DOS CONJUNTOS", DE CANTOR, PODE O MATEMÁTICO CAMINHAR COM SEGURANÇA PELA SENDA SURPREENDENTE DAS COISAS INCRÍVEIS. O EXEMPLO QUE DAMOS, A SEGUIR, É A PROVA CABAL DO QUE ACABAMOS DE AFIRMAR.

Consideremos um quadrado *ABCD* e um segmento *PS* igual ao lado desse quadrado.

Admitamos que o quadrado e o segmento sejam formados de pontos.

— Onde existirá maior número de pontos? Em toda a superfície do quadrado ou no segmento *PS?*

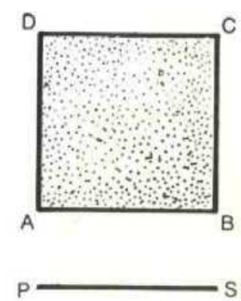
— No quadrado — responderá, certamente, o leitor. E responderá de pronto, sem hesitar meio segundo.

— No quadrado, é claro! É evidente!

Pois essa afirmação, dando ganho de causa ao quadrado, é, para o matemático, totalmente errónea.

Contrariando a intuição e a evidência geométrica a verdade é a seguinte:

O número de pontos contidos na superfície do quadrado é exatamente igual ao número de pontos alinhados que formam o modesto segmento. (E note-se: dentro do tal quadrado caberia uma infinidade de segmentos com todos os seus pontos!)



O *quadrado e o segmento: Qual deles terá o maior número de pontos?*

O analista demonstra, com absoluto rigor matemático, que a cada ponto da superfície do quadrado corresponde um ponto, c um só, do segmento, e que a cada ponto do segmento corresponde um ponto, c um só, do quadrado!

Há, assim, uma correspondência biunívoca entre o conjunto de pontos do segmento c o conjunto de pontos da superfície do quadrado.

E essa conclusão é um dos muitos paradoxos do infinito.

Digamos que um génio sobrenatural — *M* — pudesse, com uma velocidade infinita, retirar, um a um, os pontos da superfície do quadrado, enquanto outro génio — *N* — com a mesma velocidade, e da mesmo modo, retirava os pontos do segmento *PS* igual ao lado dêsse quadrado. E essa tarefa (convém esclarecer) seria feita da seguinte forma: a cada ponto, e um só, tirado peio gênio *M*, do quadrado, corresponderia um ponto, c um só, tirado pelo génio N do segmento. Pois bem. Sabe o que aconteceria? Sabe qual seria o resultado do caso? Os dois gênios (empregados nessa tarefa) terminariam juntos. Quando o primeiro gênio — *M* — tomasse o último ponto da superfície do quadrado, o outro gênio — *N* — estaria retirando, muito tranquilo e risonho, o último ponto do segmento *PS.*

Georg Cantor, um dos maiores génios da Matemática, nasceu na Rússia mas adotou a nacionalidade alemã. Foi o criador da Teoria dos Conjuntos. Faleceu, em 1918, numa clinica de loucos.

— E isso por quê?

A razão é simples:

O conjunto de pontos do segmento e o conjunto de pontos da superfície do quadrado, segundo Georg Cantor (1845-1918), têm o mesmo *cardinal.*

Valeriam, no campo do finito, como o conjunto *Q* das notas musicais (que são em número de sete) c o conjunto *V* dos dias da semana (que também são sete). Diremos que os conjuntos *Q* e *V* têm o mesmo cardinal sete.

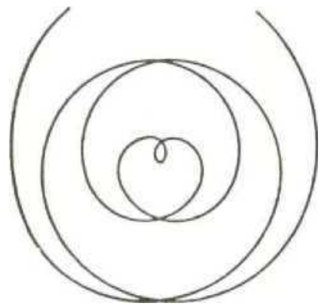
Mas para o caso estranho do quadrado e do segmento (conforme explicamos) a coisa torna-se paradoxal. E explica-se:

Quando atravessamos a barreira do infinito, tudo é possível e as verdades matemáticas tornam-se espantosas. São verdades que a nossa inteligência jamais poderá atingir. Que fazer?

* * *

CURIOSIDADES

Curva estranha muito conhecida



Observe, meu amigo, com a maior atenção, a curva representada pela figura acima. Parece uma curva estranha, patológica, com pontos duplos, laços, eixo de simetria etc.

Nada disso. £ uma curva banalíssima, citada a cada momento, exaltada pelos poetas, com aplicações práticas notáveis.

Sabe você o nome dessa curva?

Ê a conhecidíssima e famosíssima espiral de Arquimedes, *apresentada no desenho de forma rara: com seus dois ramos em conjunto.*

Coma as aparências enganam!

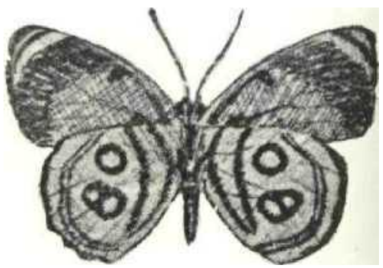
A Matemática das borboletas

Asseguram os naturalistas que certas borboletas ostentam, em suas asas, números expressos por algarismos indo-arábicos. Essas curiosas borboletas quando voam levam a Matemática para o céu.

A mais curiosa das borboletas matemáticas é a dirphia Sabina Walker que ostenta, em suas asas, o algarismo 1 em preto. Essa borboleta tem a preocupação de ser a n.° 1 entre os coleópteros.

Borboleta interessante é a chamada Callicore Peruviana que pode ser encontrada com facilidade no Paraná e em Minas Gerais, A Callicore apresenta um 88 numa asa e outro 88 na outra asa. A repetição é certa, pois as asas das borboletas são rigorosamente simétricas. O desenho de uma asa é exatamente igual ao desenho da outra asa.

Esta bela e curiosa borboleta que os naturalistas denominam Catagramma sorana Godt mostra-nos em cada asa um oitenta com os dois algarismos bem destacados. O matemático diria: 80 de um lado, e 08 do outro. O nome Catagramma deriva-se do grego Kata (sobre) e gramma (carta).



Essa borboleta vem provar que o zero à esquerda de um número pode ter uma significação especial.

45

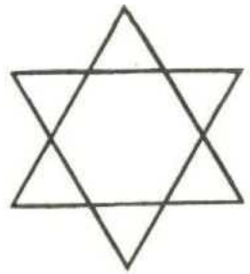
Quatro Símbolos Universais Famosos

SURGE, NA MATEMÁTICA, UM SÍMBOLO——QUE É DE INDISCUTÍVEL RELEVO NA HISTÓRIA. É O HEXAGRAMA OU "ESCUDO DE DAVID". AQUI TRANSCREVEMOS UM ESTUDO COMPLETO E MUITO INTERESSANTE, FEITO PELO ESCRITOR NAUM1M AIZEN E INCLUÍDO NO LIVRO "ROMANCE DO FILHO PRÓDIGO". O ESTUDO DE NAUMIM AIZEN ABRANGE, TAMBÉM, TRÊS OUTROS SÍMBOLOS: A CRUZ CRISTÃ, O T'AJ-KIHIH, CHINÊS, E A CRUZ SUÁSTICA. NESTE ARTIGO SÃO APRESENTADOS OS DADOS ESSENCIAIS SOBRE ÊSSES QUATRO SÍMBOLOS UNIVERSAIS.

A expressão *Maguên David,* em hebraico, significa "Escudo de David". É um símbolo puramente geométrico formado por dois triângulos equiláteros, concêntricos, com os lados respectivamente paralelos e completando um entrelaçado hexagonal (de seis pontas) denominado *hexagrama.*

Muitos autores erradamente definem o *hexagrama* como hexágono estrelado, mas o matemático demonstra que não pode haver polígono estrelado com seis lados. O *hexagrama* pode ser uma estrela "de seis pontas", mas não poderá ser, de forma alguma, um polígono estrelado. No caso do *hexagrama* inscrito num círculo, os seis vértices dos triângulos básicos estarão, é claro, sobre a circunferência.

A origem desse símbolo é totalmente ignorada e deve ter suas raízes na Antiguidade (4000 a.C.) pois o *hexagrama* aparece entre os primitivos sacerdotes egípcios e já era conhecido dos cabalistas hindus. Assegura Blavatsky *{Doutrine Secrèt)* que o *hexagrama*, na índia, era o símbolo de Vichnu, segunda pessoa da trindade indiana. O Dr. R. Allendy, em seu livro *Le Symbolisme des Nombres*[1] procura provar que existe certa relação entre o *hexagrama c o* número seis, pois o Eterno criou o mundo cm seis dias, sendo seis o primeiro número perfeito da série natural.[2] O Templo de Salomão tinha seis degraus e eram, em número de seis, as asas de um serafim (Is, 6,2).



O *hexagrama ou Maguên David.*

Encontramos o *hexagrama* nas igrejas católicas da Idade Média.[3] Nos antigos templos maçônicos encontramos ainda o *hexagrama*, adotado (dentro das Ciências Ocultas) para representar a Justiça. Observa o Dr, Allendy (ob. cit.) que o *hexagrama* não pode ser obtido por um traçado contínuo (sem levantar a pena do papel) c, por isso, simboliza duas ações antagônicas. Para os alquimistas, o triângulo superior (tendo um dos vértices para cima) representava o "Fogo", pois as chamas tendem a subir; o outro triângulo (com um dos vértices para baixo) era a "Água", pois a água tende sempre a descer.

Não sabemos em que época o *hexagrama* tomou o nome de "Escudo de David" e passou a ser o símbolo do judaísmo.

Fora do judaísmo, entre os árabes muçulmanos, o *hexagrama* é denominado "Selo de Salomão" e é citado até nos contos das *Mil e Uma Noites* (História do Pescador e o Génio).

No Folclore Brasileiro é conhecido por "Signo de Salomão" e é empregado como contrafeitiço cm certas mágicas relacionadas com o mito do lobisomem.[4]

1. Paris, 1948.
2. Cf. Malba Tahan, Os *Números Governam o Mundo.*
3. Cf. Mason Neale e B. Webb, *Du Symbolisme dans les Êglises du Moyen Age*, Paris, 1847.
4. Cf. Câmara Cascudo, *Geografia dos Mitos Brasileiros*, Rio de Janeiro, 1947, pág. 212.

No livro O Esoterismo de Umbanda, de Osório Cruz, encontramos certas indicações sobre o Maguên David:

> O Signo de Salomão ê formado de dois triângulos de lados iguais invertidos, encaixados um no outro. É o símbolo da União do Espírito e da Matemática e também da evolução.
>
> Este símbolo possui grande poder mágico se for riscado por uma pessoa muito evoluída e conforme certos ritos que pertencem aos africanos e hindus.

Atualmente o Maguên David é um símbolo judaico universalmente reconhecido. Figura, com destaque, isolado na faixa branca central da bandeira nacional do Estado de Israel, e aparece nas sinagogas, nos selos de Israel, nas sepulturas israelitas, em seus emblemas, jóias, objetos artísticos, capas de livros etc.

Também a cruz, como símbolo religioso e ornamento, não é privilégio do cristianismo, pois já é encontrada em civilizações primitivas — Síria, índia, Pérsia e Egito — sendo que, na América pré-colombiana, era usada como emblema religioso (Adán Quiroga acha que a cruz era símbolo ou invocação da chuva).

Diz-se ter sido a Rainha Semíramis quem teve a ideia de utilizar a cruz como instrumento de suplício. Originalmente, era um poste fincado no solo, no qual se prendia o réu até que morresse de fome e sede. Usada pelos fenícios, os gregos — ou melhor, os macedônios — aplicaram a crucificação como método de pena capital contra os habitantes das cidades fenícias. Os romanos talvez a tenham recebido dos cartagineses, entre os quais tal castigo era frequente por influência fenícia. Os romanos, no entanto, só a usavam para punir os malfeitores de baixa categoria social ou escravos; os cidadãos de Roma eram proibidos de

Esta singular e estranha figura é um símbolo bastante curioso. Era. assim que Os celtiberos (primitivos habitantes da Espanha) representavam a eterna "rotação" solar. As três pernas indicam movimento contínuo (o Sol em torno da Terra). Essa figura simbólica do giro foi encontrada em moedas celtiberianas. Cfr. Goblet d'Ahnella,* Les Migratíons des Symboles. *Paris, J891.

morrer de tal forma. Assim, por exemplo: Saulo, por ser de Tarso, era cidadão romano embora fosse judeu; assim, condenado à morte, foi decapitado; já São Pedro, que não foi cidadão romano, foi crucificado, o mesmo ocorrendo com Jesus.

Figura assinalada em antiga moeda que circulou na índia, dois ou três séculos a.C. Vê-se, à esquerda, a roda solar *(símbolo budista) e, sobre a* roda, *um símbolo sexual (macho e fêmea). Como a* roda solar *tem oito raios, as cinzas de Buda foram divididas em oito partes. Vê-se, no centro, a* Árvore da Vida *com seus sete ramos, e logo abaixo um quadrado mágico de nove casas.*
Na parte inferior o emblema da juventude tendo à direita uma cruz suástica *que simboliza o eterno movimento: o gira-girar dos mundos. Sobre a cruz suástica vê-se uma folha tripartida representando o tempo: Passado, Presente e Futuro. Os discos soltos simbolizam o tempo perdido, tempo desprendido na vida. Cfr. Goblet d'Alviella,* Les Migrations des Symboles, *pág. 53.*

Como instrumento de suplício, as cruzes podiam ser: 1) *crux decussata* ou cruz de Santo André (em forma de X); 2) *crux comissa* ou tau ou cruz de Santo António (em forma de T): 3) *crux imissa* ou cruz latina (em forma de †). Vários autores como Tertuliano, São Jerônimo, São Paulino e Rufino afirmam que a cruz em que Jesus foi crucificado tinha a segunda forma (T). Já outros — São Justino, Santo Agostinho, Teodoreto e Eusébio, além da tradição artística desde os mais antigos monumentos das catacumbas romanas, seguem a opinião da cruz latina (†). Ate cerca de 530 a.C, a cruz era considerada instrumento de suplício, quando Constantino aboliu a crucificação como pena capital e passou a reputá-la símbolo do cristianismo. Antes disso, porém, ela não era abertamente representada nos monumentos cristãos dos três primeiros séculos: a necessidade de ocultá-la dos pagãos e a repugnância que a imagem produzia levaram os primeiros crentes a disfarçarem o símbolo em outros emblemas: a âncora, o tridente, o X do monograma de Cristo e o *iau* (ou T). Há várias formas de cruz, entre as quais podemos dizer que sejam as principais: a *latina* (de origem cristã), a *grega* (de braços iguais, usada pelos gregos e romanos como símbolo misterioso), a *bífida,* a *comissa* (em forma de T), a *decussata* (ou de *Santo André),* a

patriarcal (de dois travessões), a *papal* (de três travessões), a *patada* ou *poleia* (comum na época romântica), a *palentada* ou *patenteia,* a *recruzada,* a de *Malta,* a de *Santiago* (que com a de *Calatrava* datam do século XII, época da fundação das ordens militares), a de *Alcântara* (idêntica, na forma, à de *Santiago,* mas de côr diferente), a *trevada* e a flo*rensada* ou *florenciada* (comum no período ogival), a *gamada* ou *suástica* (de uso muito antigo e, em meados do século XX, símbolo do nazismo alemão), além da *egípcia* (usada nos hieróglifos como símbolo da vida). Tanto a *trevada* quanto a *gamada* e a *âncora* são de uso muito anterior ao cristianismo.

O uso da cruz como símbolo religioso nos tempos pré-cristãos e entre os povos não cristãos talvez seja universal, e, em muitos casos, talvez possa ser relacionado com alguma forma de adoração à natureza. Os dois tipos de cruzes pré-cristãs mais frequentes são a *cruz tau* — assim chamada pela sua semelhança com a letra maiúscula grega T — e a *cruz suástica* — também chamada *cruz gamada* ou *roda da lei,* que se formou pela junção de quatro letras maiúsculas gregas *gama.*

Eis um dos símbolos religiosos mais famosos do mundo. É o chamado T'ai-Kihih *ou* Ying-Yang, *chinês. Foi criado peto iluminado sacerdote Fou-hi que floresceu 3.000 anos a.C.*
Trata-se de um disco circular, dividido por arcos de circunferência em duas partes iguais, sendo uma em preto e outra em branco.
Em cada uma delas é assinalado um olho *da côr da outra.*
Assegura o Dr. Du Bosc que esse símbolo revela que há gérmen macho no principio feminino e um gérmen feminino no princípio macho. No Ying-Yang *o feninino é representado pela parte preta. Cfr. M. Loeffler — Delachaux,* Le Cercle, un Simbole, *Ed. Mont-Blanc, Genève, 1900, pág. 108.*

Vemos na figura o *T'ai-Kihih* ou *Ying-Yang.*

É o símbolo fundamental da Cosmologia e Filosofia dos chineses de todas as religiões — principalmente os do taoísmo.

Compõe-se de um círculo no qual se inscrevem duas figuras parecidas com vírgulas, uma preta e outra branca.

Tal diagrama representa o Princípio Primário ou Grande Absoluto, causa primordial do Universo e de tudo o que existe no mundo.

Para o taoísmo, há duas forças primárias em luta constante. Uma delas, o *Yang* (branco), é o princípio masculino ou ativo, produzido pela solidificação do s o p r o ou da força vital do princípio abstrato, chamado Grande Absoluto, causa primordial de toda a existência, quando este último se põe em movimento logo após a saída do Nada Absoluto. O *Yang* é indestrutível, inteligente e produz todas as coisas e os seres do Universo por sua união com a outra grande força, o *Ying* (preto), princípio feminino ou passivo, proveniente, por sua vez, do sono do Grande Absoluto. Não há, porém, conflito entre as duas forças. O Homem e o Universo acham-se em harmonia quando ambos seguem o *Tao* — ou "Caminho" da natureza.

Aqui apresentamos um dos muitos amuletos inventados pelos místicos e quiromantes da Idade Média. Vemos no centro o hexagrama (Maguên David) e na parte de fora seis algarismos, dois dos quais estão deformados. O fio, que serviria de vioIdura para o amuleto, tem -vinte e oito elos. Cada elo seria, para o portador do amuleto, um ano de vida próspera e feliz. Cfr. Marquês Revière, Amulettes, talismans et Pantacles. *Col. Payot, Paris, 1938, pág. 153.*

Para se dividir o símbolo *Tai-Kihih* em duas partes (*Ying* e *Yang)* de tal modo que os dois elementos ficassem iguais um ao outro, mostrando sua íntima relação, desenhou-se uma linha curva.

O símbolo, em geral, significa boa sorte e prosperidade, além de ser largamente usado na China. A Coreia, ao tornar-se independente, usou-o em sua bandeira nacional.

Falemos, finalmente, da suástica.

A suástica é muito difundida e se encontra em todos os tipos de objetos. Foi usada como emblema religioso na Índia e na China, muitos séculos antes da era cristã, além de também se achar em monumentos pré-históricos de várias partes da Europa, Ásia e América.

Para Burnouf, ela representava o instrumento utilizado para obter fogo, simbolizando então a chama; outros eruditos acham que, para os gauleses, significava o Sol e sua aparente rotação diurna.

As escavações de Schlieman em Hissarlik, terreno da antiga Tróia, revelaram a existência da suástica, bem como em Chipre, Palestina, Micenas, Atenas, Etrúria, Sicília, Suécia, Escócia e Norte da África. Nada, porém, se achou em monumentos assírios, egípcios ou fenícios.

Adolfo Hitler tornou a suástica o símbolo nacional da Alemanha nazista, mas não chegou a ficar definida a intenção do *Führer* nas escolhas de tal emblema; alguns pensam que talvez fosse mera fantasia de Hitler. Outros acham haver, aí, dois possíveis motivos do subconsciente: 1) ostentação da força, copiada de algum documento onde a suástica aparece com tal sentido; 2) manifestações de atavismo mendeliano (segundo muitos biógrafos, o chanceler nazista era um *primário).* Mas o próprio Hitler revela sua predileção por um símbolo de fácil confecção e memorização pelas massas que pretendeu e conseguiu conquistar. Ora, tendo por lema a supremacia da suposta raça ariana, talvez Adolfo Hitler tenha considerado a cruz suástica símbolo do arianismo, uma vez que ela aparece em grande quantidade na Índia antiga, berço de tal doutrina; ali, porém, a suástica era apenas um amuleto de raças sumero-dravídicas, não arianas. (Naumim Aizen.)

* * *

CURIOSIDADE

Aritmética e seu prestígio

A Aritmética é comparada, por analogia, a tudo em que se admite a existência de qualquer espécie de cálculo:

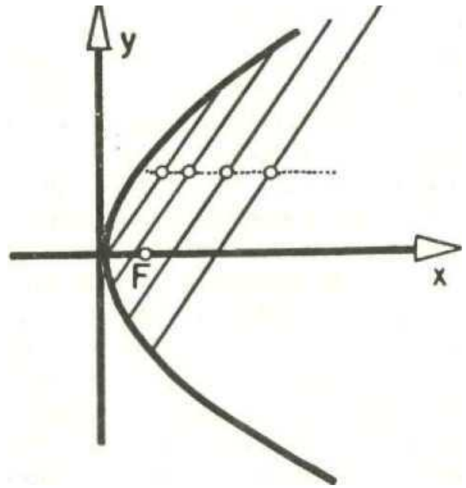
> A Música não é uma expressão do pensamento, mas sim uma Aritmética de tons *(De Bonald).*

É empregada muitas vezes em sentido figurado.
Eis uma definição interessante de Vinet:

> A Moral é a Aritmética da felicidade.

Nota: *De Bonald (1754-1840), foi filósofo e político francês.*

Alexandre Vinet (1797-1847), foi teólogo (protestante) suíço. Ambos de grande cultura e prestígio.



Tomemos uma parábola e tracemos uma infinidade de cordas paralelas a uma direção dada. Os meios dessas cordas (assinaladas por discos brancos) formam uma reía que é um diâmetro da parábola.
A figura nos mostra que na parábola um diâmetro qualquer é sempre paralelo ao eixo.
O diâmetro vai passar pelo centro da curva no infinito.
Muitas pessoas só conhecem o diâmetro do círculo ou da elipse, e ignoram que as curvas abertas, como a parábola e a hipérbole, tenham diâmetros. Ê interessante assinalar que há até curvas cujos diâmetros são curvilíneos.

46

As Barricas Passam a Fronteira

É SEMPRE INTERESSANTE RESOLVER COM OS PRODIGIOSOS RECURSOS DA ÁLGEBRA ELEMENTAR OS PROBLEMAS CURIOSOS DA MATEMÁTICA. VEJAMOS COMO É FÁCIL EXPRIMIR POR MEIO DE UMA EQUAÇÃO O ENUNCIADO DE UM PROBLEMA QUE PARECIA DIFÍCIL E OBSCURO.

A história das barricas, como poderá ser lida nos livros antigos, é a seguinte:

Dois mercadores de vinho, o Sr. Anatole e o Sr. Breno, conduzindo barricas, chegaram à fronteira. O primeiro, Sr. Anatole, levava 64 barricas e o seu colega, o Sr. Breno, levava 20 barricas. As 84 barricas eram rigorosamente iguais.

E como não tivessem dinheiro suficiente para o pagamento do imposto exigido para a travessia da mercadoria, pediram ao Sr. Messias, fiscal alfandegário, que aceitasse o pagamento do imposto em barricas (cada barrica tinha um valor fixado por Lei).

O Sr. Messias, homem honesto e compreensivo, funcionário exemplar, corretíssimo, concordou prontamente em aceitar o pagamento do imposto em barricas. O pagamento feito desse modo seria, aliás, perfeitamente legal.

Depois de fazer os cálculos (levando em conta o preço de cada barrica e o imposto cobrado) o Sr. Messias declarou:

— O Sr. Anatole pagará 5 *barricas e mais 40 cruzeiros de diferença. E passará com 59 barricas. O Sr. Breno paga-*

rá 2 barricas e receberá uma diferença de 40 cruzeiros. E passará com 18 barricas.

E assim foi feito, pois os dois mercadores verificaram que as contas estavam justas e certas.

O Sr. Anatole pagou 5 barricas e um acréscimo de 40 cruzeiros e o Sr. Breno pagou 2 barricas e recebeu a diferença de 40 cruzeiros.

Passaram afinal 59 + 18 barricas, isto é, 77 barricas, e o imposto pago (pelas 77 barricas) foi de 7 barricas pois a Alfândega não recebeu parcela alguma em dinheiro. Os 40 cruzeiros pagos pelo Sr. Anatole foram entregues ao Sr. Breno.

Pergunta-se:

— Qual era o preço de cada barrica? Cada barrica quanto pagou de imposto para passar na fronteira?

Resolução:

Chamemos x o preço de uma barrica. Pelas 59 que passou, o Sr. Anatole pagou 5 barricas e mais 40 cruzeiros. Logo pagou:

$$5x + 40$$

Foi esse o imposto das 59 barricas; para se achar o valor do imposto pago por uma barrica precisamos dividir por 59. E temos:

$$\frac{5x + 40}{59} \qquad \text{(A)}$$

Pelas 18 barricas que passou, o Sr. Breno pagou 2 barricas e recebeu, de volta, 40 cruzeiros. Logo o Sr. Breno pagou de imposto pelas 18 barricas:

$$2x - 40$$

Por uma barrica o Sr. Breno pagou esse total dividido por 18:

$$\frac{2x - 40}{18} \qquad \text{(B)}$$

A fração (A) representa o imposto de 1 barrica pago pelo Sr. Anatole; a fração (B) representa o imposto pago pelo Sr. Breno por uma barrica. As duas fraçõcs (A) e (B) são forçosamente iguais. E podemos escrever:

$$\frac{5x + 40}{59} = \frac{2x - 40}{18}$$

Obtemos, desse modo, uma equação do 1.° grau com uma incógnita x, que é o preço de uma barrica.

Multiplicando em cruz (como se diz em Aritmética), temos:

$$90x + 720 = 118.x - 2.360$$

Transpondo e reduzindo, achamos:

$$28x = 3.080$$

Tirando o valor de x resulta:

$$x = 110$$

É êsse o preço (em cruzeiros) de uma barrica.

O imposto total cobrado pelas 77 barricas foi de 7 barricas. Logo o imposto cobrado total foi de 770 cruzeiros. Sabemos que passaram 77 barricas, logo, cada barrica pagou:

$$770 / 77$$

isto é, cada barrica pagou de imposto 10 cruzeiros.

Verificação: O 1º mercador pagou, pelas 59 barricas, o imposto de 590 cruzeiros, sendo 5 barricas (550) e mais 40 cruzeiros. O 2º mercador pagou, pelas 18 barricas, 2 barricas (220 cruzeiros) e recebeu 40 cruzeiros, logo, pagou 180 cruzeiros.

Êsse problema pode ser resolvido sem os recursos da Álgebra Elementar. Basta observar que 59 é um múltiplo de 11 mais 4 ou (55 + 4), e que 18 é um múltiplo de 11 menos 4 ou (22-4).

A soma de 55 + 4 com 22 — 4 é 77, que é o número de barricas que passaram na fronteira.

Exprimindo tudo em cruzeiros, vemos que o 1º viajante pagou cinco barricas e mais 40 cruzeiros pelas 59 que passaram, isto é, pagou 590 cruzeiros: (550 + 40).

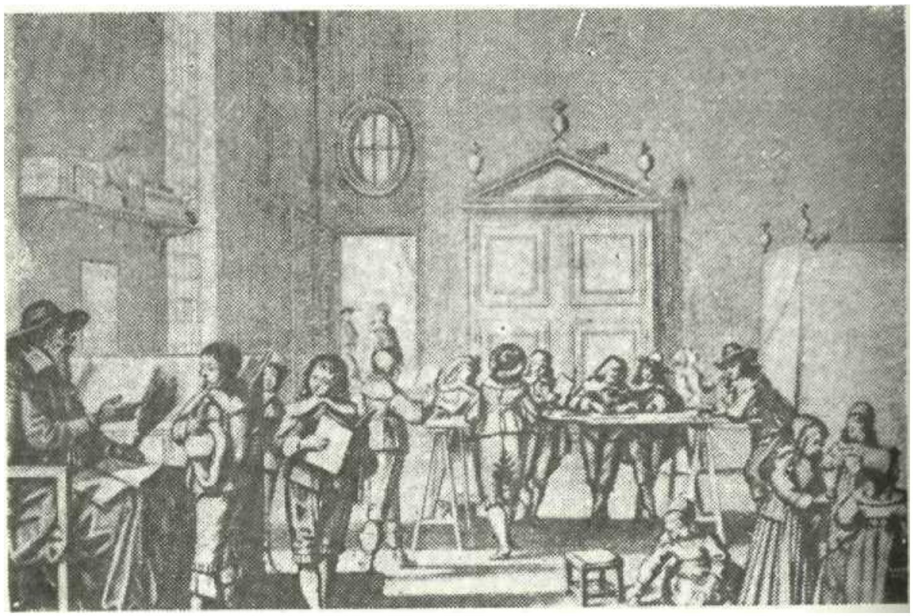
Conclusão: Cada barrica valia 110 cruzeiros e o imposto era de 10 cruzeiros.

A solução algébrica é, porém, mais clara e mais elegante.

* * *

CURIOSIDADE

Uma aula de Matemática



Uma aula de Matemática, na França, em meados do século XVII. O professor, com a vara na mão, ouve o aluno repetir a tabuada.

47

O Método Experimental em Matemática

HÁ VÁRIOS PROBLEMAS, EM MATEMÁTICA, QUE PODERIAM SER RESOLVIDOS PELO MÉTODO EXPERIMENTAL. JÁ GALILEU MOSTROU, NO SÉCULO XVII, QUE ATÉ A BALANÇA PODERÁ CONTRIBUIR PARA A DESCOBERTA DA VERDADE MATEMÁTICA. O CASO DE GALILEU É CITADO POR AMOROSO COSTA EM SEU LIVRO "AS IDEIAS FUNDAMENTAIS DA MATEMÁTICA".

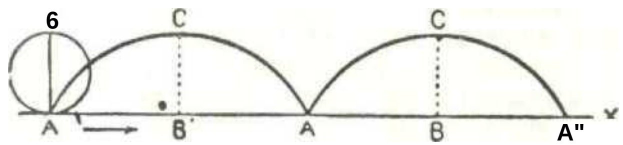
Encontramos cm Matemática uma curva, de grande aplicação na prática (especialmente cm Mecânica), que é denominada *ciclóide.*

Vejamos como definir a *ciclóide.*

Consideremos um círculo de diâmetro *AB.* Vamos supor que esse círculo rola, sem escorregar, sobre uma reta fixa *AX.*

Um ponto *A*, fixo, tomado sobre a circunferência, nesse movimento de rotação do círculo, chamado "círculo gerador", descreve uma curva aberta, infinita, formada de *ondas* ou *arcadas* iguais e que se chama *ciclóide.*

O matemático estuda vários tipos de *ciclóides,* pois o ponto gerador pode ser tomado entre os extremos do diâmetro *AB.* Teríamos, nesse caso, uma *ciclóide encurtada.* Se o ponto gerador estiver no prolongamento de *AB* vamos obter uma *cieióide alon-*



A ciclióide é gerada pelo ponto A *da circunferência do círculo de diâmetro* AB.

gada, também chamada *trocóide*. A reta pode ser uma *ciclóide degenerada*. Isso ocorre quando o ponto gerador está no centro do *círculo* gerador.

Para o estudo que pretendemos fazer só nos interessa a *ciclóide comum* ou a *ciclóide natural*.

Denomina-se área da *ciclóide* a porção compreendida por um arco *ACA'* e o segmento *AA'* tomado sobre a reta *AX*.

A relação entre a área da *ciclóide* e a área do círculo gerador foi obtida experimentalmente por Galilcu Galilei (1564-1642), com auxílio de uma balança.

Vejamos como procedeu o genial matemático e astrônomo italiano.

Num dos pratos da balança colocou a arcada cicloidal (recortada de uma lâmina metálica). E verificou que, para fazer o equilíbrio, era preciso colocar, no outro prato da balança, três discos iguais ao círculo gerador, recortados com a mesma espessura e da mesma lâmina.

Conclusão: A área da *ciclóide* é três vezes a área do círculo gerador.

A área da *ciclóide*, que é hoje obtida com os recursos do cálculo foi, por Galileu, como dissemos, determinada com o auxílio de uma balança. Pretendem alguns historiadores que o mesmo artifício, para o cálculo da área da *ciclóide*, tenha sido empregado por Arquimedes. Dada a genialidade sem par de Arquimedes, essa hipótese é perfeitamente aceitável. Com o auxílio da balança determinou Arquimedes a área de um segmento parabólico.

Demonstração experimental do Teorema de Pitágoras.

A figura ao lado nos mostra bem claramente como pode ser feita experimentalmente, com auxílio de urna balança, a demonstração do Teorema de Pitãgoras:

O quadrado construído sobre a hipotenusa é equivalente à soma dos quadrados construídos sobre os catetos.

Coloca-se num dos pratos da balança o quadrado construído sobre a hipotenusa; colocam-se no centro do prato os quadrados construídos sobre os catetos,

A balança fica em equilíbrio. A verdade é demonstrada pela experiência.

48

O Ultimo e Famoso Teorema de Fermat

EIS AQUI, EM LIGEIROS TRAÇOS, PEQUENO ESTUDO SOBRE UM DOS MAIS FAMOSOS TEOREMAS DE MATEMÁTICA. VEMOS QUE O FRANCÊS FERMAT LANÇOU AOS MATEMÁTICOS UM DESAFIO QUE RESISTE DURANTE MAIS DE TRÊS SÉCULOS DE ESTUDOS E DE PESQUISAS.

Podemos apontar o francês Pierre Fermat (1601-1665) como uma das figuras mais curiosas da História da Matemática. Sendo por profissão um jurisconsulto, exercendo a magistratura, cultivava a Matemática como simples passatempo, e dedicava, à Ciência dos Números, apenas as suas horas de lazer. Para o notável magistrado, conselheiro do Parlamento de Toulouse, a Matemática era simples *hobby* e nada mais.

Não ocultava Fermat a sua incondicional admiração pela obra dos geômetras gregos e, levado por esse impulso admirativo, ampliou, com novas pesquisas, o livro *Lugares Planos*, de Apolônio, e traduziu a obscura e complicada *Aritmética*, de Diofante. No mesmo ano em que Descartes publicou a sua famosa *Geometria*, escreveu Fermat a sua obra *Isagoge* e, por ser extremamente modesto, conservou em sigilo o seu trabalho que encerrava revelações espantosas. Assegura o eminente historiador Francisco Vera que Fermat, antes de Descartes, já havia imaginado o sistema de coordenadas de um ponto, construindo, desse modo, as bases da Geometria Analítica.[1] Fermat foi, por Pascal, considerado o maior matemático de seu tempo, Maurice D'Ocagne

1. Cf. F. Vera, *Dicionário*.

(Hommes et Choses de Science) elogia Fermat, apontando-o como o expoente máximo do século.

Há um problema célebre, na História da Matemática, que é denominado "o último Teorema de Fermat".

O enunciado clássico desse teorema é o seguinte:

A equação diofântica

$$x^m + y^m = z^m$$

na qual m *é um número inteiro qualquer, não admite solução para* x, y *e* z *inteiros, diferentes de zero, quando o expoente* m *fôr maior do que 2.*

O enunciado desse teorema foi, por Fermat, escrito nas margens de um exemplar raríssimo da *Aritmética,* de Diofantc, livro que naturalmente o geômetra-magistrado estava lendo quando lhe ocorreu a ideia do surpreendente teorema.

A demonstração é fácil — escreveu ainda Fermat. — *Não a desenvolvo aqui por falta de espaço nesta margem.*[2]

Para $m = 2$, a equação diofântica fermatiana toma a forma:

$$x^2 + y^2 = z^2$$

que admite, como sabemos, uma infinidade de soluções inteiras expressas pelos chamados "números pitagóricos"[3]

Três números inteiros, num conjunto, formam *terno pitagórico* quando (sendo maiores que 2) o quadrado do maior é igual à soma dos quadrados dos outros dois. São, portanto, ternos pitagóricos os conjuntos:

3	4	5	
6	8	10	
9	12	15	
5	12	13	etc.

2. Cf. S. M. Stewart, *Theory of Nttmbers.*
3. Veja o nosso estudo sobre os ternos pitagóricos.

Vemos, assim, que para $m = 2$, a equação diofântica de Fermat é muito simples.

E para m maior do que 2?

Admitirá a solução, em números inteiros, por exemplo, a equação

$$x^{43} + y^{43} = z^{43} \text{ ?}$$

Haverá um número inteiro que elevado ao expoente 43, por exemplo, seja igual à soma de dois números inteiros, também elevados ao mesmo expoente 43?

Era Fermat um homem de uma integridade impecável. A sua afirmação (publicada em 1670, por seu filho Samuel) não foi, portanto, posta em dúvida. Todos os matemáticos a aceitaram como uma verdade absoluta, irreplicável: *A demonstração do teorema era fácil!* (Não acreditou Gauss que Fermat tivesse dito a verdade. Mas Gauss foi o único.)

Muitos gênios da Matemática investiram, com incrível tenacidade, contra o Teorema de Fermat.

Euler (1774) encontrou a demonstração para $m = 3$. O alemão Dirichlet (1832) resolveu o caso para m = 4. Para esses valores de m a equação diofântica é insolúvel em números inteiros. Legendre (1840) estudou o caso do expoente 5; Lamé (1845) encarregou-se de estudar o caso $m = 7$. O último Teorema de Fermat foi estudado, ainda, por Gauss (1801), Abel (1823), Cauchy (1836), Liouvillc (1840), Kummer (1894) e muitos outros.

Em 1906 um matemático alemão, Dr. Paul Wolfs Khel, fascinado pela obra de Fermat, deixou a quantia de 100.000 marcos, como prémio, para o primeiro que demonstrasse, de forma completa, "o último Teorema de Fermat".

Atraídos por este prémio surgiram numerosos candidatos. Entre 1908 e 1911, a Academia de Gòttingen recebeu cerca de mil e duzentas soluções, algumas com longos e pesadíssimos cálculos.

Para alguns valores do expoente m encontraram os matemáticos, do princípio deste século, dificuldades insuperáveis. Assim a equação

$$x^{59} + y^{59} = z^{59}$$

foi apontada por muitos como insolúvel. Os cálculos exigiam números com vinte ou trinta algarismos. Coisa monstruosa!

Os calculistas pacientes, preocupados com o prémio, levaram suas pesquisas até o expoente 616.[4]

Depois da queda do marco, em consequência da inflação, o prémio do Dr. Paul Wolfs Khel perdeu quase totalmente o seu valor.[5]

Com o emprego das máquinas de calcular (em 1954) o teorema fermattano foi demonstrado para todos os expoentes menores que 2.000.

Hoje, os matemáticos demonstram, por exemplo, que a equação diofântica da forma

$$x^{1901} + y^{1901} = z^{1901}$$

não admite soluções inteiras expressas por números naturais. O valor numérico de cada termo terá, no mínimo, 580 algarismos. Esses números escritos com algarismos do mesmo tamanho dos algarismos que figuram nesta página terão cerca de um metro e pouco de comprimento!

Em 1958, o Prof. Manoel Heleno Rodrigues dos Santos, ao fazer concurso para catedrático, no Colégio Estadual de Pernambuco, apresentou uma tese subordinada ao seguinte título: *O Cltimo Teorema de Fermat* — considerada pelo autor como um subsídio para a sua demonstração. Mais de quinze matemáticos brasileiros tentaram resolver o enigma fermatíano.

Agora, a parte anedótica do *teorema.*

Contou-nos o Prof. Otacílio Novais que o Prof. Inácio Azevedo do Amaral, então catedrático da antiga Escola Politécnica do Rio de Janeiro, e da Escola Normal, matemático de renome, elaborou (1913) uma demonstração que na sua douta opinião era certa, perfeita e original para o Teorema de Fermat. Imprimiu-a com o máximo rigor e remeteu-a para a Academia de Gõttingen. O prêmio Dr. Wolfs Khel viria, afinal, engrandecer o prestígio da Matemática no Brasil. Que glória para a Ciência sul-americana!

4. Cf. S. M. Stewart, *Theory of Numbers.*
5. Cf. E. T. Bell, *Les Grands Mathématiques.*

Quando a "demonstração" do Dr. Amaral, traduzida para o francês, chegou à Academia, foi recebida pelo porteiro, homem inculto, que mal sabia as quatro operações com números inteiros,

E eis o que aconteceu.

O iletradíssimo porteiro folheou rapidamente o trabalho do Dr. Amaral, correu os olhos sobre as equações e murmurou desolado:

— Que pena! Bem impresso, capa colorida, em bom papel mas... está tudo errado!

E o Prof. Novais concluiu:

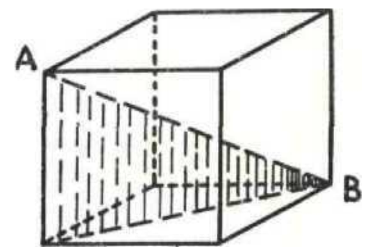
— E estava mesmo. O voto prévio do inteligente porteiro foi confirmado dias depois pelos mesmos membros da douta Comissão. Tudo errado. E errado do princípio ao fim.

Se non é vero é bene trovato.

* * *

CURIOSIDADES

O famoso ângulo φ



Consideremos um cubo P que tem uma face sobre o plano horizontal e outra face sobre o plano vertical.
Tracemos a diagonal AB do cubo que vai da esquerda para a direita e de cima para baixo.
Denomina-se ângulo φ o ângulo que essa diagonal faz com a face horizontal do cubo.
Esse ângulo notável, em Matemática, define a direção da luz convencional do desenho.

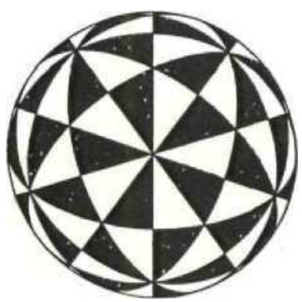
A espiral de Fermat

Eis a curva famosa denominada espiral de Fermat. Trata-se de uma curva transcendente e ptanitotal. Vindo do infinito o ponto gerador dessa espiral, depois de se aproximar do pólo, descreve um pequeno arco e volta para o infinito como se estivesse arrependido da longa caminhada. Essa lenda da volta da espiral de Fermat — segundo o geômetra espanhol Francisco Vera — é das mais originais da Matemática.

Seria a lenda do ponto arrependido?

A descoberta da Verdade

A Matemática ê o mais maravilhoso instrumento criado pelo génio do homem para a descoberta da Verdade, Laisant, *geômetra francês, falecido em 1920.*



49

O Ponto de Ouro, Sua Beleza e Seu Mistério

AQUI OFERECEMOS AO LEITOR PEQUENO ESTUDO ELEMENTAR DO PONTO DE OURO, ESTUDO ESSE QUE É FEITO DE FORMA RIGOROSAMENTE DIDÁTICA. TRATA-SE DE PROBLEMA GEOMÉTRICO FAMOSO, DE RARA BELEZA, QUE INTERESSA ESPECIALMENTE AOS ESTUDANTES E AOS ARTISTAS,

ABORDAMOS, ASSIM, UM CAPÍTULO DA MATEMATICA ELEMENTAR DE UM PONTO DE VISTA SUPERIOR. ERA ESSA, PRECISAMENTE, A PREOCUPAÇÃO QUE NORTEAVA A OBRA DE FELIX KLEIN (1849-1925), GEÔMETRA ALEMÃO, APONTADO COMO PROFESSOR MODELAR.

O esclarecido e famoso filósofo inglês Alfred North Whitehead (1881-1947) foi levado a afirmar que a Matemática ê a mais original criação do espírito humano.

Esse aforismo do sábio logicista só poderia parecer fantasioso, ou exagerado, para aqueles que vivem totalmente alheios às belezas e aos prodígios da chamada Ciência de Lagrange (1736-1813).

Nos domínios da mais pura e elevada Fantasia, a Matemática é um amontoar contínuo, maravilhoso, de surpresas, de problemas vivos e curiosos, de teorias espantosas, de sutilezas filosóficas que nos deslumbram.

Com suas pesquisas, o matemático estuda os átomos e desvenda os segredos dos espaços infinitos; permite ao homem ir à

Lua e medir com rigor o peso do pingo da letra *i* quando escrita com tinta verde, numa folha de papel.

—— o ——

Deixemos, porém, de despejar o caçuá de nossos elogios sobre a Ciência que Leibniz, o filósofo, considerava como a "honra do espírito humano".

Vamos abordar hoje um dos mais famosos problemas da Geometria, ou melhor, da Arte: *O Problema do Número de Ouro.* O nosso estudo será feito de forma bastante elementar, bem simples e essencialmente didática. Aí é que está. Didática acima de tudo. Não nos esqueçamos do que escreveu Sylvester (1814-1897), um dos Tnaiores geômetras do século XVIII:

A Matemática é a Música do Raciocínio

—— o ——

Iniciemos, pois, o nosso estudo. Tomemos um segmento *AB*, isto é, uma porção limitada *AB* de uma reta:

Um segmento AB *pode ser dividido em duas partes desiguais de uma infinidade de maneiras por um ponto* S.

Com um ponto 5, marcado sobre *AB,* podemos dividir esse segmento *AB* em duas partes. Essas partes são *AS* e *SB.*

O ponto *S* — diz o matemático — marcado sobre *AB* pode ocupar uma infinidade de posições. Há, portanto, uma infinidade de maneiras de se dividir o tal segmento *AB* em duas partes.

Se o ponto *S* coincidir com o ponto extremo *A,* o segmento *AS* será nulo. O seu comprimento será zero. A outra parte *SB* (nesse caso particular) será o próprio segmento *AB.*

Para o matemático o ponto *S,* mesmo coincidindo com o extremo *A, dividiria* o segmento em duas partes, uma das quais seria nula.

Isso do ponto 5 coincidir com o extremo *A,* ou com o extremo *B,* são casos anómalos que não interessam ao nosso problema.

—— o ——

Observação importante:

Tracemos um segmento *AB* e assinalemos um ponto *F* no prolongamento de *AB:*

Caso em que o segmento AB *é dividido em duas partes por um ponto* F *de seu prolongamento.*

Para o matemático o ponto *F* (mesmo estando fora de *AB)* divide *AB* em duas partes: *AF* e *FB.* Mas a parte *FB,* como é contada para a esquerda, é *negativa.* A soma da parte positiva *(AF)* com a parte negativa *(FB)* é igual ao segmento AB.

Podemos escrever: *AF* + (- FS) = *AB.*

Para o leigo o ponto F não divide *AB* em duas partes, mas para o geômetra o ponto *F,* como acontecia com o ponto *S,* divide *AB* em duas partes.

Quando o ponto F está no prolongamento do segmento dizemos que *esse ponto divide o segmento em partes subtrativas.*

—— o ——

Vamos supor, para melhor encaminhar o nosso estudo, que o segmento *AB* foi dividido pelo ponto 5 cm duas partes desiguais e ambas positivas. Assim sendo é claro, é claríssimo, haverá *uma parte maior e outra parte menor.*

—— o ——

Temos, assim, para enredo da nossa história, três personagens distintas e que devera ser bem conhecidas:

O segmento *todo*	*AB*
a parte *maior*	*AS*
a parte *menor*	*SB*

Que irão fazer essas três personagens em busca de um *ponto,* sim, em busca do chamado *ponto de ouro?*

—— o ——

O matemático, sempre inquieto e curioso, preocupado com fórmulas e cálculos, pensa logo em achar a *razão* entre o *todo* e a *parte maior,* e também a *razão* entre a parte *maior* e a parte *menor.*

Razão, para o matemático, é quociente, é divisão.

Para achar tais *razões,* que tanto interessam ao matemático, é preciso medir as duas partes. Medi-las com o necessário cuidado.

—— o ——

Digamos que o t*odo* mede 80cm e que as duas partes medem, respectivamente, 60 e 20 centímetros.

A *razão* do todo (80) para a parte maior (60) será dada pelo quociente da divisão de 80 por 60. Esse quociente é 1,33 (aprox.).

A razão da parte *maior* (60) para a parte *menor* (20) será dada pelo quociente da divisão de 60 por 20. Esse quociente é 3.

Em outras palavras: As razões calculadas são: 1,33 e 3. A segunda razão é bem maior do que a primeira.

—— o ——

À razão por quociente os matemáticos dão o nome bastante expressivo: *razão geométrica.*

A razão geométrica entre dois segmentos *AS* e *SB* é um número *puro,* um número *abstraio* — denominação que alguns analistas ortodoxos não aceitam.

—— o ——

Essas duas razões são, pelo matemático, denominadas *razões segmentárias principais.*

As razões segmentarias principais são, portanto:

1ª) Razão entre o *todo* e a parte *maior;*
2ª) Razão entre a parte *maior* e a parte *menor.*

Precisamos fixar bem claramente.

—— o ——

Será interessante, dentro do roteiro que vamos seguindo, fazer mais um exemplo.

Tomemos um segmento de 79cm.

Vamos supor que esse segmento é dividido em duas pqrtes desiguais.

Sendo:

Parte maior:	49cm;
Parte menor:	30cm.

As razões segmentarias principais são:

$$79 \div 49 = 1{,}6$$
$$49 \div 30 = 1{,}6$$

Observem com atenção os resultados.

As duas razões principais são iguais. Com efeito. A primeira é 1,6; a segunda é, também, 1,6.

Diríamos que houve, nesse caso, notável coincidência: As duas razões segmentarias principais são iguais.

—— o ——

Quando as duas razões segmentarias são iguais, o matemático sorri orgulhoso, passa a mão pela testa e diz com certa ênfase:

Essa divisão do segmento *AB* foi feita em *média e extrema razão.*

Convém repetir:

— *Divisão em média e extrema razão.*

Qualquer adolescente, ao ouvir isso, diria risonho, sem hesitar:

Que nome bacana! É legal às pampas!

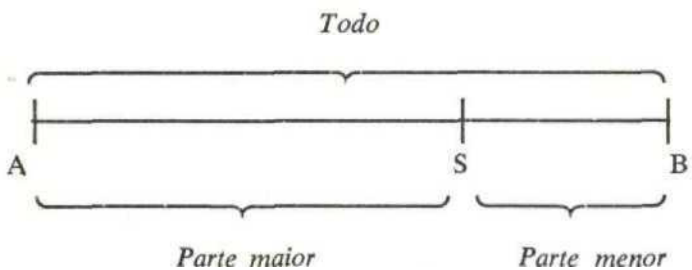
Sim, não resta dúvida, esse nome bastante expressivo é consagrado por todos os matemáticos.

Ê tão bem imaginado que vai nos permitir formular a seguinte definição:

— Dividir um segmento *AB* em *média e extrema razão é* dividi-lo cm duas partes tais, *AS* e *SB*, que o *todo (AB),* dividido pela parte maior *(AS),* seja igual à parte *maior* dividida pela parte *menor.*

Escrevemos simbolicamente:

$$\frac{\text{TODO}}{\text{PARTE MAIOR}} = \frac{\text{PARTE MAIOR}}{\text{PARTE MENOR}}$$



Um ponto S *divide o segmento* AB *em duas parte desiguais: Parte maior e parte menor.*

Repare que a parte maior é uma *média* entre o todo e a parte menor; a razão é extrema porque não existe, no caso, outra solução da qual resulte a igualdade entre as razões segmentarias. É, para o ponto *S*, uma posição extrema. E daí resulta a denominação: *média e extrema razão.*

Esse ponto que divide o segmento *AB* em média e extrema razão é chamado *ponto de ouro* do segmento *AB.*

Estando o *ponto de ouro* no segmento diremos que o *ponto de ouro é interno.*

E, nesse caso, o maior segmento *(AS) é* chamado *segmento áureo interno* ou, apenas, *segmento áureo.*

Outra observação importante:

Vamos supor que um segmento de 80cm (por exemplo) foi dividido por um ponto *F* em duas partes subtrativas. Uma *AF*, negativa, de 130cm e outra, *FB*, positiva, de 210cm:

O ponto de ouro *externo fica no prolongamento do segmento.*

Vamos calcular as razões.

As razões entre o segmento *AB* e a parte subtrativa *(AF)*

$$\frac{80}{-130} = -0{,}61$$

A razão entre a parte subtrativa *(AF)* e a positiva *(FB)* será:

$$\frac{-130}{210} = -0{,}61$$

Vemos, ainda nesse caso, que as razões são iguais. Podemos, pois, dizer que o ponto *F* divide *AB* em *média e extrema razão. O* segmento *AF* é chamado *segmento áureo externo.*

O problema da *média e extrema razão* (diz o matemático) é problema de 2º grau e, por isso, admite duas soluções: uma positiva e outra negativa. No presente estudo só consideramos a solução *positiva,* isto é, só apreciaremos o segmento áureo *interno.*

— o —

E agora, terminada essa conversa sobre a *divisão* em *média e extrema razão,* vamos contar uma história bastante curiosa.

Esse desenho, do Prof. Thales Mello Carvalho (1913-1961), mostra-nos as múltiplas relações entre o número de ouro e as proporções do corpo humano. Podemos apreciar o cânon geométrico ideal.

Há muitos séculos passados, um frade italiano que era gcômetra, chamado Lucas Pacioli (1445-1514), descobriu uma coisa que lhe pareceu bastante singular:

Entre todas as maneiras de se dividir um segmento cm duas partes desiguais, há uma — e uma só — que parece mais harmoniosa, mais agradável, mais de acordo com a estética, diríamos até mais poética, mais suave do que as outras.

Para o tal ponto *S* no segmento *AB*, há uma posição privilegiada, que se destaca no meio de uma infinidade de posições.

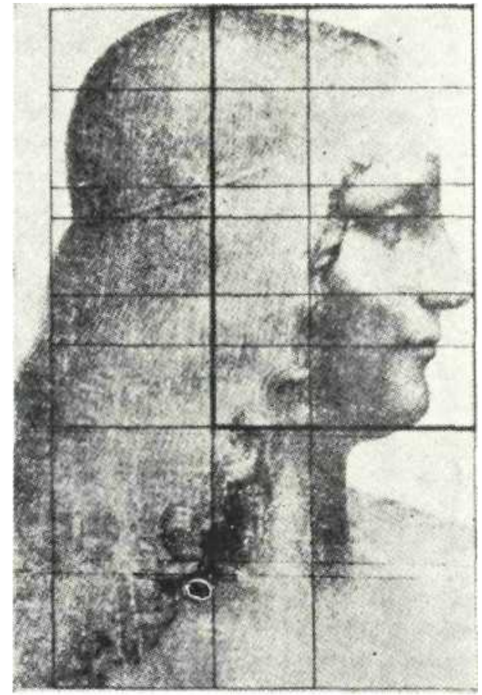
Frei Lucas Pacioli ficou impressionado com o caso. E não era para menos.

Apontemos um exemplo entre os muitos que ocorreram ao frade italiano Lucas Pacioli.

O título posto na lombada de um livro, de modo geral, divide o comprimento total da lombada de forma perfeita e harmoniosa. Não deve ficar nem muito acima, nem muito abaixo. Fica sempre numa certa altura, que pareceu mais agradável, mais harmoniosa, para o operário especializado que preparou a capa. Colocou ali, precisamente ali, porque lhe pareceu mais agradável.

Há, portanto, em relação aos espíritos bem formados, uma decisiva preferência por esta posição do ponto S no segmento.

—— o ——



Retrato famoso de Isabelle d'Este, por Leonardo da Vinci. Convém notar que a linha dos olhos divide, em média e extrema razão, a distância do alto da testa à extremidade do queixo. O mesmo ocorre com a linha da boca em relação à distância da base do nariz à extremidade do queixo. Na mulher matematicamente bela verifica-se a predominância do numero Φ (1,618).

Existe, não há dúvida, uma certa divisão que é mais harmoniosa, mais agradável.

Como achar essa posição do ponto *S* nessa divisão?

Lucas Pacioli, o frade gêometra, ao qual nos referimos, estudou o problema c descobriu uma coisa verdadeiramente espantosa:

— A divisão mais agradável ao espírito, aquela que tem a preferência dos artistas, dos arquitetos, dos pintores, dos escultores e dos gravadores é precisamente a *divisão em média e extrema razão.*

— o —

Esse ponto que divide o segmento da fornia mais agradável, o ponto que determina a divisão em *média e extrema razão,* recebeu, como já dissemos, a denominação de *ponto de ouro.*

E a divisão de um segmento feita pelo *ponto de ouro* foi chamada *divisão áurea.* Esse nome — *divisão áurea* — foi criado por Leonardo da Vinci (1452-1519), o genial artista florcntino — autor da *Gioconda* e da *Ceia.*

Feita a divisão áurea, o segmento maior é chamado *segmento áureo* e o segmento menor é o *complemento áureo.*

— o —

Assinalemos mais alguns exemplos da divisão áurea notadamente no corpo humano:

— A linha da boca, nas pessoas bem conformadas, divide a distância da base do nariz à extremidade do queixo em *média e extrema razão.*

— A linha dos olhos divide o comprimento do rosto em *média e extrema razão.*

Verifica-se a divisão áurea nas partes cm que os dedos são divididos pelas falanges;

— A cicatriz umbilical divide a altura do indivíduo cm *média e extrema razão.*

— o —

Um arquiteto romano, Marco Vitrúvio Polión, que viveu no século I, a.C, aludiu, em sua obra, a certas relações ligadas à divisão áurea. Mas Vitrúvio só teve a rápida e longínqua percepção do problema. Coube, portanto, ao franciscano Lucas Pacioli, natural de Burgo, na Toscana, a glória de revelar ao mundo a divisão áurea por êle denominada *sectio divina* (seção feita por Deus!).

M. *Ghycka com essa figura procura estabelecer as relações entre os movimentos de um bailarino e o pentágono, isto é, as relações da dança com o* número de ouro.

A obra de Lucas Pacioli foi publicada cm Veneza em 1509. Nove anos depois do descobrimento do Brasil.

— o —

Houve homens verdadeiramente geniais que tiveram a atenção voltada para o *ponto de ouro.*

Leonardo da Vinci, com a poliformia de seu incalculável talento, sentiu-se seduzido pelo mistério da divisão áurea, O célebre astrónomo alemão Johanncs Kepier (1571-1630), que formulou as leis de gravitação universal, era verdadeiro fetichista da divina proporção. "A Geometria — dizia êle — tem dois tesouros. Um é o Teorema de Tales, e o outro é a divisão áurea."

— o —

Na divisão áurea a razão entre o *todo* e o segmento *maior* é expressa pelo número irracional algébrico cujo valor é

$$\frac{1+\sqrt{5}}{2} \text{ ou } 1{,}6180339$$

ou mais aproximadamente

$$1{,}618$$

Esse número é representado pela letra letra grega *fi* (maiúscula):

$$\Phi = 1{,}618$$

E esse valor é usado na prática.

Apresenta o número Φ propriedades notáveis, mas o estudo dessas propriedades está fora dos limites deste trabalho.

Citemos, apenas, duas dessas propriedades.

Se juntarmos 1 ao número Φ obtemos o quadrado de Φ.

Assim:

$$1 + 1{,}618 = 1{,}618 \times 1{,}618 = 2{,}618$$

Ouando do número Φ subtraímos uma unidade, obtemos o inverso de Φ. Assim:

$$1{,}618 - 1 = \frac{1}{1{,}618} = 0{,}618$$

O número Φ é um dos números mais notáveis da Matemática.

— o —

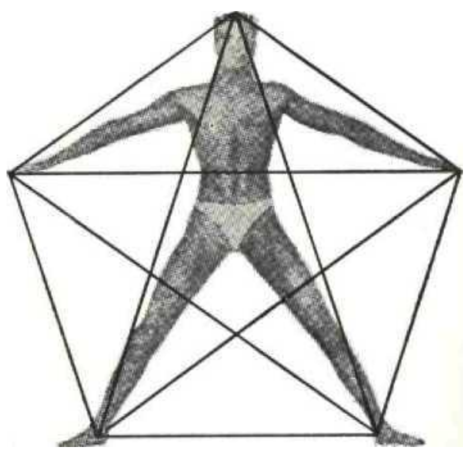
Outra observação bastante curiosa.

Para que um retàngulo seja harmonioso é necessário que a altura seja o segmento áureo da base.

O retàngulo que apresenta essa relação notável entre as suas dimensões é denominado *retângulo áureo* ou ***retângulo módulo*** **Φ**.

Encontramos o *retàngulo áureo* — conforme observou o matemático J. Timerding — no formato da maior parte dos livros, jornais, revistas, cartões postais, selos etc. Assinalamos, ainda, o retàngulo áureo nas fachadas de muitos edifícios que se distinguem pela elegância de suas linhas arquitetônicas.

Mostra-nos a figura as relações entre os pentágonos regulares (convexo e estrelado) e o corpo humano. Os cinco vértices do pentágono são determinados pelos pontos extremos: cabeça, mãos e pés. O lado do pentágono regular convexo ê igual ao raio multiplicado pela raiz quadrada de $3 - \Phi$.



Outro problema de grande interesse será o seguinte:

— Como se pode construir graficamente, com régua e compasso, o *segmento áureo de um segmento dado AB?*

— o —

Vamos supor que é dado um segmento *AB* ou *l*.

Chamemos *x* ao segmento áureo de *AB*.

O complemento áureo será $l - x$.

E temos para êsse problema:

Segmento *todo:* l
Parte maior: x
Parte menor: $l - x$

— o —

As razões segmentárias são:

$$\frac{l}{x} \text{ e } \frac{x}{l - x}$$

No caso da divisão em *média e extrema razão*, essas duas frações devem ser iguais.

Podemos escrever:

$$\frac{l}{x} = \frac{x}{l - x} \qquad \text{(A)}$$

Obtemos, desse modo, uma equação algébrica com uma incógnita. Essa incógnita será o segmento áureo de *l*.

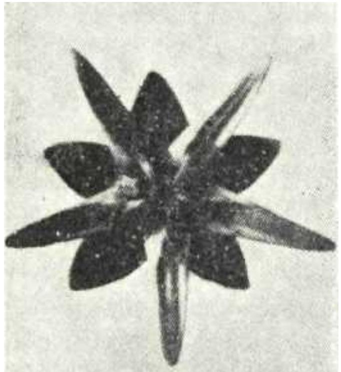
Vamos calcular o valor de *x*.

— o —

A equação (A) tem a forma de uma proporção geométrica. Sendo o produto dos dois meios igual ao produto dos dois extremos, tiramos da proporção (A) a equação:

$$l(l - x) = x^2$$

A simetria pentagonai é encontrada em muitas flores e o pentágono está diretamente relacionado com o número Φ. o numero de ouro e, -portanto, assinalado em todas as flores pentagonais.



Efetuando o produto indicado no 19 membro, vem:

$$l^2 - lx = x^2$$

Transpondo e ordenando em relação a x, resulta:

$$x^2 + lx - l^2 = 0 \quad (B)$$

Trata-se, portanto, de uma equação algébrica, muito simples, do 2º grau.

—— o ——

Sabemos que a equação do 2º grau admite duas raízes.

Como o termo independente $(-l^2)$ é negativo, concluímos que as duas raízes são reais, desiguais, sendo uma positiva e a outra negativa.

Conclusão matemática: o segmento AB é dividido em média e extrema razão de duas maneiras. A primeira com o ponto de ouro interno (solução positiva) e a segunda com o ponto de ouro externo (solução negativa).

Com o auxílio de uma fórmula clássica podemos tirar da equação (B) o valor de x e achamos:

$$x = \frac{-l \pm \sqrt{l^2 + 4l^2}}{2}$$

Essa fórmula pode ser escrita de uma maneira mais simples:

$$x = \frac{l(-1 \pm \sqrt{5})}{2}$$

E obtemos, assim, as duas raízes da equação (B).

—— o ——

Separando as raízes, x' e x'', temos:

$$x' = \frac{l(-1 \pm \sqrt{5})}{2} \qquad x'' = \frac{l(-1 \pm \sqrt{5})}{2}$$

A 1.ª raiz (x'), positiva, nos dá o segmento áureo interno; a 2.ª raiz (x''), negativa, nos dá o segmento áureo externo.

Os valores aproximados serão:

$x' = l \times 0{,}618 \qquad x'' — l \times -1{,}618$

—— o ——

Façamos um exemplo numérico

Achar o segmento áureo de um segmento que mede 40cm.

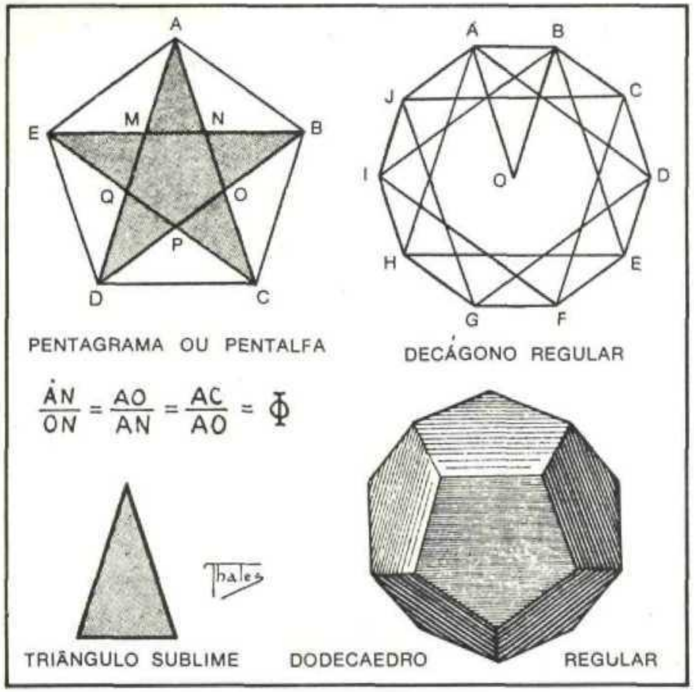
Solução:

O segmento áureo interno será:

40 X 0,618 ou 24,72cm.

O segmento áureo externo será:

40 X 1,618 ou — 64,72cm.



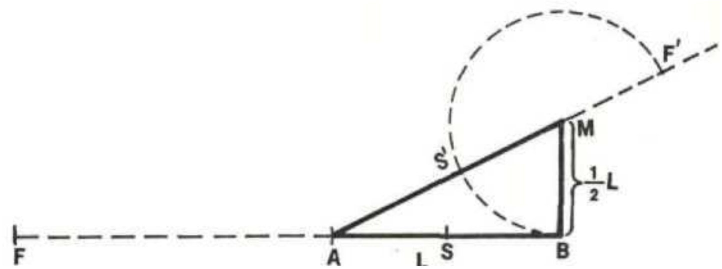
No pentágono regular estrelado, qualquer lado corta dois outros em média e extrema razão. *No decágono regular convexo, o lado* (AB) *é o segmento áureo interno do raio* (OA); *no decágono regular estrelado, o lado* (AH) *é o segmento áureo externo do raio* (OA). O *triângulo isósceles é* sublime *quando a base é o segmento áureo do lado. O ângulo oposto à base mede 38°10' (apr.).* No *dodecaedro regular, a aresta é iaual ao raio multiplicado pela raiz quadrada de 3 — Φ.*

Como se pode obter graficamente, o ponto de ouro de um segmento *AB* ou *l.*

Seja *AB* o segmento dado. (Veja pág. seguinte.)

Levanta-se no extremo *B* uma perpendicular ao segmento e igual à metade desse segmento.

Seja *BM* essa perpendicular.



Temos:

$$BM = \frac{l}{2}$$

Unimos o ponto A ao ponto M, traçamos o segmento AM e prolongamos AM.

Com um raio igual a MB, e com o centro em M, traçamos um arco de circunferência que vai cortar AM nos pontos S' e F'.

AS' será o segmento áureo interno e AF' será o segmento áureo externo de AB.

—— o ——

Tomando, portanto, na figura, um segmento *AS* igual a *AS'* e *AF* igual a *AF',* teremos determinado graficamente os dois *pontos de ouro* do segmento *AB,*

—— o ——

Apresenta-se a divisão áurea em várias figuras geométricas.

Assim, o lado do decágono regular convexo é o segmento áureo interno do raio.

Há, como sabemos, dois decágonos regulares: um *convexo* e outro *estrelado.* O lado do decágono regular estrelado é o segmento áureo externo do raio.

A construção do decágono regular (convexo ou estrelado) decorre da divisão do raio em *média e extrema razão.*

O pentágono regular tem, também, a sua construção relacionada com o *ponto de ouro.* O mesmo acontece com o dodecaedro regular.

O triângulo é chamado *sublime*, quando, sendo isósceles, tem por base o segmento áureo do lado.

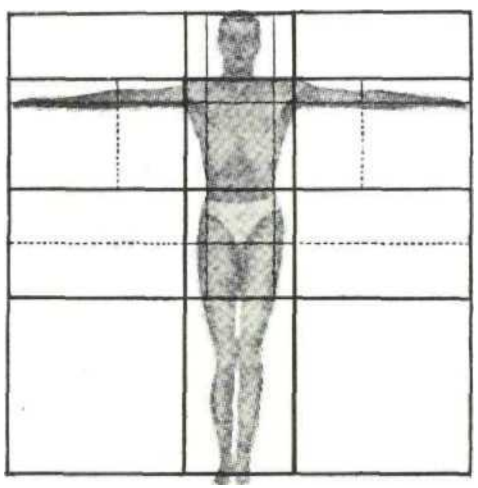
—— o ——

Leonardo de Pisa (1175-1250), um dos vultos mais notáveis e interessantes da História da Matemática, tornou-se conhecido pelo seu apelido de Fibonacci, que significa Filho de Bonacci. A sua obra mais citada, *Liber Abacci*, já preconiza o emprego dos algarismos e da notação indo-arábica. Fibonacci, homem de invulgar talento, tinha espírito acentuadamente renovador. Com os limitados recursos de seu tempo, resolveu muitos problemas de Análise Indeterminada e abordou, com extrema perícia, a Aritmética Comercial.

A sucessão numérica bastante curiosa, embora muito simples,

0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55...

é apontada como uma das mais famosas em Matemática e denomina-se "sucessão de Fibonacci".



O corpo *humano é inscrito num quadrado. Observe que* o *linha umbilical divide o comprimento total do corpo em* média e extrema razão. A linha *dos ombros divide em* média e extrema razão a *distância que vai da linha umbilical ao alto da cabeça.*

Forma-se essa sucessão, tomandose os números 0 e 1, que são básicos e constituem os seus primeiros termos. A partir do terceiro termo a regra de formação é a seguinte: "cada termo é a soma dos dois que o precedem". O terceiro termo será 1 (soma

de 0 e 1); o quarto será 2 (soma de 1 com 1); o quinto será 3 (soma de 1 com 2); o sexto será 5 (soma de 2 com 3); e assim por diante. Observe que o décimo termo, 55, por ex., é a soma dos dois que o precedem (o 21 e o 34). Vamos, pois, repetir e fixar a regra: "Cada termo (a partir do terceiro) é sempre igual à soma dos dois que o precedem."

—— o ——

A sucessão de Fibonacci, dentro da sua espantosa simplicidade, é uma das coisas mais singulares e estranhas da Matemática.

Suprimidos os dois termos iniciais (0 e 1) escrevemos a sucessão fibonacciana propriamente dita:

1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55...

Tomando-se, nessa sucessão, três termos consecutivos, o termo médio, ao quadrado, excede de uma unidade o produto dos outros dois. Assim, nos termos:

3, 5, 8

vemos que o 5 (termo do meio), ao quadrado, é 25. O produto dos outros dois é 24.

Ainda outro exemplo dessa mesma curiosidade. Para os termos consecutivos da sucessão

8,13,21

o quadrado de 13 (termo do meio) é 169. O produto dos outros dois é 168.

—— o ——

Vejamos outra singularidade notável da sucessão de Fibonacci.

Formamos as frações ordinárias sucessivas com termos da

$$\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{5}, \frac{5}{8}, \frac{8}{13}, \frac{13}{21}, \frac{21}{34} \ldots$$

que exprimem valores cada vez mais próximos do inverso do famoso número $, que se apresenta no problema da divisão áurea.

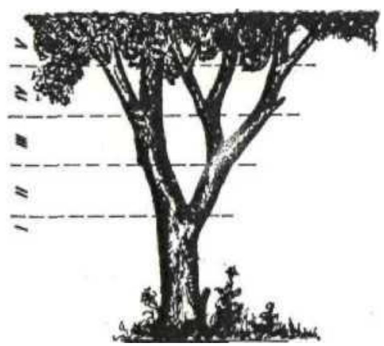
— o —

Será interessante esclarecer :

A fração $\frac{8}{13}$, por exemplo, exprime um valor aproximado do inverso do número Φ. A fração seguinte, $\frac{13}{21}$, já corresponde a outro valor mais aproximado do inverso de Φ. E, assim, sucessivamente.

É claro que, teoricamente, a última das frações seria precisamente o inverso do tal numero Φ.

Mas há, em relação a essa sucessão fibonacciana, algo de muito singular. Ela vai-se revelar, de forma notável, em Botânica. Parece incrível mas é verdade. Notaram os observadores que o tronco de uma árvore normal, a partir do tronco inicial, desdobra-se em galhos, de acordo com a chamada "lei fibonacciana". Do

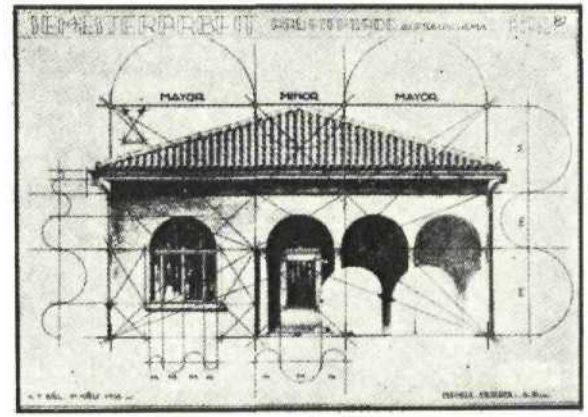


A *figura mostra-nos como ocorre a multiplicação fibonacciana dos galhos de uma árvore:*
1, 2, 3, *5, 8...*

solo sai um tronco; do tronco surgem dois; desses dois surgem três; esses três formam cinco; dos cinco partem oito; e assim por diante.

E a árvore, ao crescer, ao multiplicar seus ramos, não se afasta dessa lei.

O número total de galhos de uma árvore é sempre expresso por um dos termos da sucessão de Fibonacci, e está portanto relacionado com o número Φ.



A figura mostra-nos como podemos assinalar a divisão áurea numa construção feita dentro das normas rigorosas da Arte. A fachada estará inscrita num retângulo áureo e o ponto de ouro *deverá ficar junto à coluna da porta principal.*

Interessante esse segredo, cuja razão jamais foi por Deus revelada aos homens.

— o —

Outra singularidade notável da *divisão áurea* é a seguinte:

Como devem as plantas dispor os seus ramos de modo que as folhas recebam o máximo de exposição à luz solar?

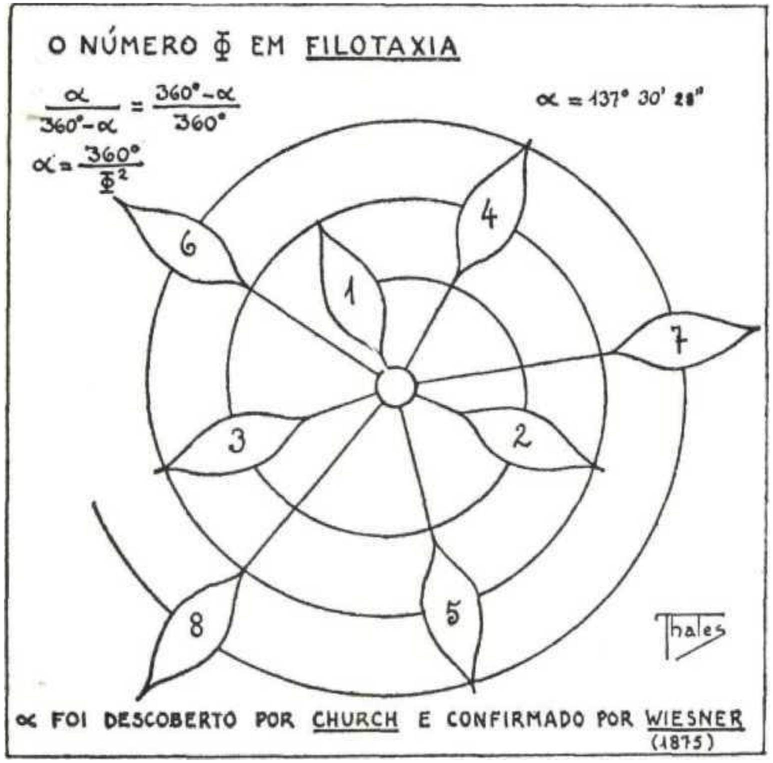
Os ramos são ordenados de modo que nunca se superponham, isto é, um ramo não pode impedir que suas folhas façam sombra nas folhas que estão abaixo.

Os ramos brotam do tronco seguindo um certo ângulo chamado *ângulo ideal* que é calculado com o auxílio do número Φ.

Esse ângulo ideal é 360° dividido pelo quadrado de Φ.

O quociente será: 137°30'28" (valor aproximado).
Esse ângulo é designado pela letra grega alfa: α.

— o —



Os ramos nas plantas crescem de acordo com a divisão áurea. Uma folha (1) não pode fazer sombra às outras folhas. Na figura acima a planta é vista em projeção horizontal.

Façamos, ao terminar, algumas observações sobre o *número de ouro.*

O *número de ouro* aparece:

1 — Em uma infinidade de animais;
2 — No corpo humano;
3 — Nas flores;
4 — Na formação das árvores (Fibonacci);
5 — Na disposição das folhas em certas plantas;
6 — Nos frutos;
7 — Na espiral logarítmica;

8 — Na construção do decágono regular;
9 — Na construção do pentágono regular;
10 — Em vários poliedros regulares;
11 — Na pirâmide de Queops (triângulo ideal);
12 — Em muitas obras de arte;
13 — Nas danças clássicas;
14 — Nas grandes catedrais da Idade Média;
15 — Na Arquitetura;
16 — Na Pintura e na Escultura;
17 — Na Poesia.

Qual a razão dessa preferência dos artistas pelo *ponto de ouro?*

Qual o porquê da beleza na divisão em *média e extrema razão?*

Até hoje (1971) filósofos e matemáticos não conseguiram explicar o extraordinário mistério do *sectio divina.*

Evaristo Galois (1811-1832), francês, um dos maiores génios da Matemática, observou que o grande valor da inteligência humana não está em achar a Verdade, mas sim em esforçar-se por descobri-la.

Quando chegaremos à Verdade em relação ao *ponto de ouro?*

Escreveu o Padre Leonel Franca, S. L:

> *A Verdade não é monopólio de ninguém; é património comum das inteligências.*

Tenhamos sempre esta sentença admirável de S. Agostinho:

> *Faz-se mister ao homem não desprezar o valor dos números.*